Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 2

Versão 0.9

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x-6}{x-1}}}$$

$$\frac{1}{1/x-1} - \frac{2x-6}{x-1/1} > 0$$

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{2x-6}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x-1) - 2x - 6}{x-1} > 0$$

$$\frac{-x+5}{x-1} > 0$$

Problemas de organização e erros frequentes

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x-6}{x-1}}}$$

$$\frac{1}{1/x-1} - \frac{2x-6}{x-1/x-1} > 0$$

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{2x-6}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x-1) - 2x + 6}{x-1} > 0$$

$$\frac{-x+5}{x-1} > 0$$

O sinal de "−" é da fração e deve ser distribuído!

Problemas de organização e erros frequentes

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2x-6}{x-1}}}$$

Cuidado com o sinal da fração!

$$1 - \frac{2x-6}{x-1} > 0$$

$1/x-1$ $\quad$ $x-1/1$

$1/(x-1)$ $\quad$ $(x-1)/1$

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{2x-6}{x-1} > 0$$

$$\frac{(x-1) - 2x + 6}{x-1} > 0$$

$$\frac{-x+5}{x-1} > 0$$

O sinal de "−" é da fração e deve ser distribuído!

Problemas de organização e erros frequentes

Qual o domínio natural de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}}}$?

$$\sqrt{\frac{1-2x-6}{x-1}} > 0$$

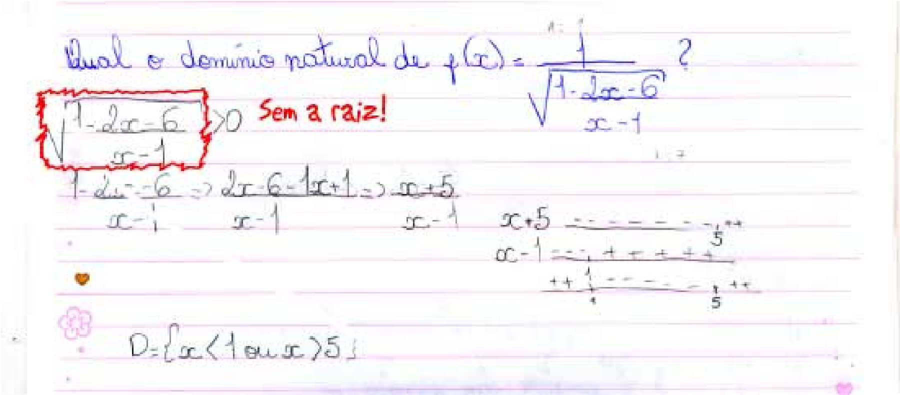
$$\frac{1-2x-6}{x-1} \Rightarrow \frac{2x-6-1x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{x+5}{x-1}$$

$x+5$ $- - - - - - - - \underset{5}{|} + +$

$x-1$ $- - - \underset{1}{|} + + + + +$

$+ + \underset{1}{|} - - - - - \underset{5}{|} + +$

$D = \{x < 1 \text{ ou } x > 5\}$


Qual o domínio natural de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - 2x - 6}{x - 1}}}$?
$\sqrt{\frac{1-2x-6}{x-1}} > 0$
Sem a raiz!
$\frac{1-2x-6}{x-1} \Rightarrow \frac{2x-6-1x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{x+5}{x-1}$
$x+5$
$x-1$
$D = \{x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

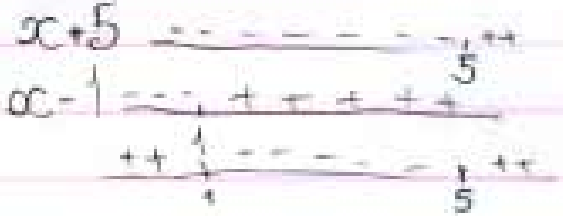
Problemas de organização e erros frequentes

Qual o domínio natural de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}}}$?

$\boxed{\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}}} > 0$ Sem a raiz!

$\dfrac{1-2x-6}{x-1} \boxed{\Rightarrow} \dfrac{2x-6-1x+1}{x-1} \boxed{\Rightarrow} \dfrac{x+5}{x-1}$

Usar "=" e não "=>"!



$D = \{x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

Problemas de organização e erros frequentes

Qual o domínio natural de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}}}$?

$\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}} > 0$ Sem a raiz!

Não!

$\dfrac{1-2x-6}{x-1} \Rightarrow \dfrac{2x-6-1x+1}{x-1} \Rightarrow \dfrac{x+5}{x-1}$

Usar "=" e não "=>"!

$x+5$ — $-$ 5 $+$

$x-1$ — $-$ 1 $+$

$+$ 1 $-$ 5 $+$

$D = \{x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

Problemas de organização e erros frequentes

Qual o domínio natural de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}}}$?

$\sqrt{\dfrac{1-2x-6}{x-1}} > 0$ Sem a raiz!

Não!

$\dfrac{1-2x-6}{x-1} \Rightarrow \dfrac{2x-6-1x+1}{x-1} \Rightarrow \dfrac{x+5}{x-1}$

Usar "=" e não "=>"!

$x+5$ — $-$ $+$ 5

$x-1$ — $-$ $+$ 1

$\dfrac{x+5}{x-1}$ — $+$ $-$ 1 $-$ 5 $+$

$\boxed{D = \{x < 1 \text{ ou } x > 5\}}$

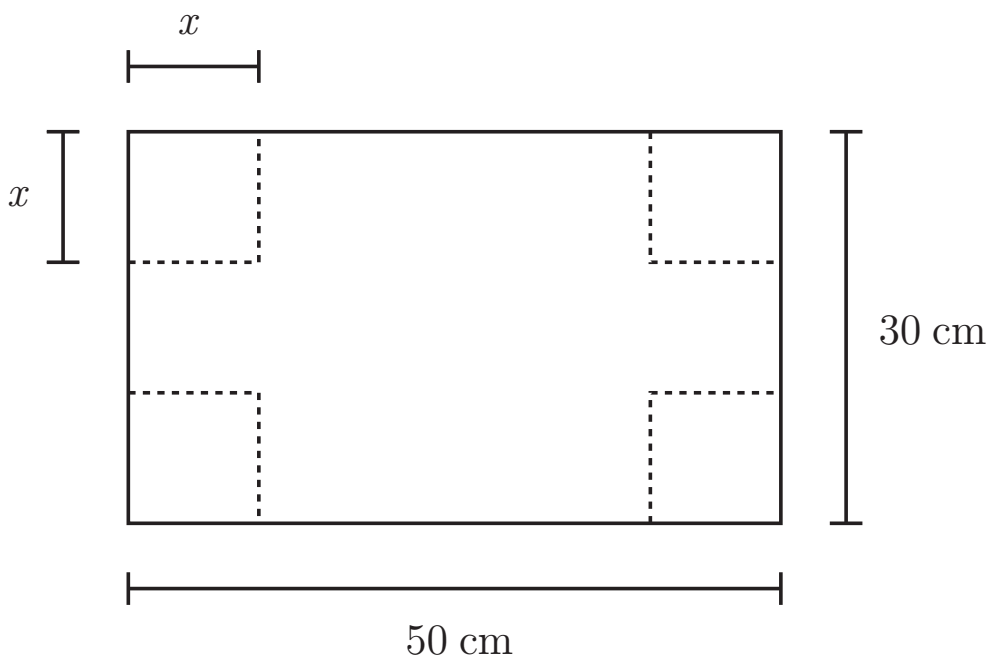
Notação correta para a resposta errada:

$D = \{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

Modelando problemas com funções reais

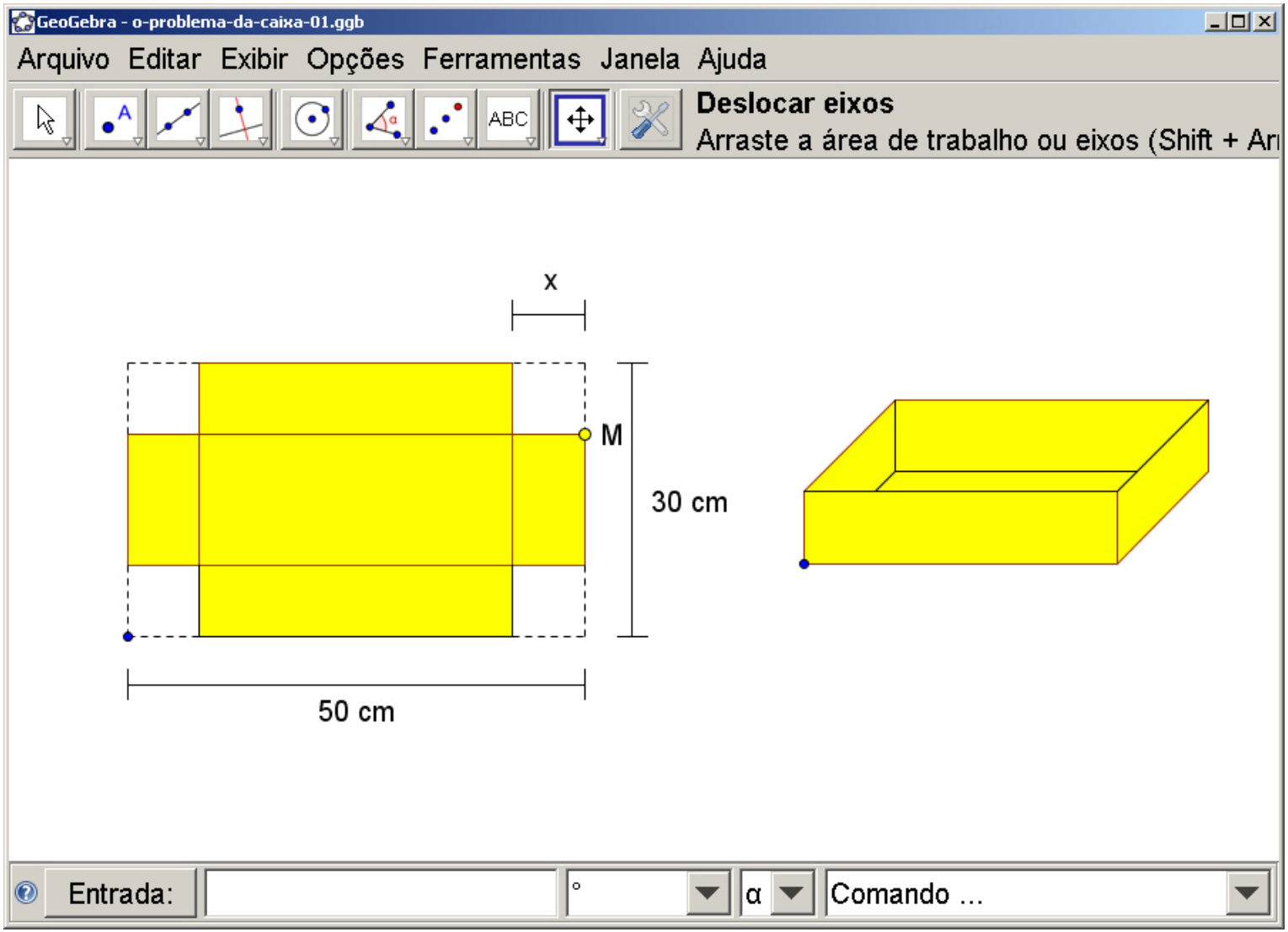
Motivação: o problema da caixa

Você foi contratado por uma empresa que fabrica caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de um folha retangular de papelão medindo 30 cm $\times$ 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão.

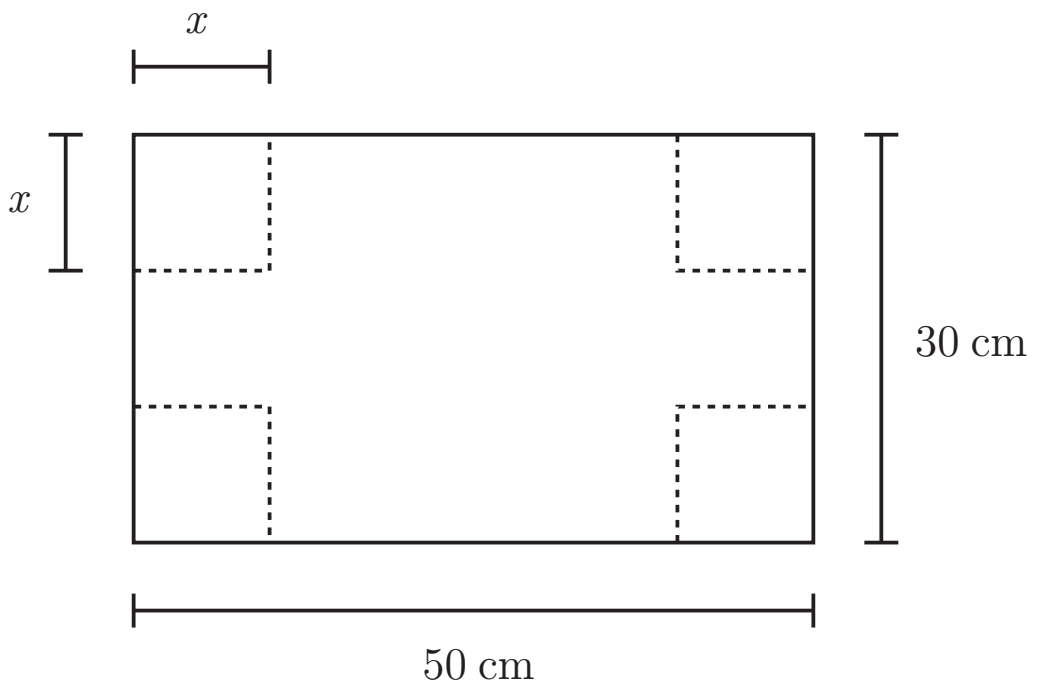


Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.

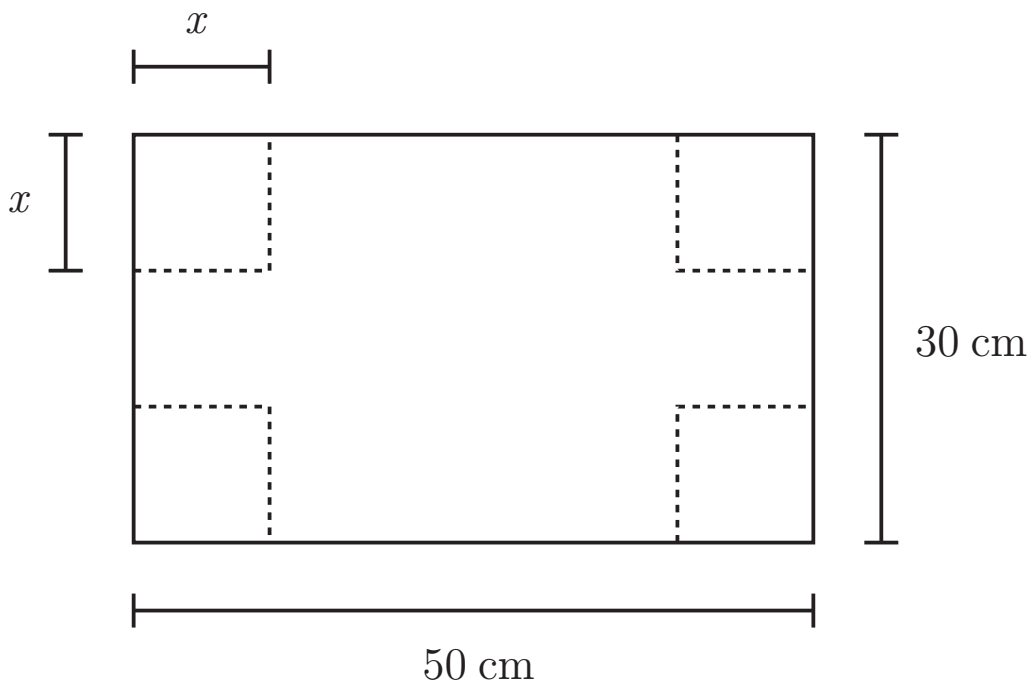
Motivação: o problema da caixa



O problema da caixa

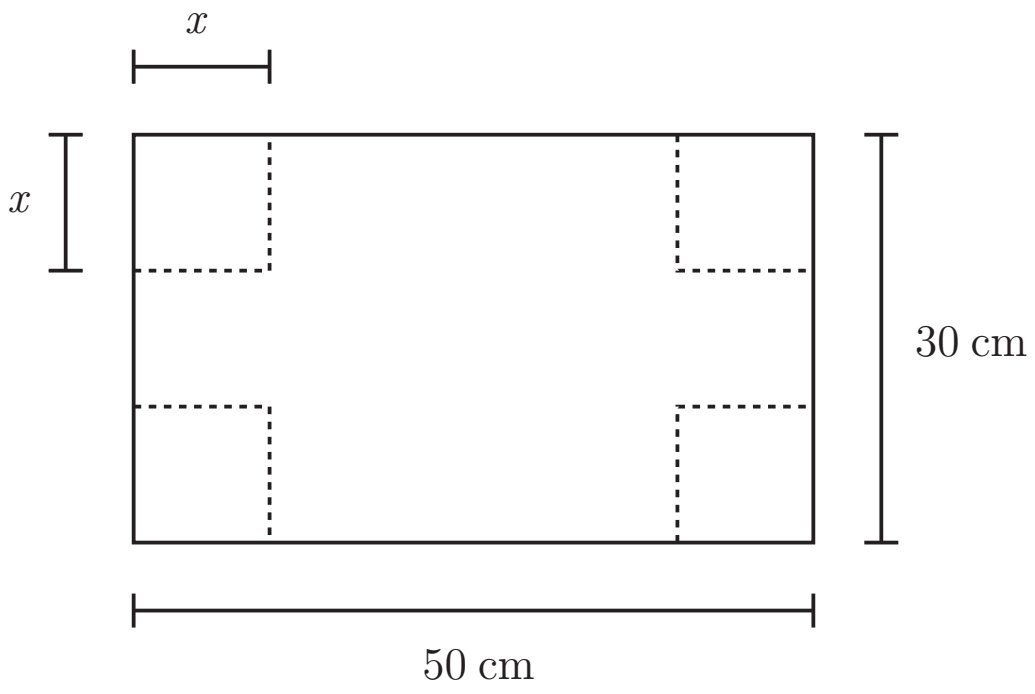


O problema da caixa



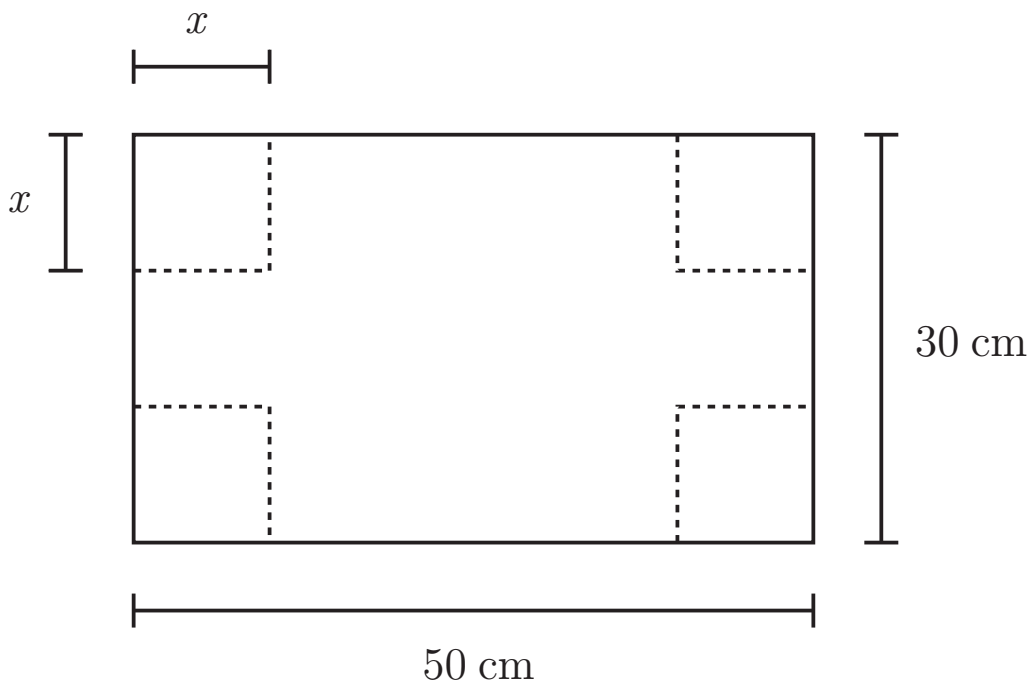
Aqui, $y = f(x) =$

O problema da caixa



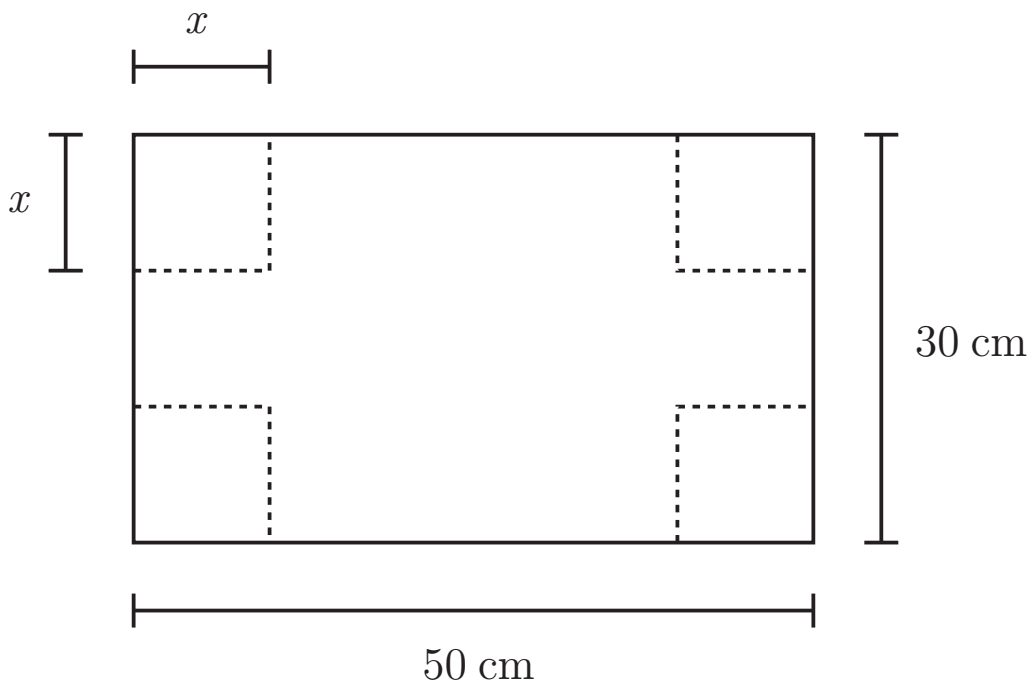
Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x)$

O problema da caixa



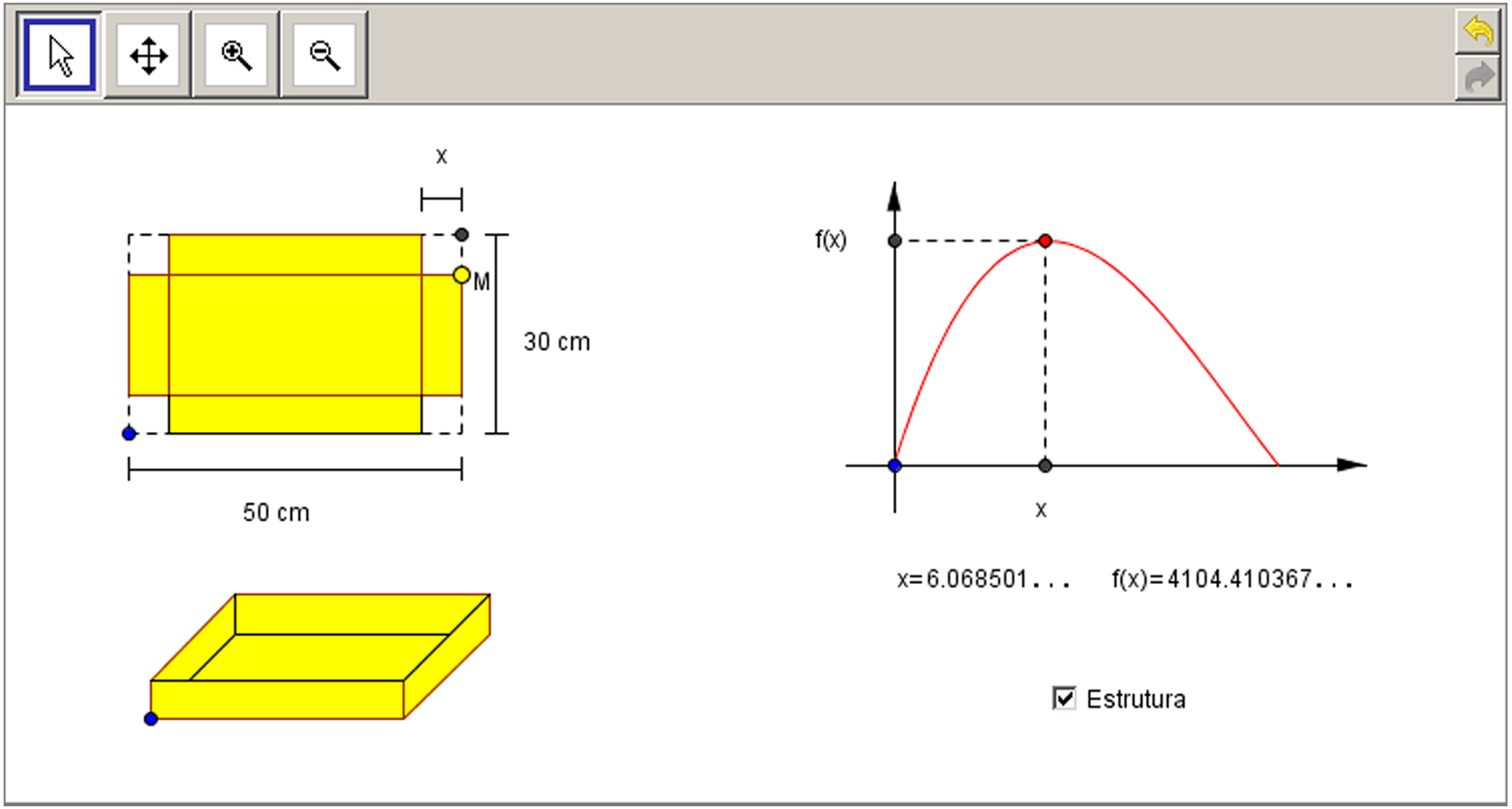
Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$

O problema da caixa



Aqui, $y = f(x) = x\,(30 - 2\,x)\,(50 - 2\,x) = 1500\,x - 160\,x^2 + 4\,x^3$ e $x \in D =]0, 15[$.

O problema da caixa



Revisão: função afim

A função afim

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função afim

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função afim

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim se existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função afim:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x + 3 \end{array}.$$

Proposição

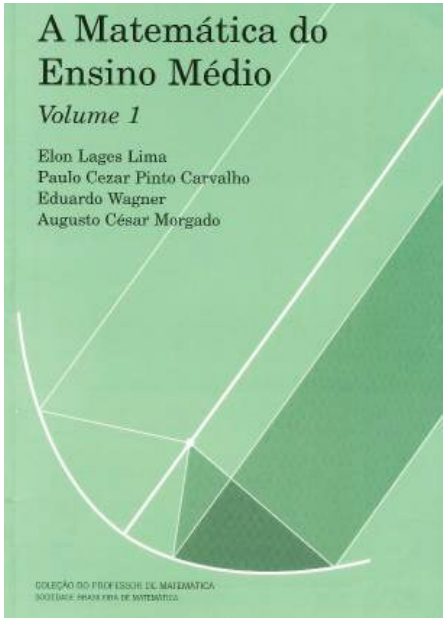
O gráfico de uma função afim $f\colon x \mapsto y = f(x) = a\,x + b$ é uma reta.

Proposição

O gráfico de uma função afim $f\colon x \mapsto y = f(x) = a\,x + b$ é uma reta.

Demonstração (para os interessados):

Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.



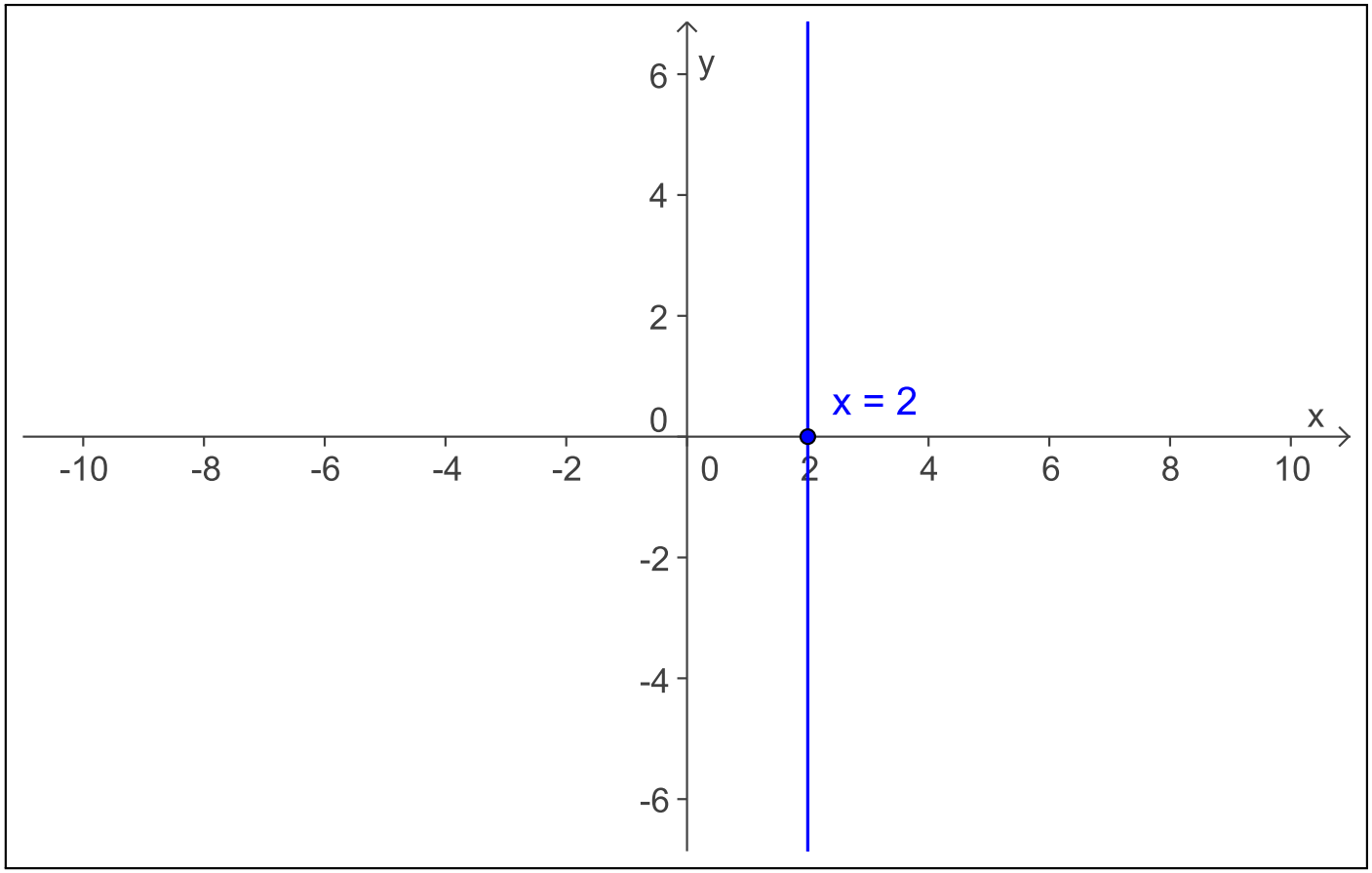
■

Cuidado!

Todo gráfico de uma função afim é uma reta no plano cartesiano, mas nem toda reta no plano cartesiano é gráfico de uma função afim!

Cuidado!

Todo gráfico de uma função afim é uma reta no plano cartesiano, mas nem toda reta no plano cartesiano é gráfico de uma função afim!



Observações

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

Observações

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

(1) O gráfico de uma função afim é uma reta: a é o coeficiente angular (com relação ao eixo x) e b é o coeficiente linear da reta.

Observações

$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

(1) O gráfico de uma função afim é uma reta: a é o coeficiente angular (com relação ao eixo x) e b é o coeficiente linear da reta.

(2) O coeficiente linear b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y.

Observações

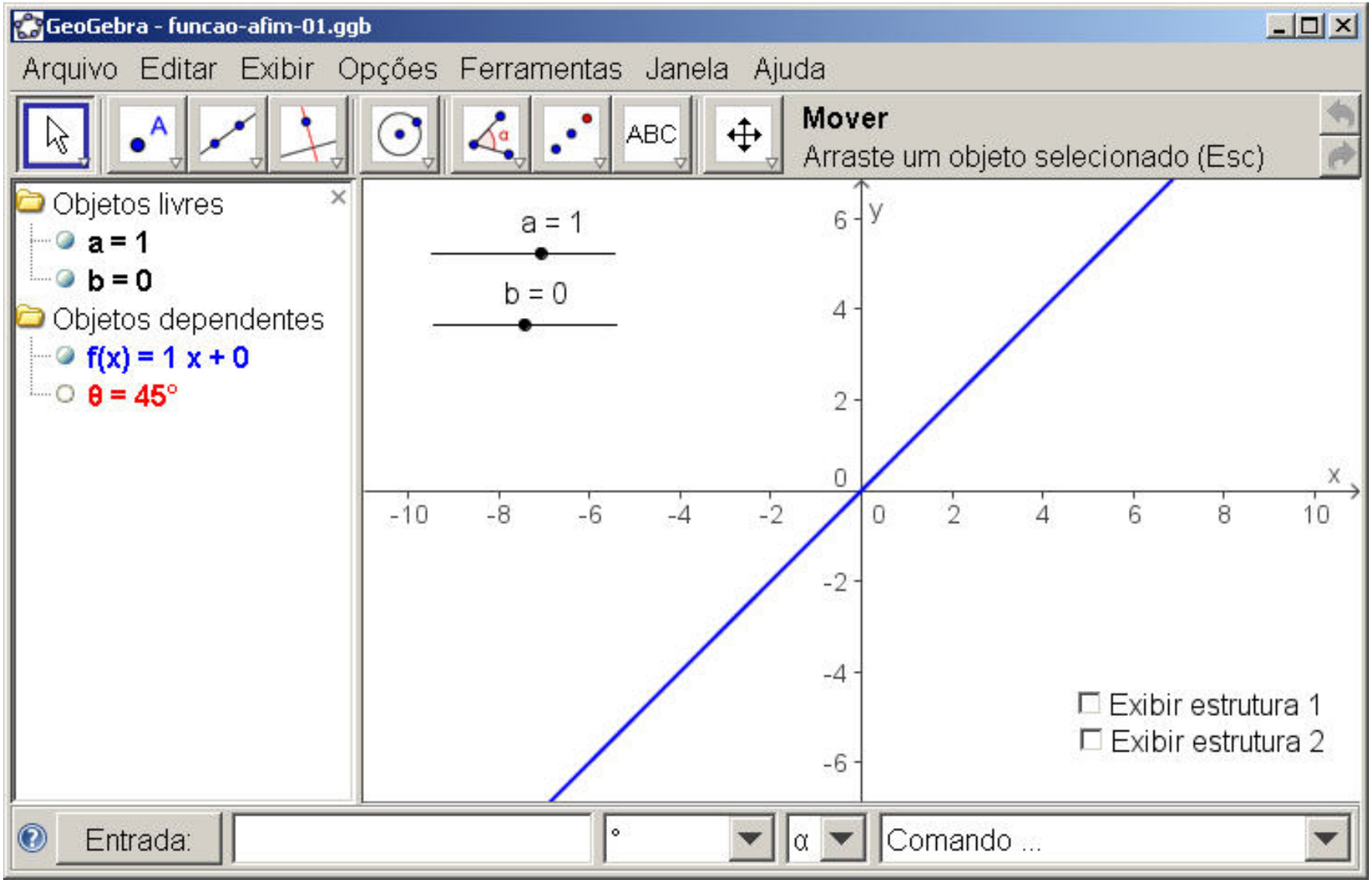
$$y = f(x) = a \cdot x + b$$

(1) O gráfico de uma função afim é uma reta: a é o coeficiente angular (com relação ao eixo x) e b é o coeficiente linear da reta.

(2) O coeficiente linear b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y.

(3) O coeficiente angular a mede a inclinação da reta: ele é igual a tangente do ângulo entre a reta e o eixo x quando a mesma escala foi usada nos dois eixos coordenados.

A função afim



A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido:

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução:

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução: se $f(x) = a\,x + b$, então

$$\begin{cases} f(2) &= 3, \\ f(5) &= 7, \end{cases}$$

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução: se $f(x) = a\,x + b$, então

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(2) & = & 3, \\ f(5) & = & 7, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,a + b & = & 3, \\ 5\,a + b & = & 7. \end{array} \right.$$

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução: se $f(x) = a\,x + b$, então

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(2) & = & 3, \\ f(5) & = & 7, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,a + b & = & 3, \\ 5\,a + b & = & 7. \end{array} \right.$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos que

A função afim

Proposição

Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = y_2.$$

Exercício resolvido: determine a função afim cujo gráfico passe pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 7)$.

Solução: se $f(x) = a\,x + b$, então

$$\begin{cases} f(2) &= 3, \\ f(5) &= 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a + b &= 3, \\ 5\,a + b &= 7. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos que

$$a = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{3}.$$

Revisão: função linear

A função linear

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se linear se existe constante $a \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função linear

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se linear se existe constante $a \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função linear

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se linear se existe constante $a \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função linear:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}.$$

Observações

Observações

(1) Toda função linear é uma função afim, mas nem toda função afim é uma função linear.

Observações

(1) Toda função linear é uma função afim, mas nem toda função afim é uma função linear.

(2) A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

Observações

(1) Toda função linear é uma função afim, mas nem toda função afim é uma função linear.

(2) A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

(3) Se $y = f(x) = a\,x$ é uma função linear, então $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $f(cx) = c\,f(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}$.

Observações

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f

Observações

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} \neq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[$$

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} \neq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[,$$

$$\ln(x_1 + x_2) \neq \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[$$

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} \neq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[,$$

$$\ln(x_1 + x_2) \neq \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[,$$

$$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

CUIDADO!

Nem toda função f satisfaz a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo x_1 e x_2 no domínio D de f:

$$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{x_1 + x_2} \neq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[,$$

$$\ln(x_1 + x_2) \neq \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[,$$

$$|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{x_1 + x_2} \neq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[.$$

Revisão: função modular

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$|2| =$ $\quad$ $|-2| =$ $\quad$ $|0| =$ $\quad$ $|x^2| =$

$|x-1| =$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$|2| = 2,$ $\quad |-2| =$ $\quad |0| =$ $\quad |x^2| =$

$|x-1| =$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$|2| = 2,$ $\quad |-2| = 2,$ $\quad |0| =$ $\quad |x^2| =$

$|x-1| =$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| =$$

$$|x-1| =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos:

$$|2| = 2, \qquad |-2| = 2, \qquad |0| = 0, \qquad |x^2| = x^2,$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$|1-\sqrt{2}| =$ $\qquad$ $|\pi - 3.14| =$ $\qquad$ $|x^2+1| =$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \qquad\qquad |x^2+1| =$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \left\{ \right.$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0 \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square & \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| \quad =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| \quad = \quad \Big\{$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| \quad = \quad \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1) & \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$|x^2-1| \quad = \quad \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{se } x^2-1 < 0, \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{se } x^2-1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se} \\ -x^2+1, & \text{se} \end{cases} \end{aligned}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{se } x^2-1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x^2+1, & \text{se} \end{cases} \end{aligned}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Mais exemplos:

$$|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1, \qquad |\pi - 3.14| = \pi - 3.14, \qquad |x^2+1| = x^2+1,$$

$$|\square| = \begin{cases} \square, & \text{se } \square \geq 0, \\ -\square, & \text{se } \square < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1), & \text{se } x^2-1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ -x^2+1, & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Observação:

$$|x| \quad =$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Observação:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Observação:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

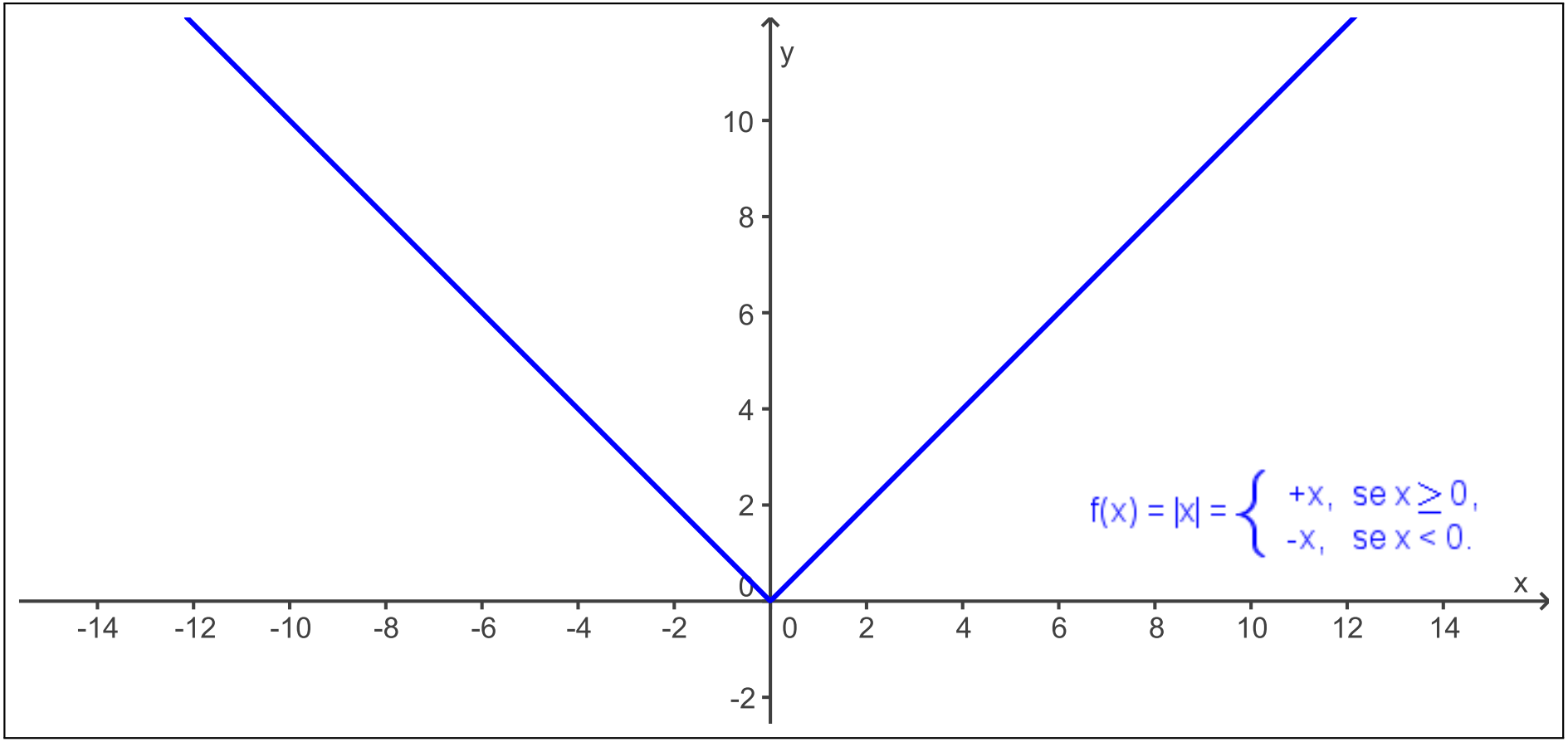
Módulo (ou valor absoluto) de um número real

Observação:

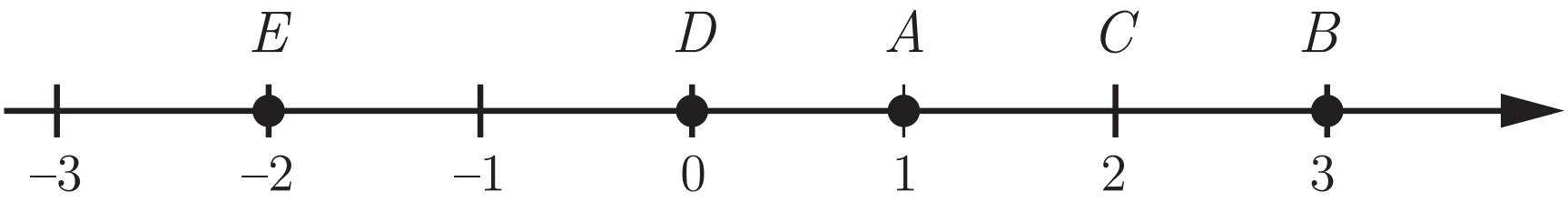
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Gráfico da função modular

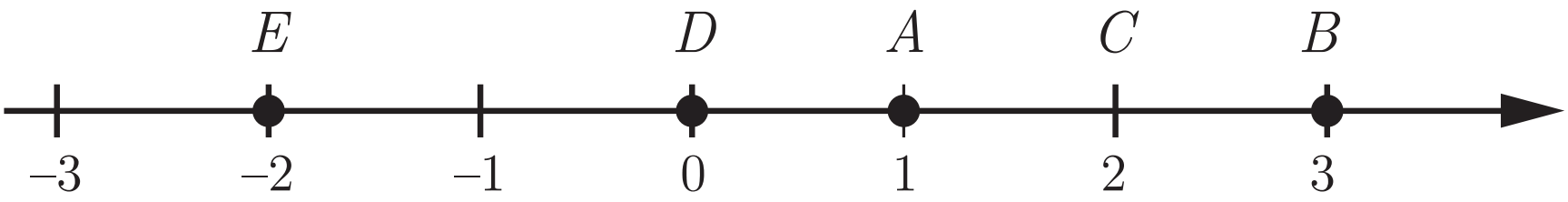


Interpretação geométrica



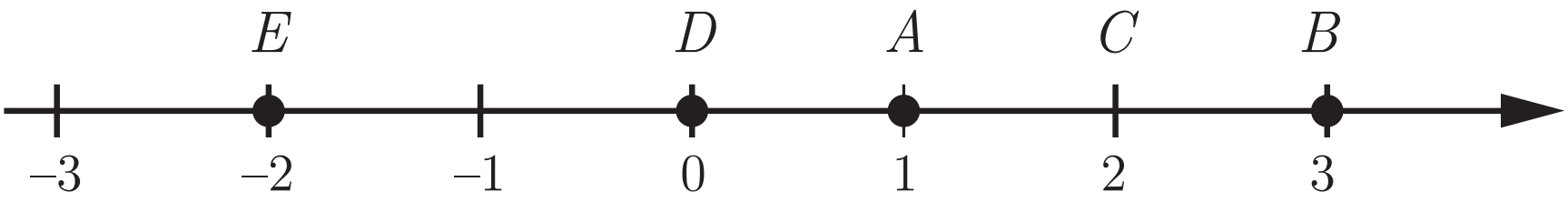
$d(A, B) =$ $\qquad$ $d(B, C) =$ $\qquad$ $d(B, E) =$ $\qquad$ $d(D, E) =$

Interpretação geométrica



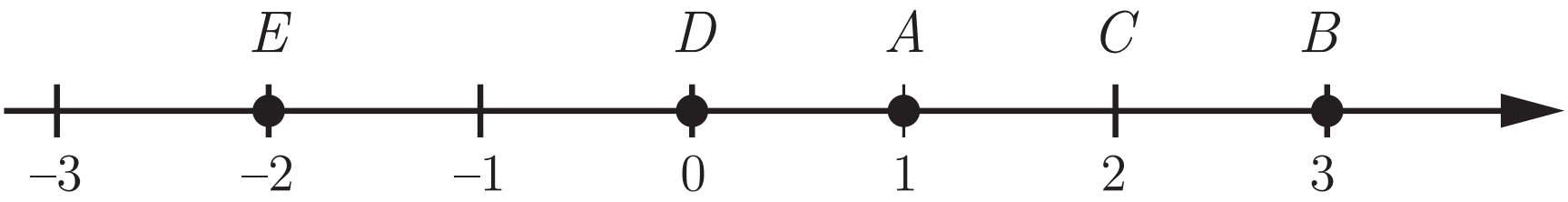
$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) =$ $\quad$ $d(B, E) =$ $\quad$ $d(D, E) =$

Interpretação geométrica



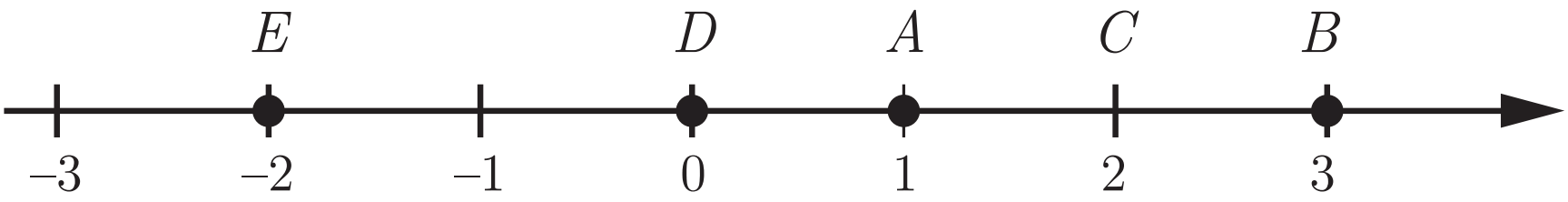
$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) =$ $\quad$ $d(D, E) =$

Interpretação geométrica



$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) =$

Interpretação geométrica



$d(A, B) = +2$ $\quad$ $d(B, C) = +1$ $\quad$ $d(B, E) = +5$ $\quad$ $d(D, E) = +2$

Interpretação geométrica

$d(a, b) =$

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases}$$

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Interpretação geométrica

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a, & \text{se } b \geq a, \\ a-b, & \text{se } b < a \end{cases} = |b-a|.$$

Moral: $|b-a|$ representa a distância entre os números a e b na reta numérica.

Duas propriedades importantes

$$|p| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < p < a$$

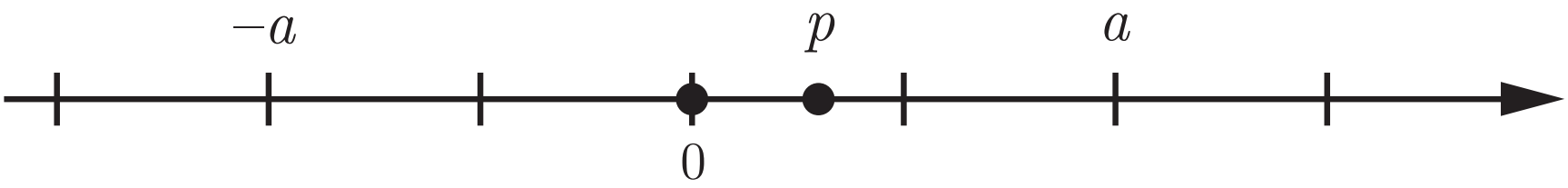
$$|p| > a \quad \Leftrightarrow \quad p < -a \ \text{ ou } \ p > a$$

Duas propriedades importantes

$$|p| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < p < a$$

$$|p| > a \quad \Leftrightarrow \quad p < -a \text{ ou } p > a$$

Para justificar estas propriedades,
lembre-se que $|p| = |p - 0|$ é a distância entre p e 0.



Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \underbrace{3 + 2\,x}_{p} < 2$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < \underbrace{3 + 2\,x}_{p} < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 - 3 < 2\,x < 2 - 3$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \underbrace{3 + 2\,x}_{p} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 - 3 < 2\,x < 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 < 2\,x < -1$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3 + 2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3 + 2\,x}_{p}| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \underbrace{3 + 2\,x}_{p} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 - 3 < 2\,x < 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 < 2\,x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|3+2\,x| < 2$.

$$|\underbrace{3+2\,x}_{p}| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \underbrace{3+2\,x}_{p} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2-3 < 2\,x < 2-3$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 < 2\,x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$S = \left]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x + 5| > 3$.

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x + 5| > 3$.

$$|\underbrace{2\,x + 5}_{p}| > 3$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5| > 3$.

$$|\underbrace{2\,x+5}_{p}| > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} > 3$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5| > 3$.

$$|\underbrace{2\,x+5}_{p}| > 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} > 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2\,x > 3-5$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2\,x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2\,x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -8 \quad \text{ou} \quad 2\,x > -2
\end{aligned}
$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -8 \quad \text{ou} \quad 2x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

Aplicação

Resolva a desigualdade $|2\,x+5| > 3$.

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2\,x+5}_{p}| > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} < -3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\,x+5}_{p} > 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -3-5 \quad \text{ou} \quad 2\,x > 3-5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x < -8 \quad \text{ou} \quad 2\,x > -2 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -4 \quad \text{ou} \quad x > -1
\end{aligned}
$$

$$S =]-\infty, -4[\, \cup \,]-1, +\infty[$$

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Nem sempre vale a igualdade: se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Nem sempre vale a igualdade: se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Nem sempre vale a igualdade: se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} =$

Outras propriedades do módulo

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, com $b \neq 0$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

  Nem sempre vale a igualdade: se $a = 2$ e $b = -2$, então $|a + b| = 0 < 4 = |a| + |b|$.
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

CUIDADO!

Revisão: função quadrática

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática se existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática se existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função quadrática

Definição

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática se existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo de função quadrática:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 - x - 1 \end{array}.$$

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

(1) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

(1) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

(2) O coeficiente c é a ordenada do ponto de interseção da parábola com o eixo y.

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

(1) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

(2) O coeficiente c é a ordenada do ponto de interseção da parábola com o eixo y.

(3) Se o coeficiente a é > 0, a parábola é côncava para cima. Se a é < 0, ela é côncava para baixo.

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ com } a \neq 0$$

(1) O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

(2) O coeficiente c é a ordenada do ponto de interseção da parábola com o eixo y.

(3) Se o coeficiente a é > 0, a parábola é côncava para cima. Se a é < 0, ela é côncava para baixo.

(4) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$, então a parábola não intercepta o eixo x.

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

(5) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$, então a parábola intercepta o eixo x em dois pontos de abscissas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}.$$

A função quadrática

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

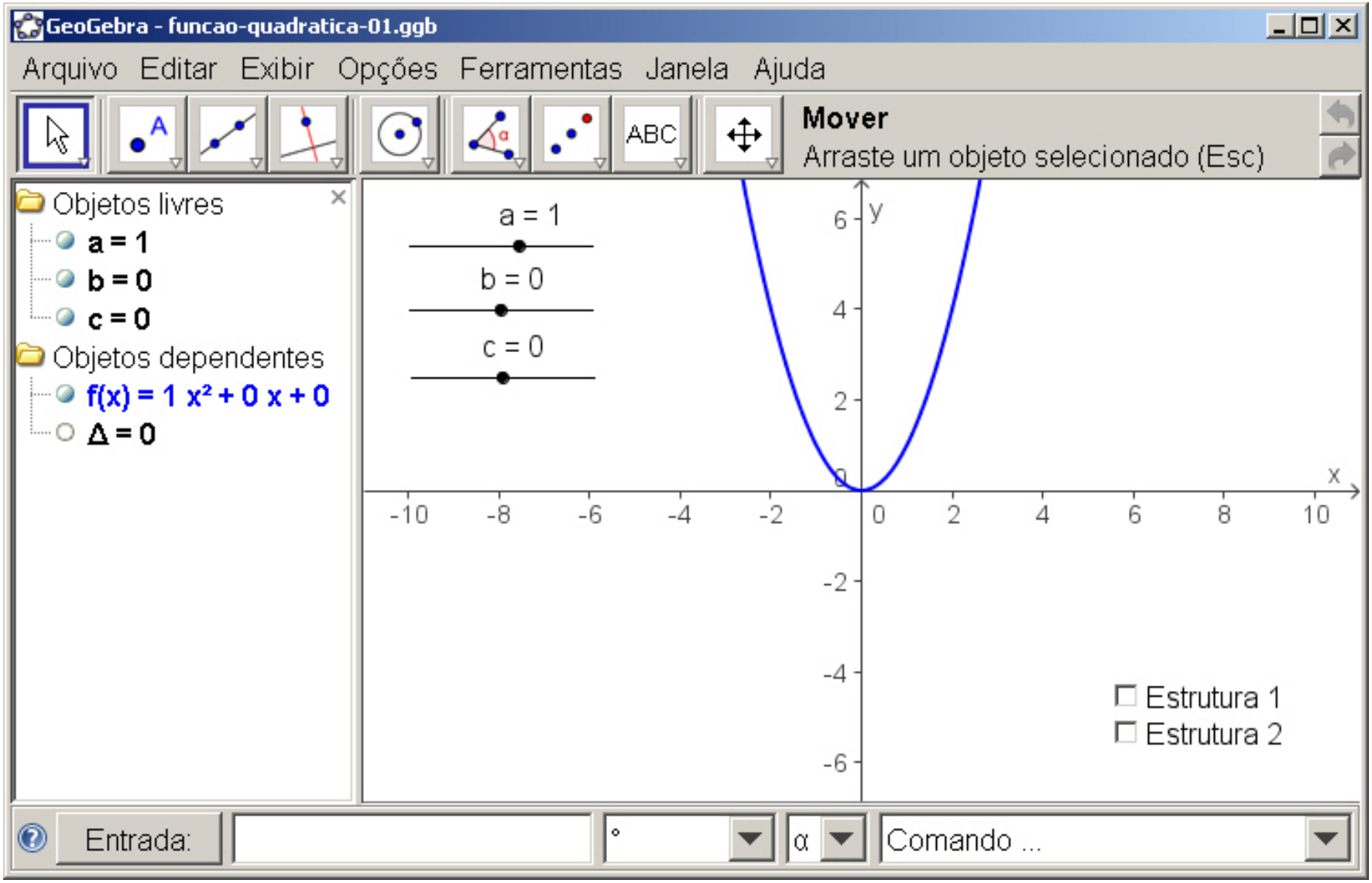
(5) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$, então a parábola intercepta o eixo x em dois pontos de abscissas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}.$$

(6) Se $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$, então a parábola intercepta o eixo x no ponto de abscissa:

$$x_1 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

A função quadrática



Revisão: completamento de quadrados

Completamento de quadrados: exemplo 1

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$x^2 - 8\,x + 15$$

Completamento de quadrados: exemplo 1

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$x^2 - 8\,x + 15 \quad = \quad \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 15$$

Completamento de quadrados: exemplo 1

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 15 &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 15 \\ &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + 16\right) - 16 + 15 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 1

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 8\,x + 15 &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 15 \\ &= \left(x^2 - 2\,(x)\,(4) + 16\right) - 16 + 15 \\ &= \left(x - 4\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 2

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$x^2 + 3\,x + 2$$

Completamento de quadrados: exemplo 2

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$x^2 + 3\,x + 2 \quad = \quad \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 2$$

Completamento de quadrados: exemplo 2

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,x + 2 &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 2 \\ &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 2

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,x + 2 &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \ ?\ \right) - \ ?\ + 2 \\ &= \left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$2\,x^2 - 3\,x + 1$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$2\,x^2 - 3\,x + 1 \quad = \quad 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\,x\right) + \ 1$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} 2\,x^2 - 3\,x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\,x\right) + \ 1 \\ &= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \ ? \ \right) - \ ? \ + 1 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned}
2\,x^2 - 3\,x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\,x\right) + 1 \\
&= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + ?\right) - ? + 1 \\
&= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1
\end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 3

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned}
2\,x^2 - 3\,x + 1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\,x\right) + 1 \\
&= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + ?\right) - ? + 1 \\
&= 2\left(x^2 - 2\,(x)\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1 \\
&= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$-x^2 + 2\,x - 1$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$-x^2 + 2\,x - 1 \quad = \quad -\left(x^2 - 2\,(x)\right) - 1$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 2\,x - 1 &= -\left(x^2 - 2\,(x)\right) - 1 \\ &= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ ?\ \right) + \ ?\ - 1 \end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned}
-x^2 + 2\,x - 1 &= -\left(x^2 - 2\,(x)\right) - 1 \\
&= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ ?\ \right) + \ ?\ - 1 \\
&= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ 1\ \right) + \ 1\ - 1
\end{aligned}$$

Completamento de quadrados: exemplo 4

Lembre-se que:

$$(u+v)^2 = u^2 + 2\,(u)(v) + v^2 \quad \text{e} \quad (u-v)^2 = u^2 - 2\,(u)(v) + v^2.$$

$$\begin{aligned}
-x^2 + 2\,x - 1 &= -\left(x^2 - 2\,(x)\right) - 1 \\
&= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ ?\ \right) + \ ?\ - 1 \\
&= -\left(x^2 - 2\,(x)\,(1) + \ 1\ \right) + \ 1\ - 1 \\
&= -\left(x - 1\right)^2
\end{aligned}$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$a\,x^2 + b\,x + c$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$a\,x^2 + b\,x + c \quad = \quad a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad \right) - \; ? \; + c$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ? \ + c
\end{aligned}
$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a} + c
\end{aligned}
$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a} + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4\,a} - c\right)
\end{aligned}
$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a} + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4\,a} - c\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a}\right)
\end{aligned}
$$

Completamento de quadrados: caso geral

Hipótese: $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \quad ? \quad\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \ ? \ + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a} + c \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4\,a} - c\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\,(x)\left(\frac{b}{2\,a}\right) + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \left(\frac{b^2 - 4\,ac}{4\,a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4\,a}\right)
\end{aligned}
$$

Revisão: funções trigonométricas

As funções trigonométricas

As funções trigonométricas

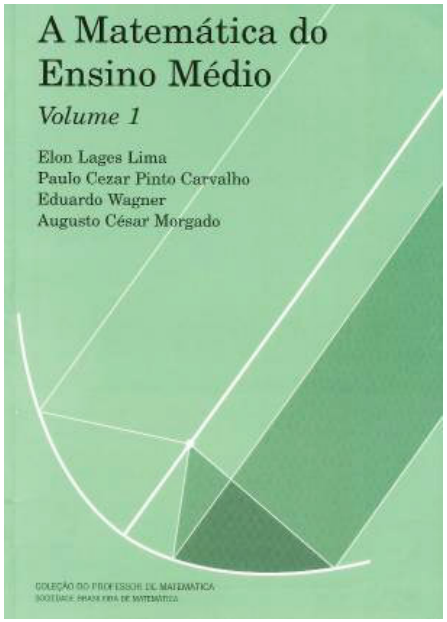
O que faremos aqui é uma revisão muito rápida!

As funções trigonométricas

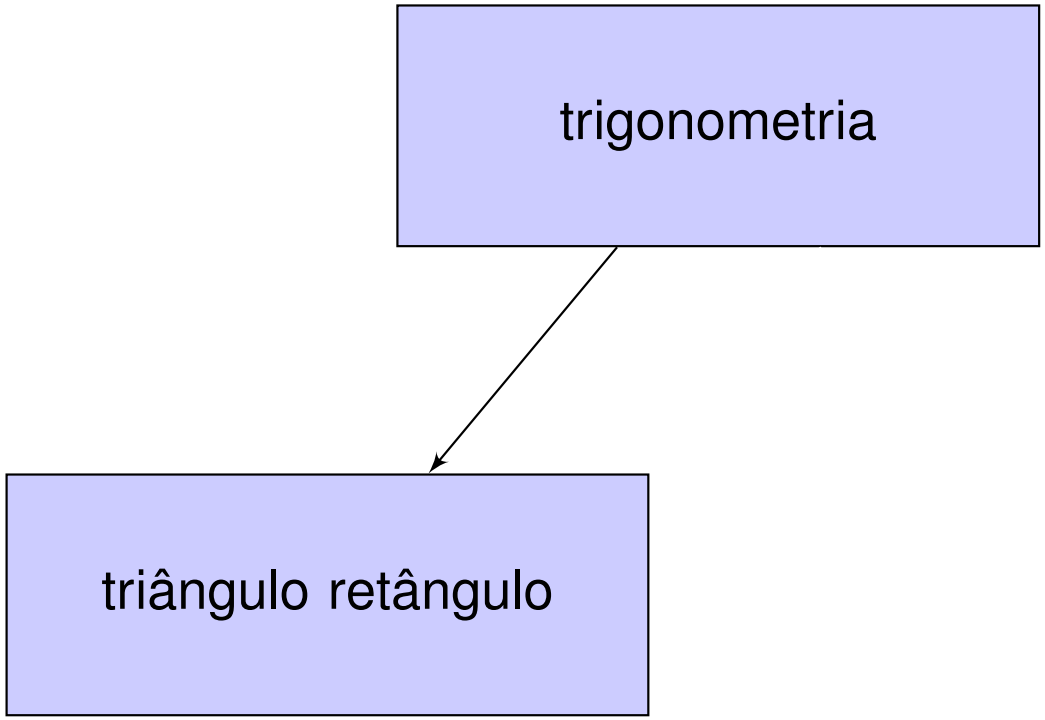
O que faremos aqui é uma revisão muito rápida!

Para os interessados em definições mais precisas e justificativas, recomendamos o livro:

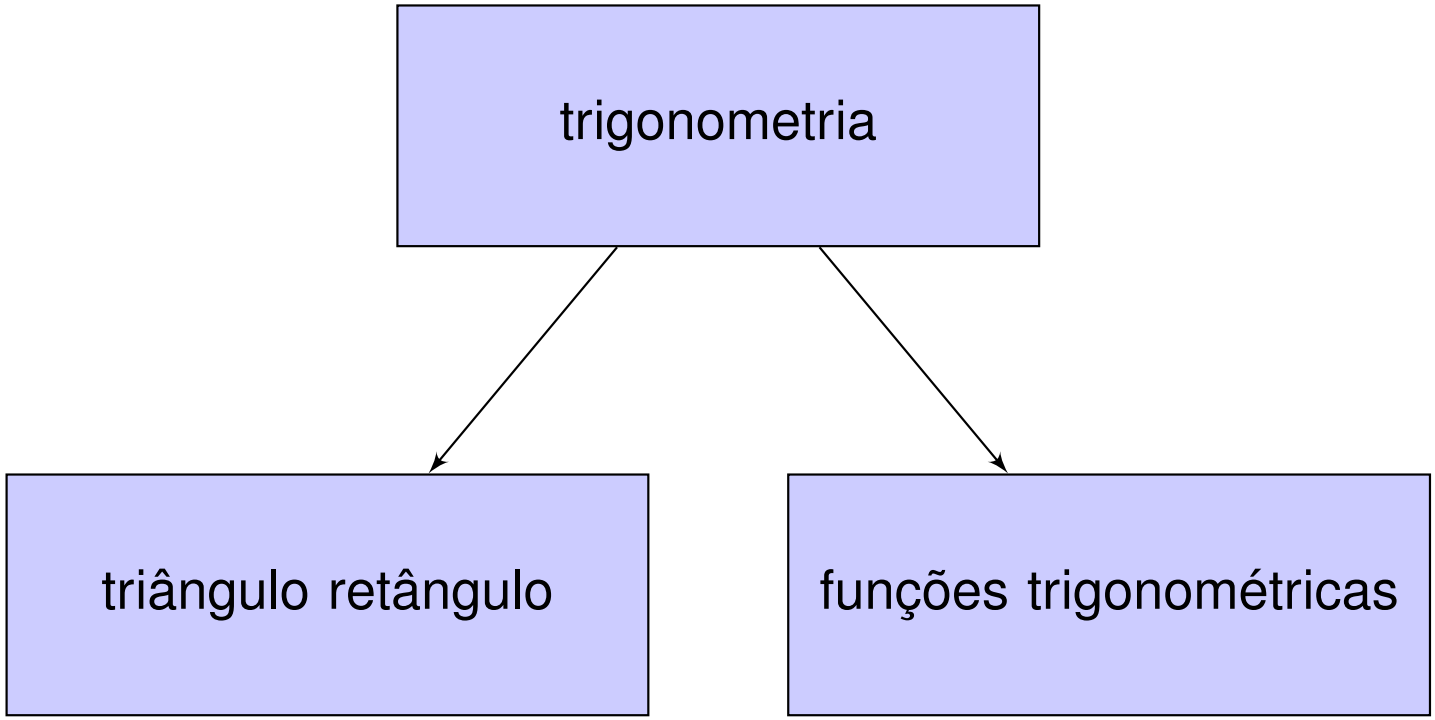
Elon Lages Lima; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Wagner; Augusto César Morgado. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.



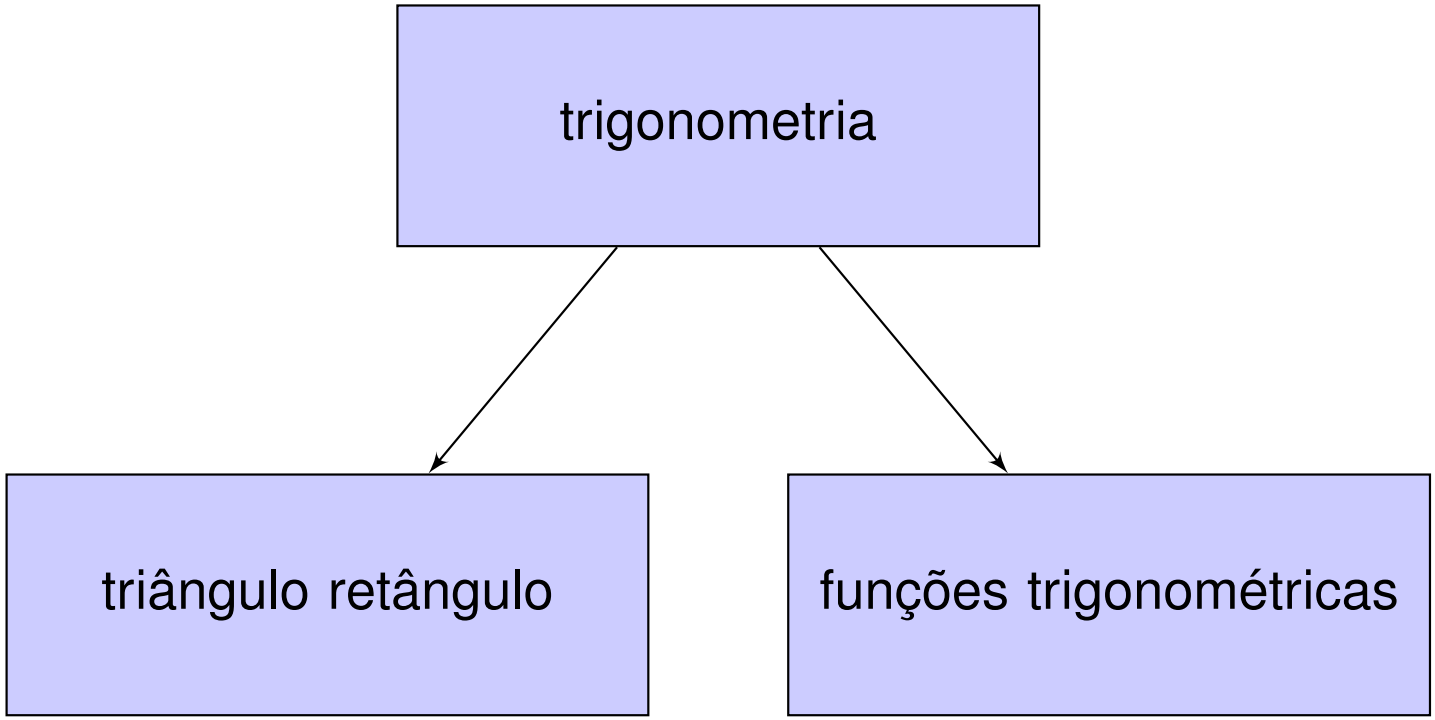
trigonometria


trigonometria
triângulo retângulo

Trigonometria



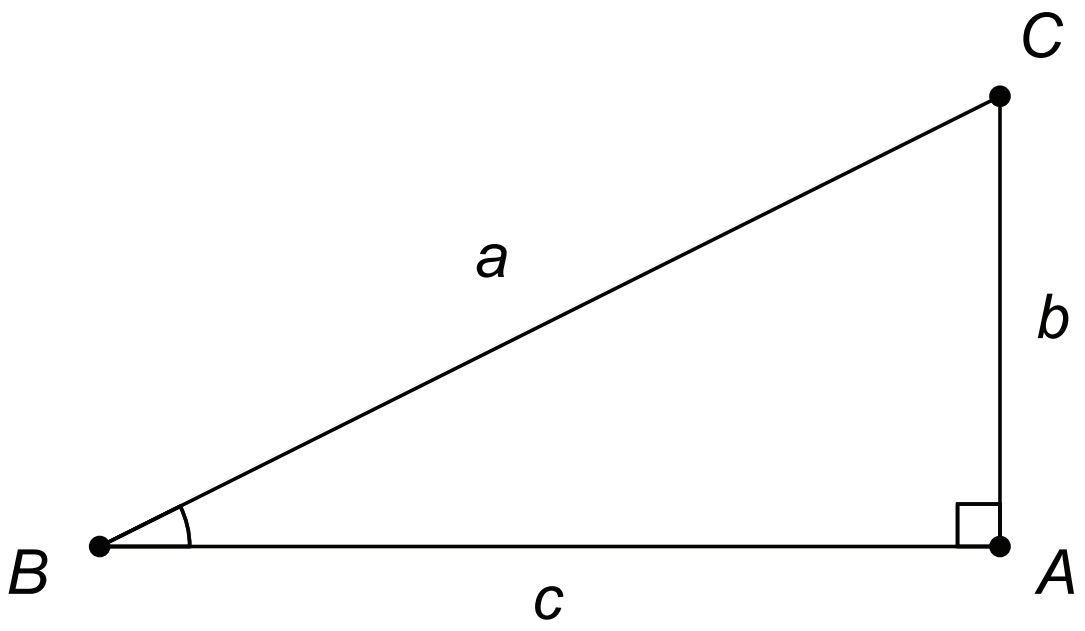
Trigonometria



(seno de um ângulo)

(seno de um número real)

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

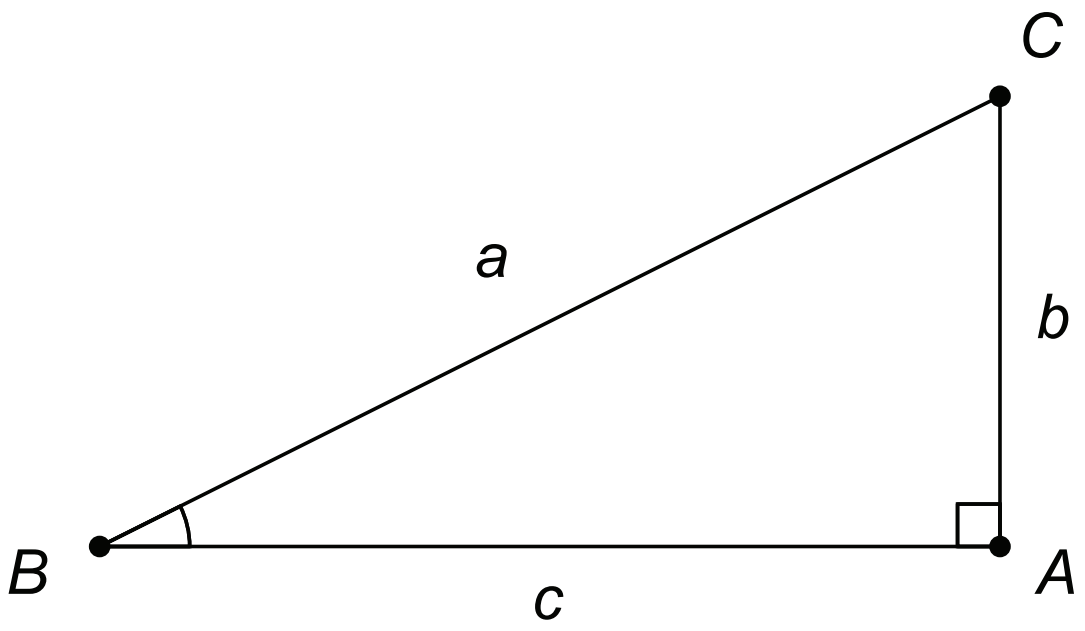


$\text{sen}(\widehat{B}) =$

$\cos(\widehat{B}) =$

$\text{tg}(\widehat{B}) =$

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

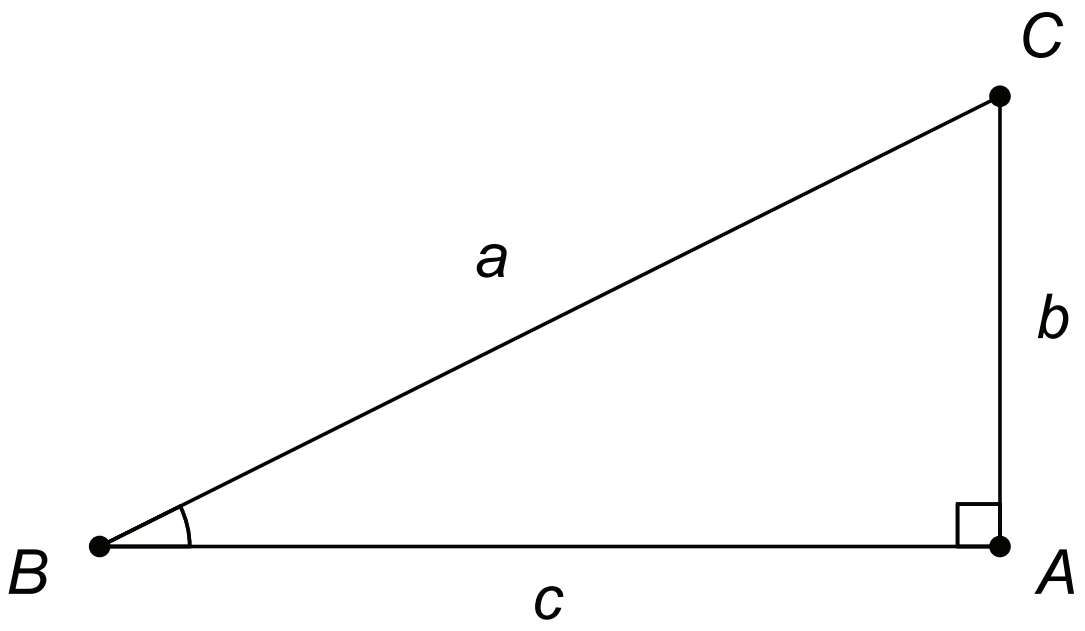


$$\text{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\widehat{B}) =$$

$$\text{tg}(\widehat{B}) =$$

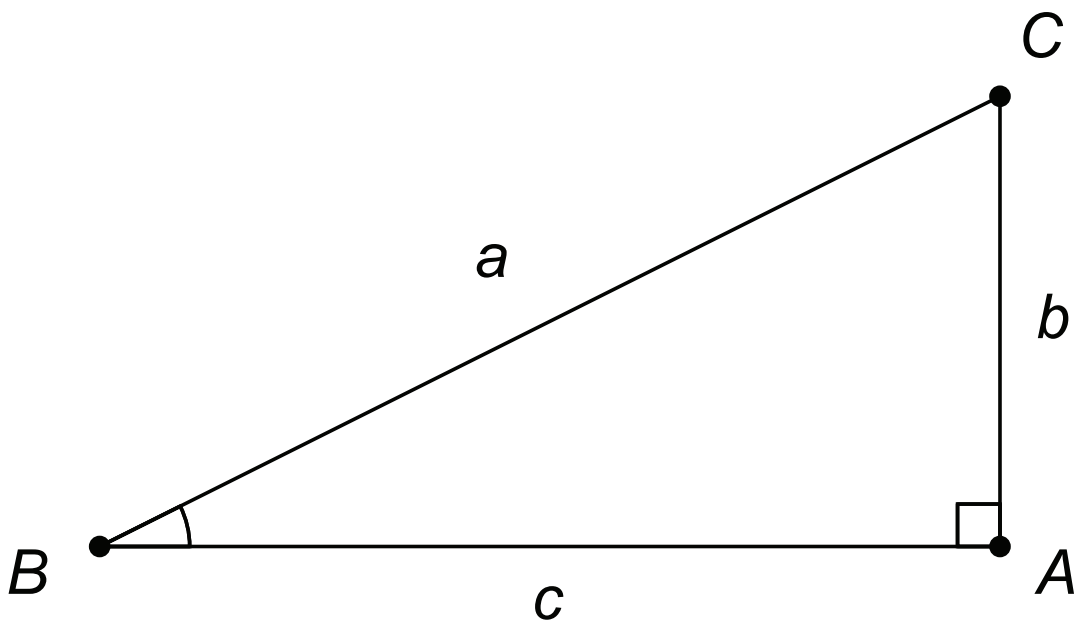
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) =$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) =$$

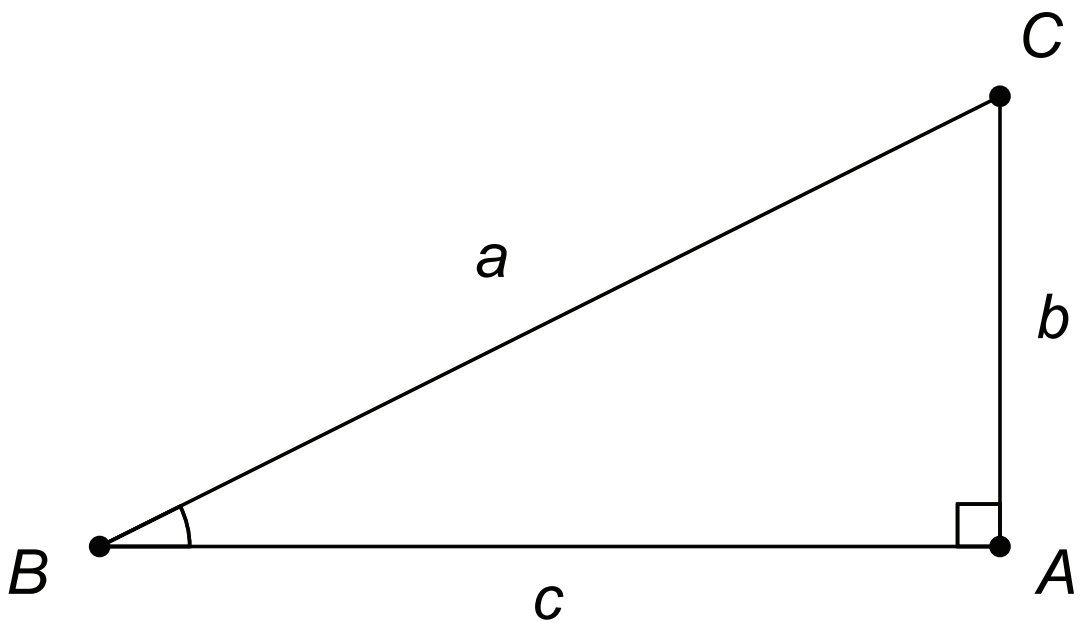
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) =$$

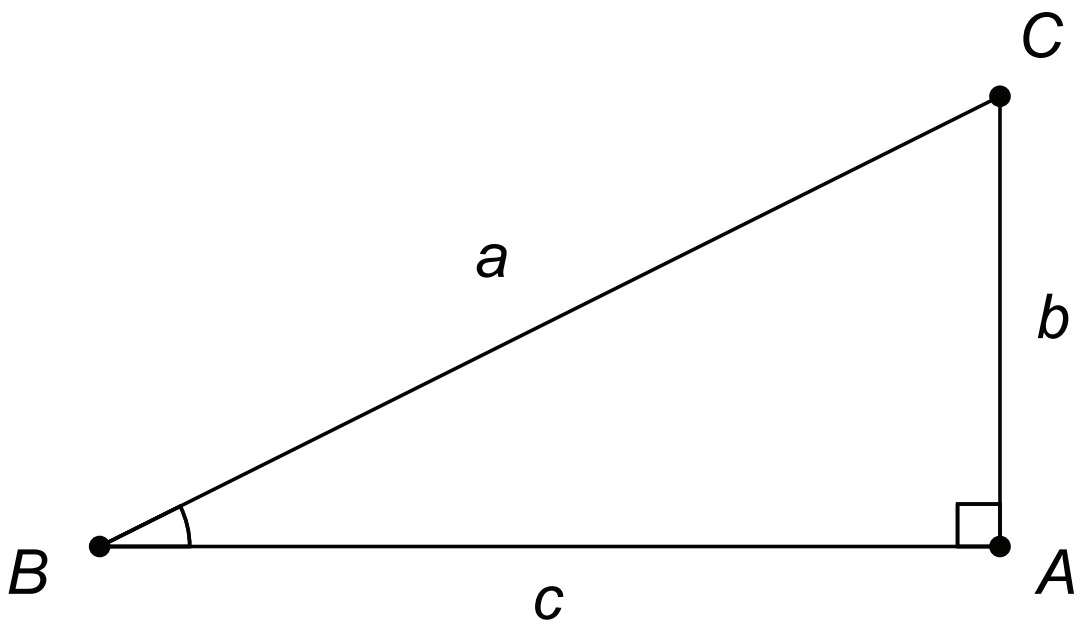
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) =$$

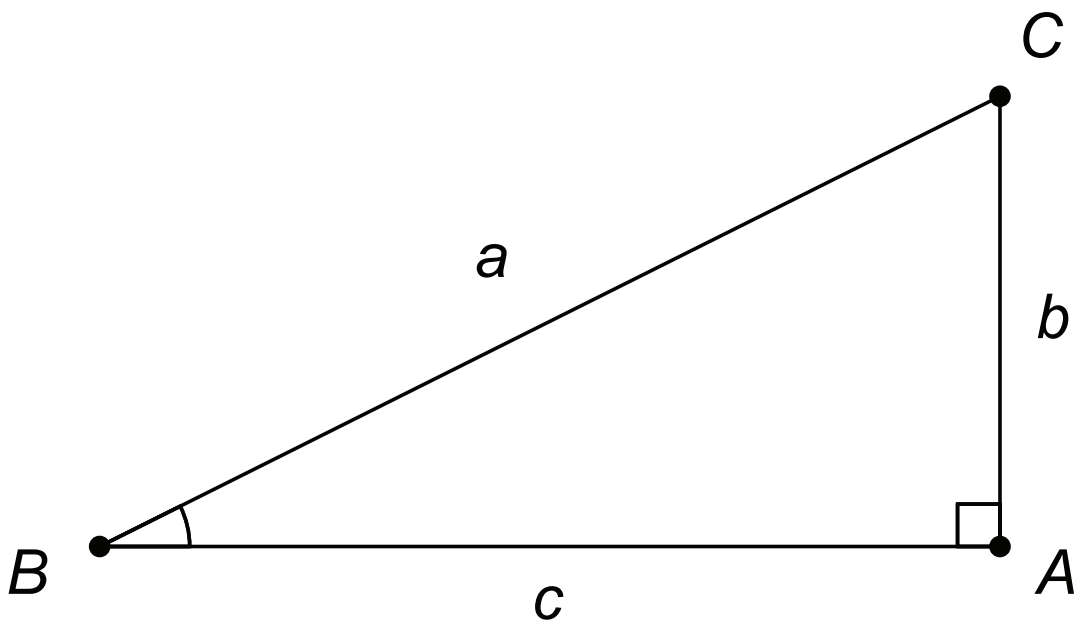
Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

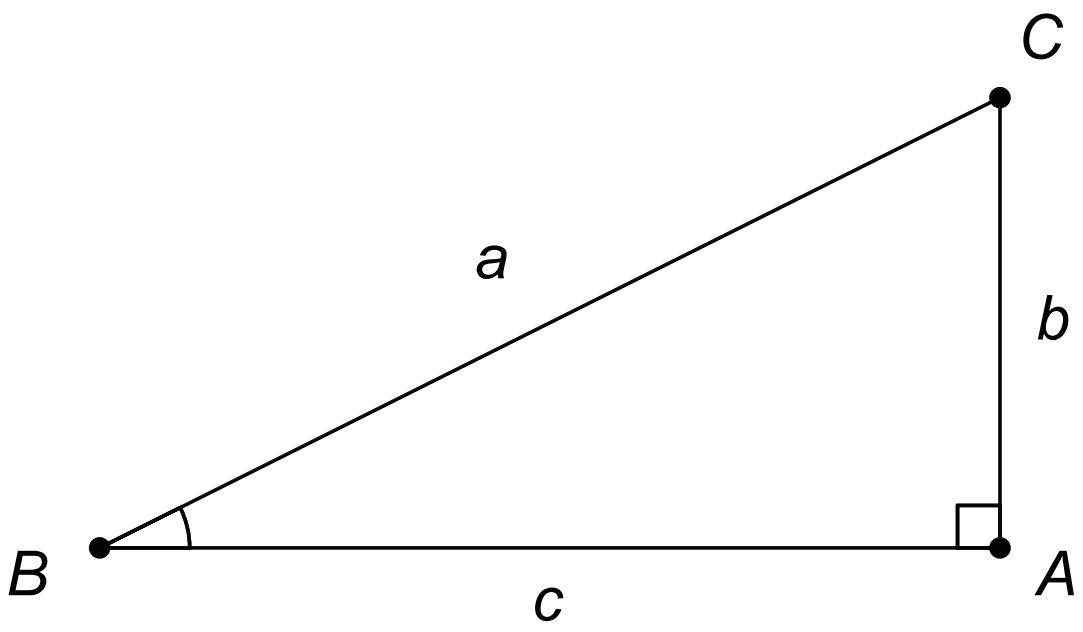


$$\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \qquad \cos(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{B}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}.$$

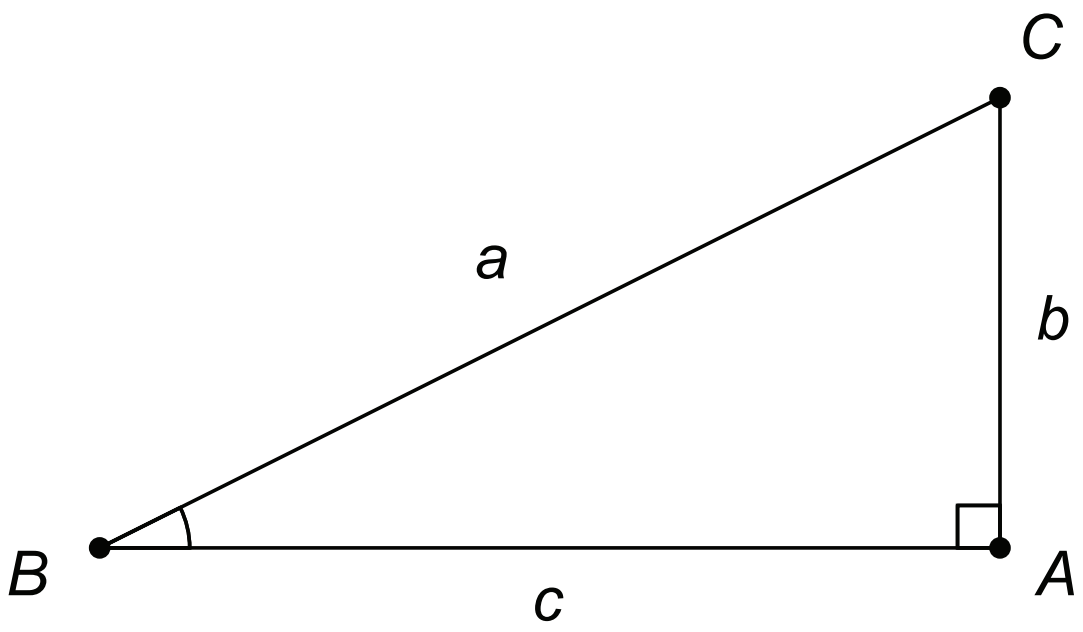
Identidade trigonométrica fundamental

Identidade trigonométrica fundamental



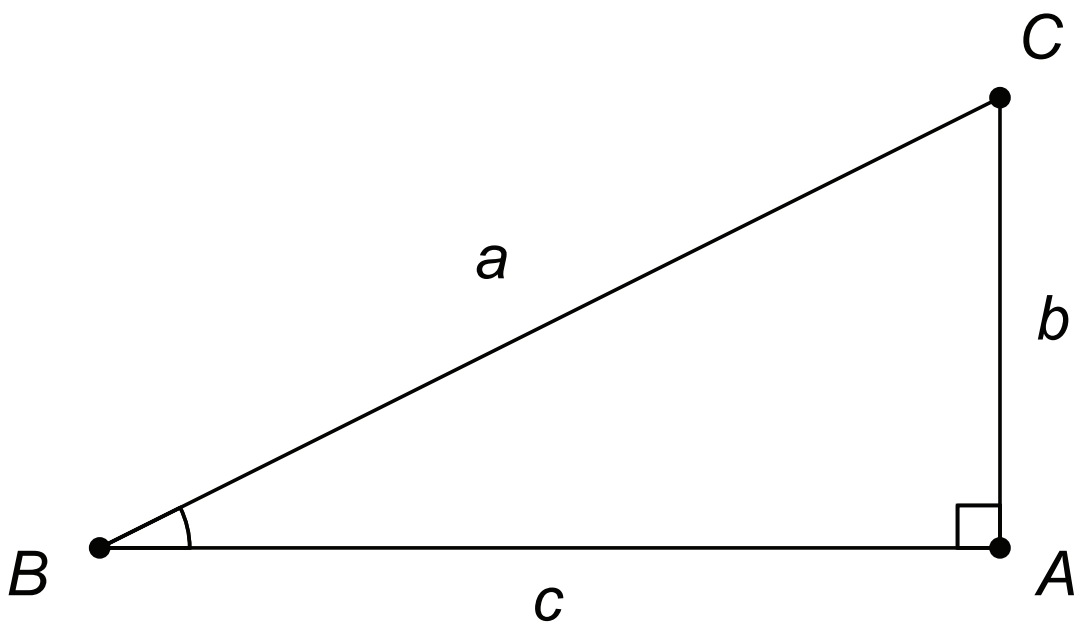
$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\text{sen}(\widehat{B})\right)^2 =$$

Identidade trigonométrica fundamental



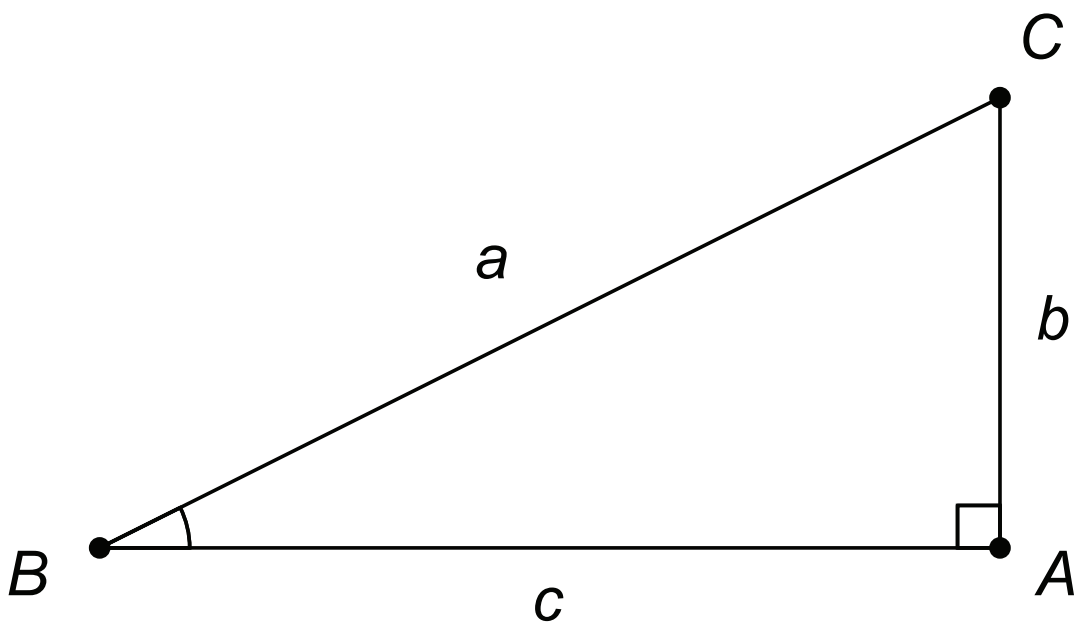
$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\text{sen}(\widehat{B})\right)^2 = 1$$

Identidade trigonométrica fundamental



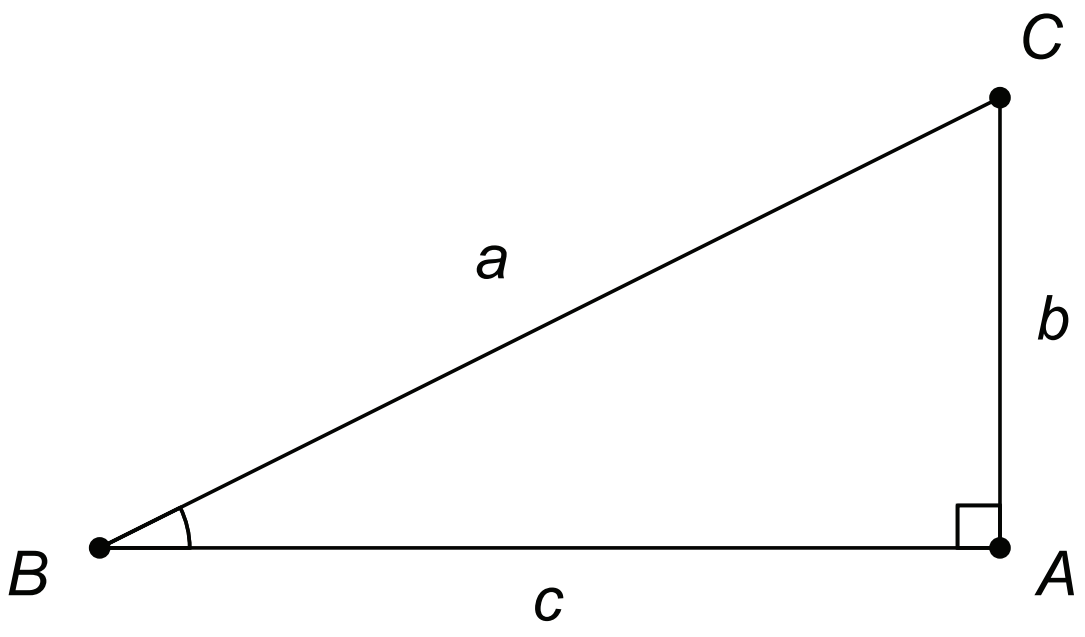
$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \qquad 1$$

Identidade trigonométrica fundamental



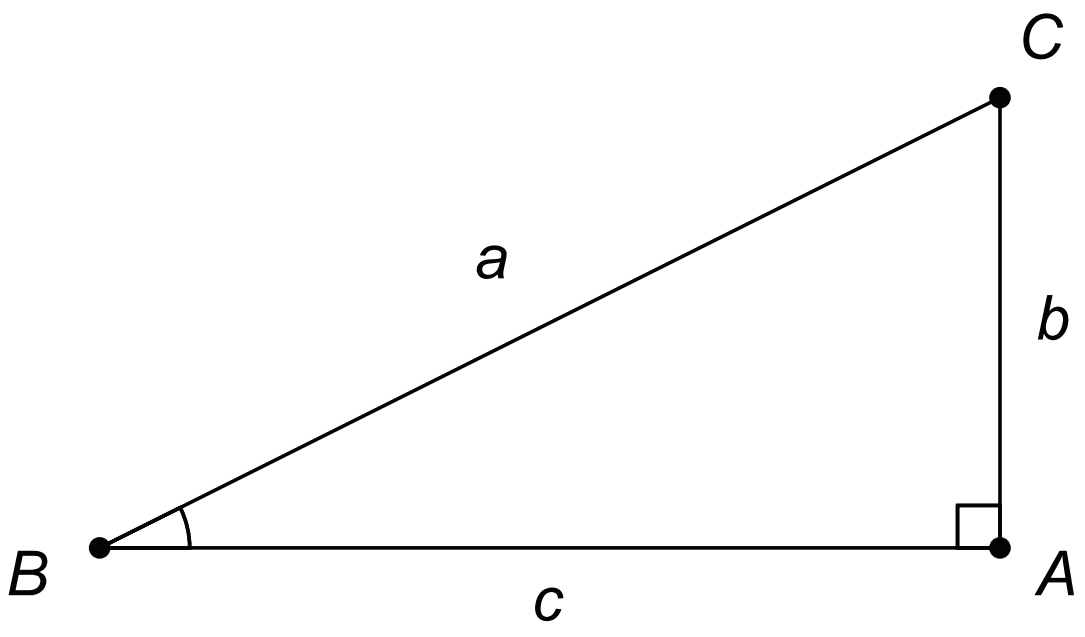
$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\text{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \qquad 1$$

Identidade trigonométrica fundamental



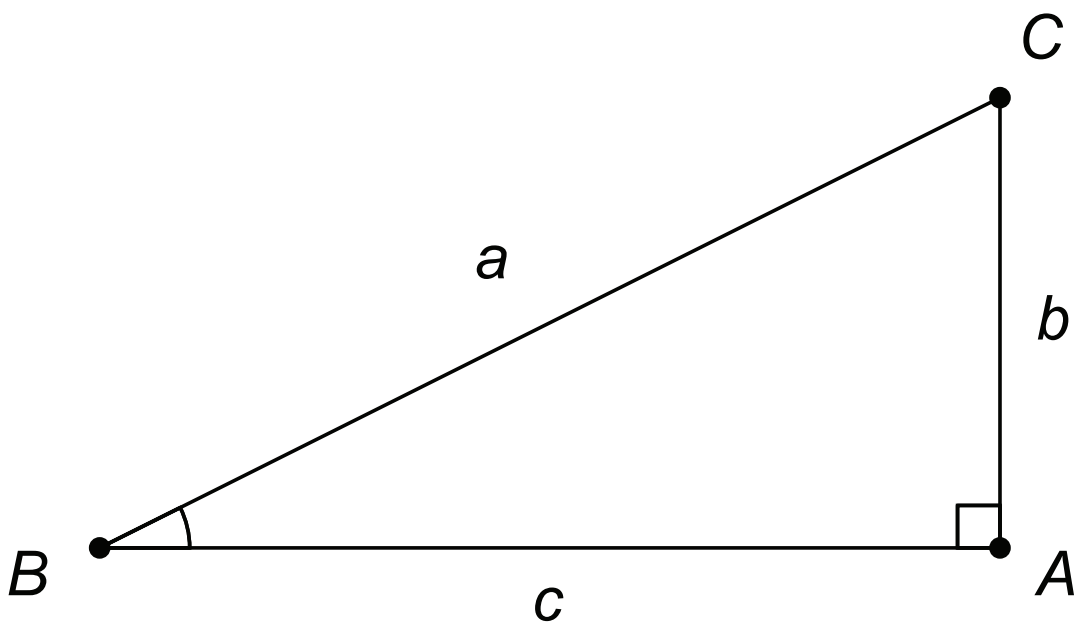
$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Identidade trigonométrica fundamental



$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \overset{(*)}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Identidade trigonométrica fundamental



$$\left(\cos(\widehat{B})\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \overset{(*)}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

onde, em $(*)$, usamos o Teorema de Pitágoras.

Notações

$\cos^2(\widehat{B})$ significa e $\operatorname{sen}^2(\widehat{B})$ significa

Notações

$\cos^2(\widehat{B})$ significa $\left(\cos(\widehat{B})\right)^2$ e $\operatorname{sen}^2(\widehat{B})$ significa

Notações

$$\cos^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\cos(\widehat{B})\right)^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2.$$

Notações

$$\cos^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\cos(\widehat{B})\right)^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2.$$

A identidade trigonométrica fundamental fica então escrita assim:

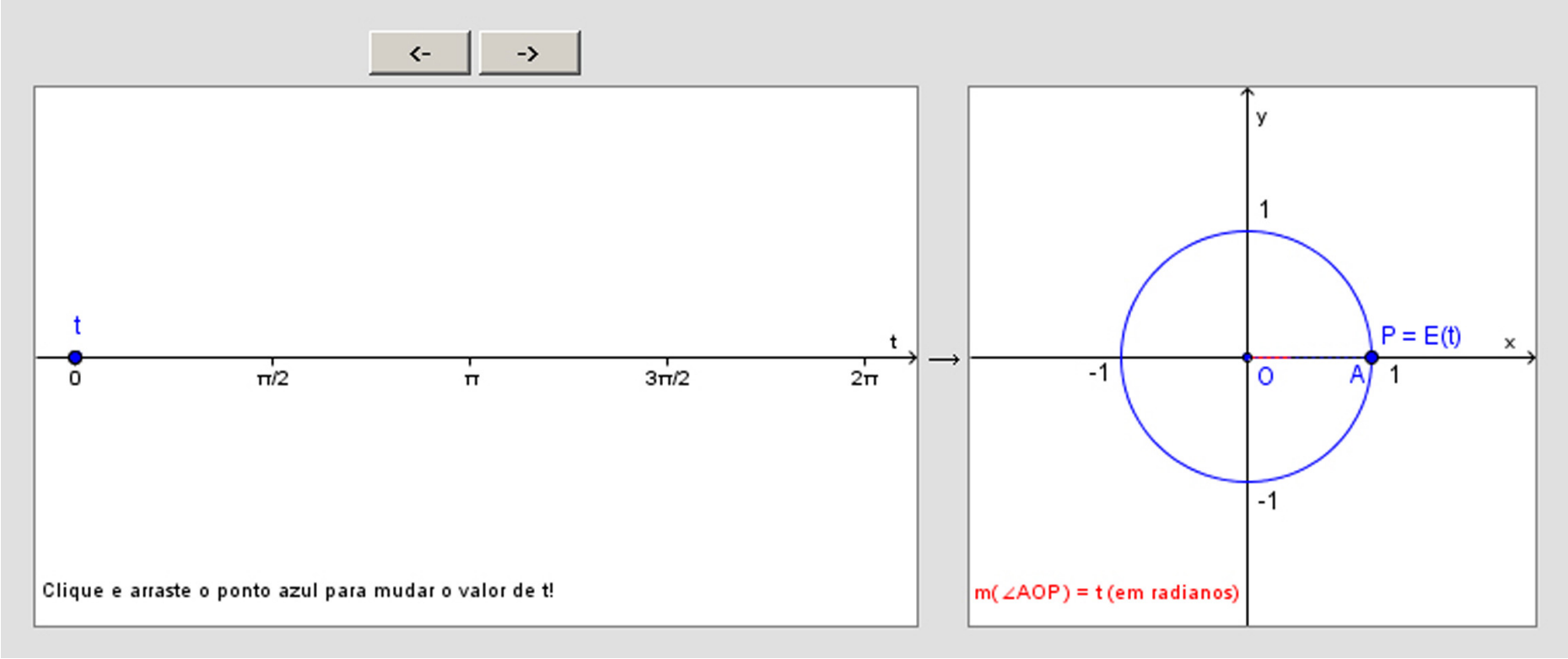
Notações

$$\cos^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\cos(\widehat{B})\right)^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) \text{ significa } \left(\operatorname{sen}(\widehat{B})\right)^2.$$

A identidade trigonométrica fundamental fica então escrita assim:

$$\cos^2(\widehat{B}) + \operatorname{sen}^2(\widehat{B}) = 1.$$

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos



http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-euler-br.html

ou

http://www.cdme.im-uff.mat.br/ftr/ftr-html/ftr-euler-br.html

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em $\mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0)$ em C.

A função de Euler e a medida de ângulos em radianos

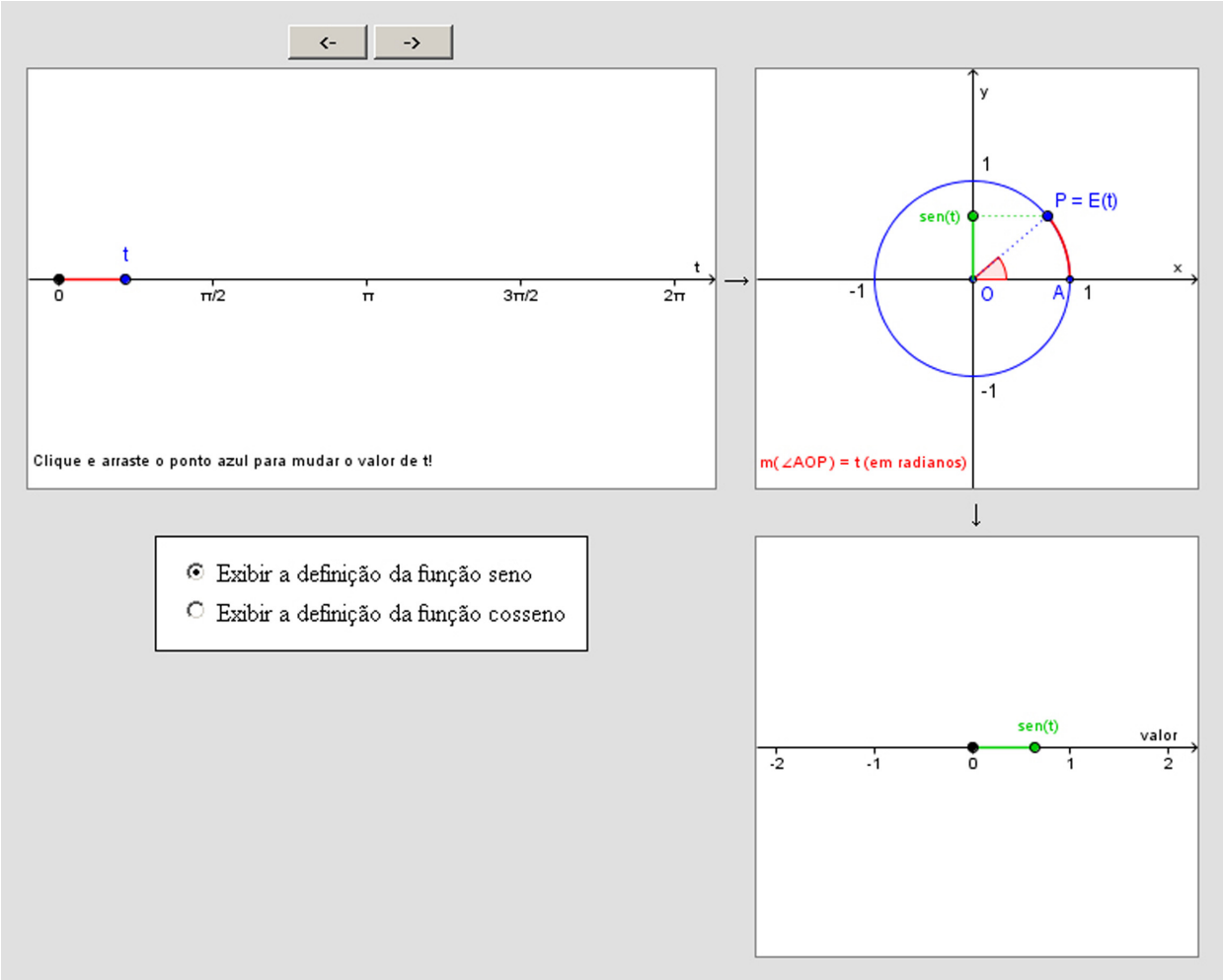
Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ de C do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E\colon \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em $\mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0)$ em C.

Escrevendo $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e, para cada t em $\mathbb{R}$, $P = E(t)$, dizemos neste caso que o ângulo AOP mede t radianos.

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)



http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html

ou

http://www.cdme.im-uff.mat.br/ftr/ftr-html/ftr-def-br.html

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Seno e cosseno de números reais (caso: radianos)

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t em $\mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Noutras palavras, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária. Note que, aqui, o número real t dá a medida do ângulo AOP em radianos!.

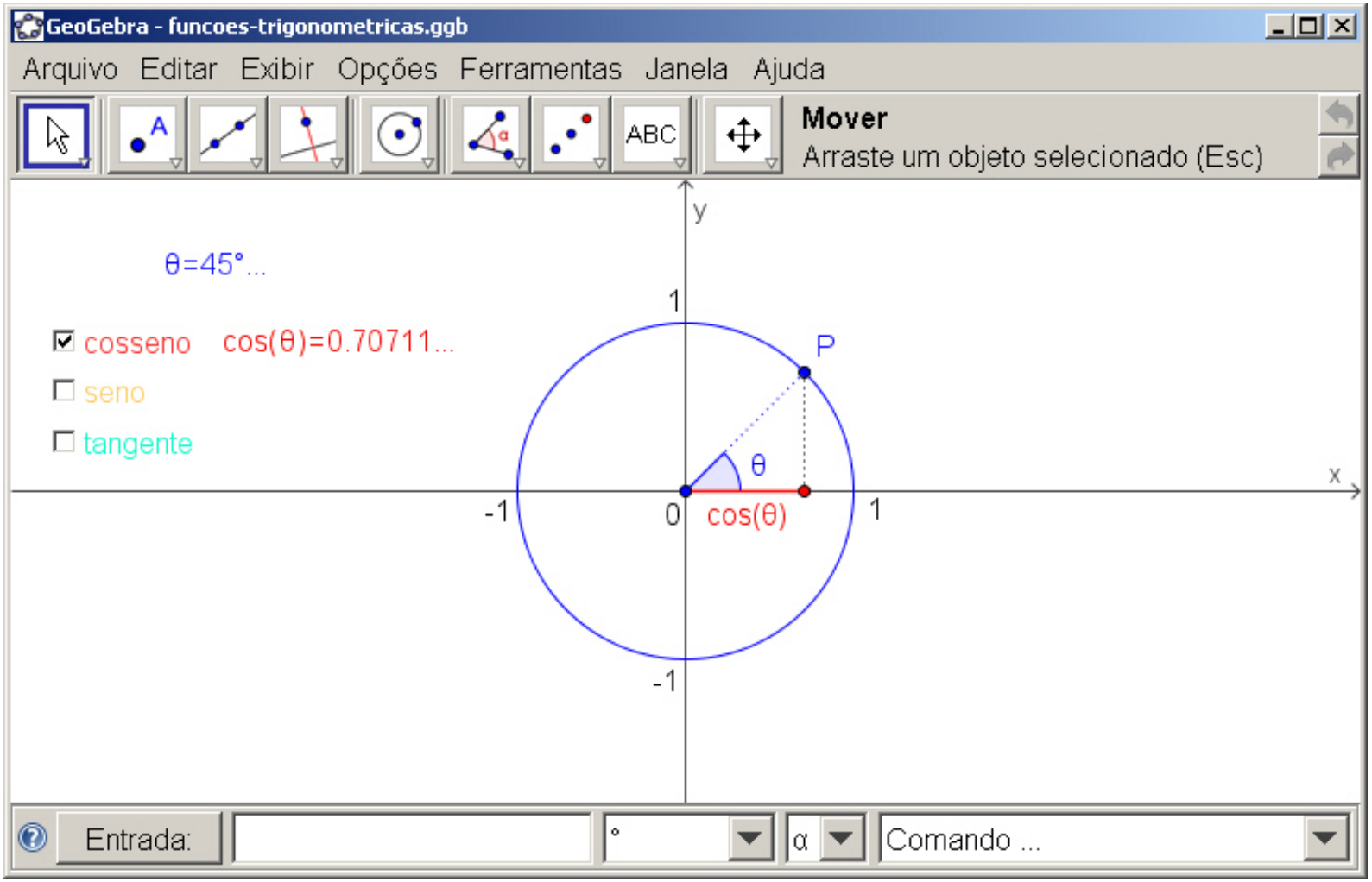
Revisão: função cosseno

A função cosseno

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$

A função cosseno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$



A função cosseno

$$\cos(0) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\cos(-x) =$$

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Cosseno é uma função periódica: $\cos(x+2\pi) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

A função cosseno

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

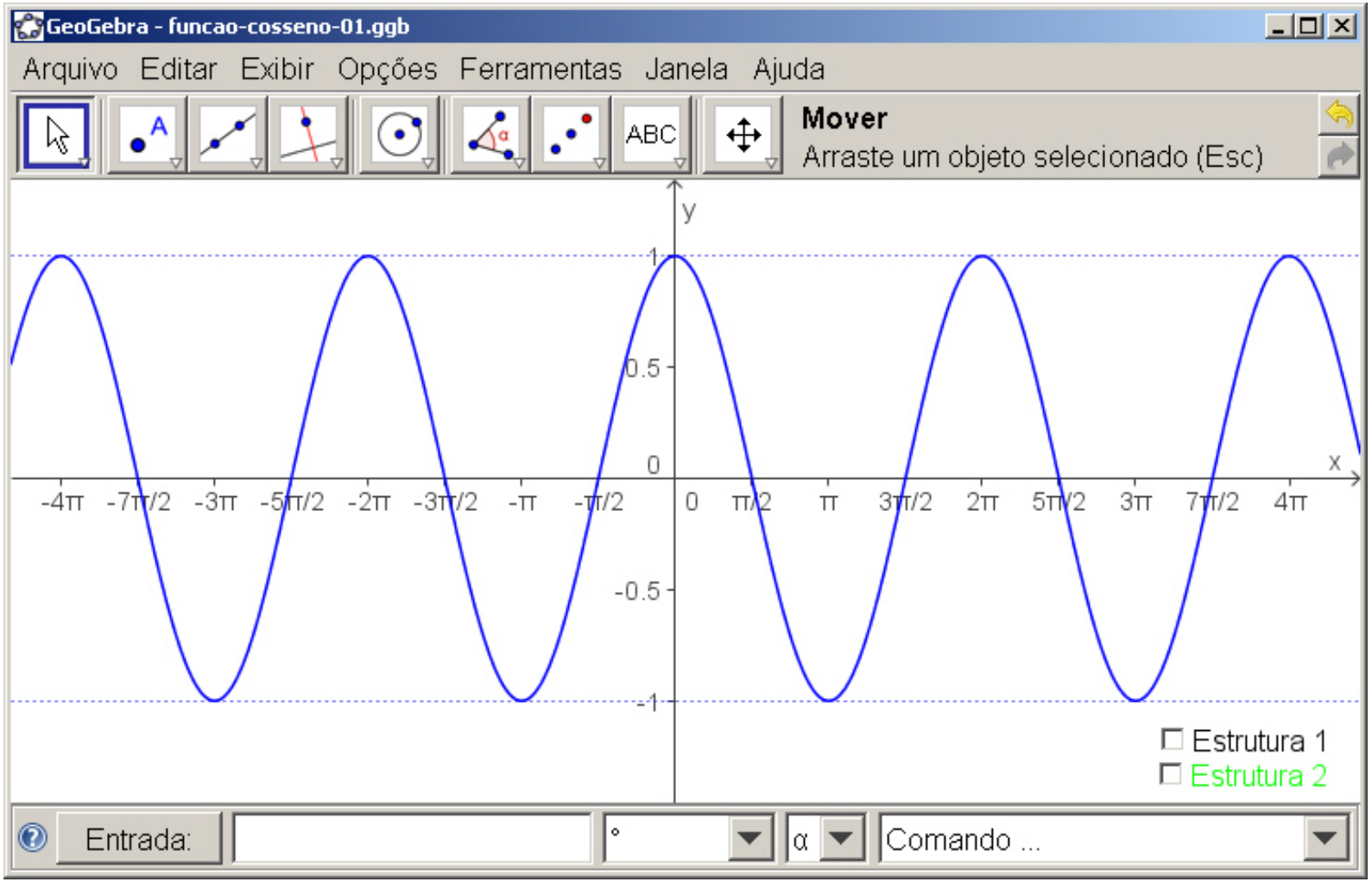
$$\cos(90) = \cos(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -0.44807361612917\ldots.$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cosseno é uma função periódica: $\cos(x+2\pi) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

A função cosseno



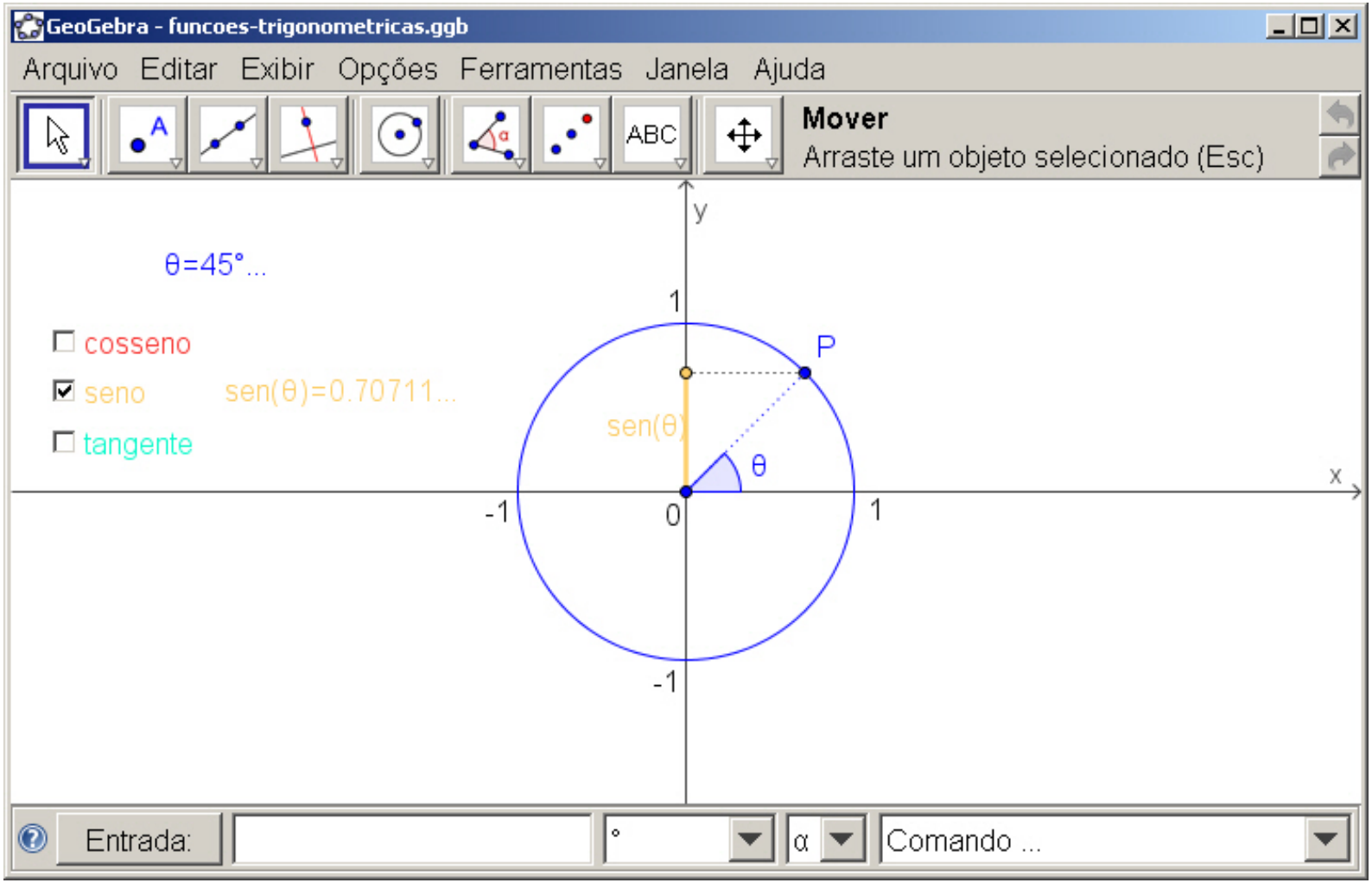
Revisão: função seno

A função seno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

A função seno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$



A função seno

$$\text{sen}(0) =$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) =$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

A função seno

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \text{sen}(\pi) = 0,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\text{sen}(90) =$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) =$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\operatorname{sen}(-x) =$$

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$$

Seno é uma função periódica: $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

A função seno

$$\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

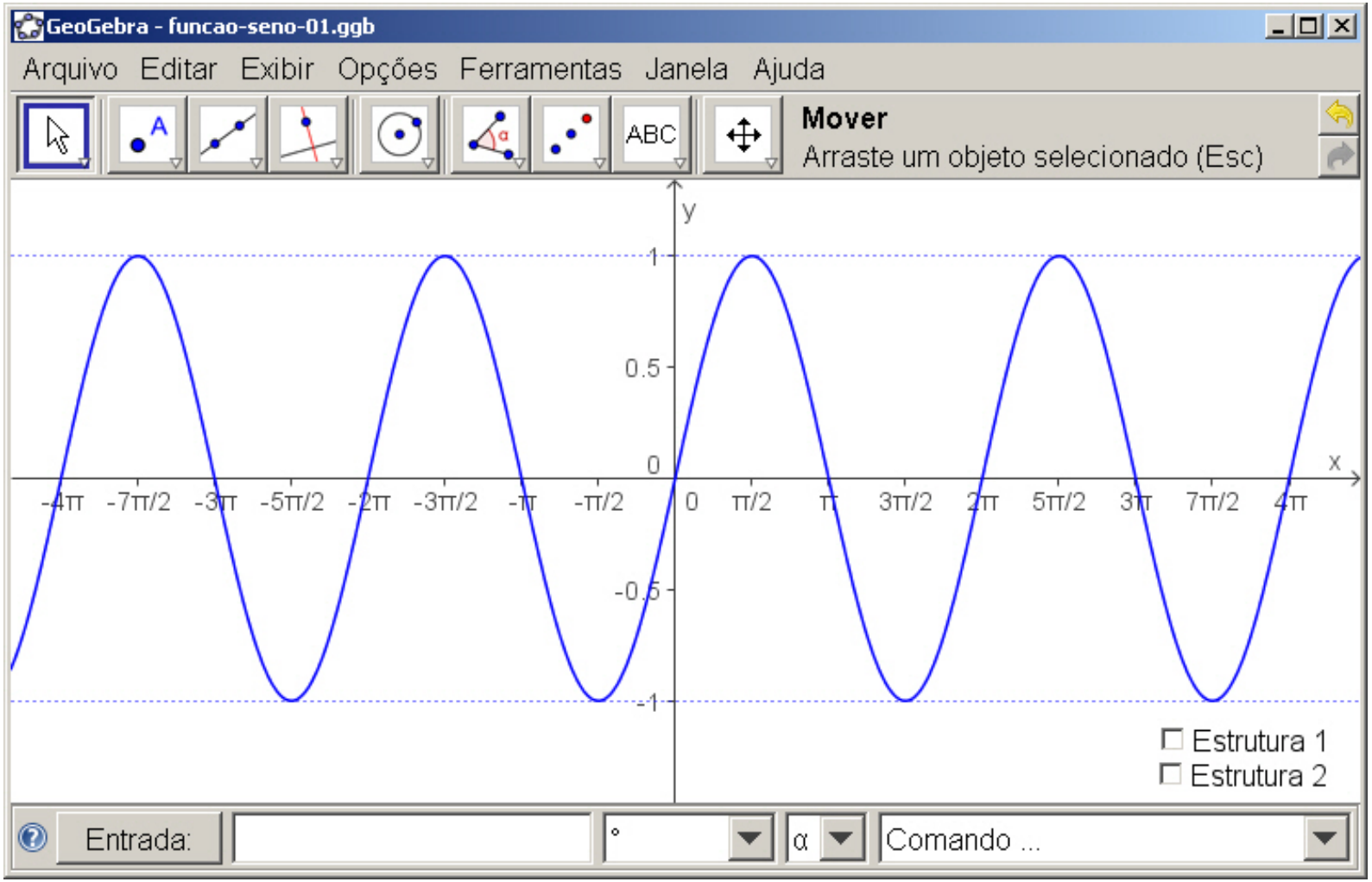
$$\operatorname{sen}(90) = \operatorname{sen}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = +0.89399666360055\ldots.$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seno é uma função periódica: $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

A função seno



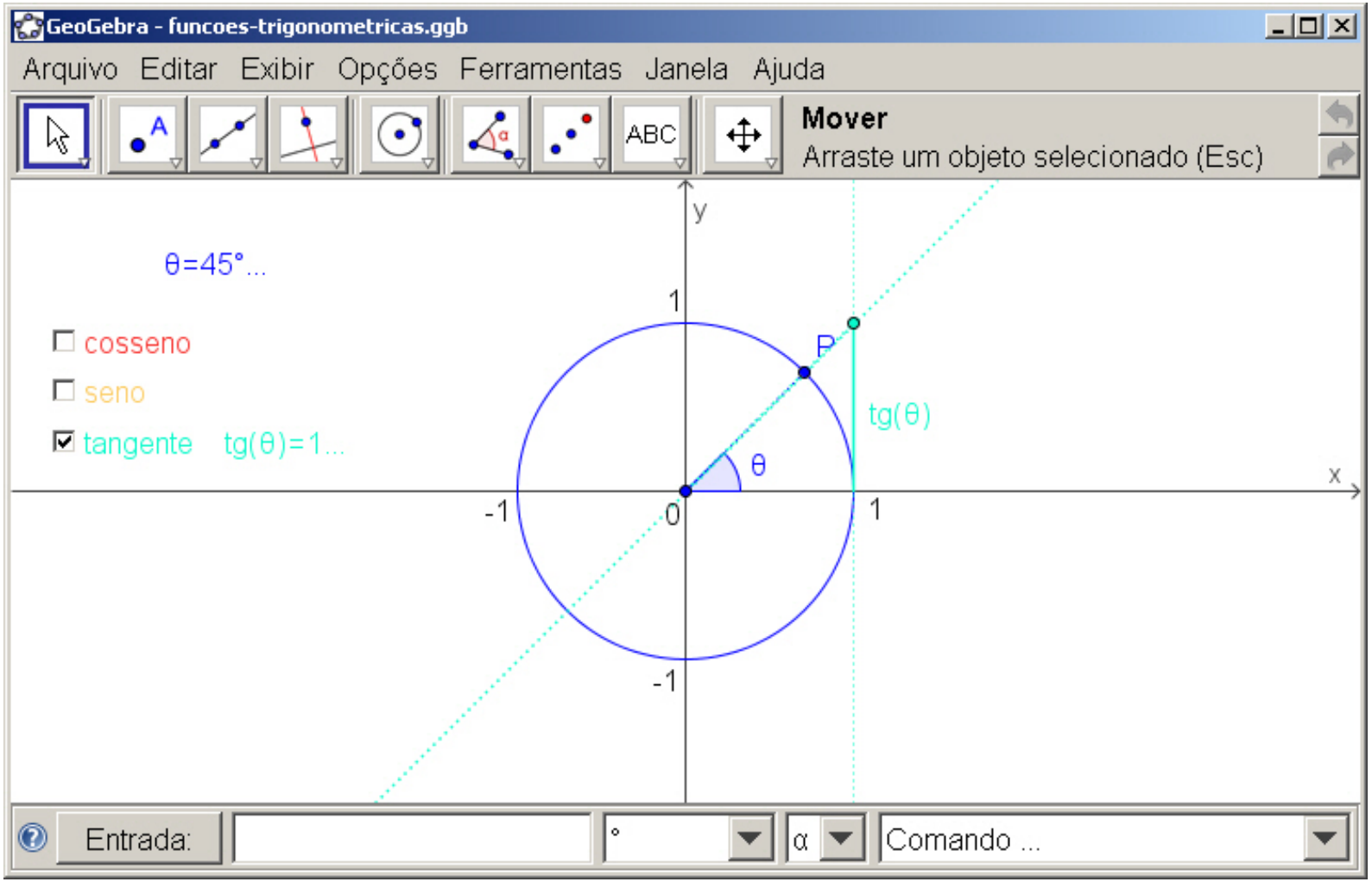
Revisão: função tangente

A função tangente

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \operatorname{tg}(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x) \end{array}$$

A função tangente

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \text{tg}(x) = \text{sen}(x)/\cos(x) \end{array}$$



A função tangente

$$\text{tg}(0) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe}$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\text{tg}(90) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\text{tg}(90) = \text{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\text{tg}(90) = \text{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\text{tg}(a+b) =$$

A função tangente

$$\mathrm{tg}(0) = 0, \quad \mathrm{tg}(\pi) = 0,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\mathrm{tg}(90) = \mathrm{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = (\mathrm{tg}(a) + \mathrm{tg}(b))/(1 - \mathrm{tg}(a) \cdot \mathrm{tg}(b)).$$

A função tangente

$$\mathrm{tg}(0) = 0, \quad \mathrm{tg}(\pi) = 0,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\mathrm{tg}(90) = \mathrm{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = (\mathrm{tg}(a) + \mathrm{tg}(b))/(1 - \mathrm{tg}(a) \cdot \mathrm{tg}(b)).$$

$$\mathrm{tg}(-x) =$$

A função tangente

$$\text{tg}(0) = 0, \quad \text{tg}(\pi) = 0,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\text{tg}(90) = \text{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\text{tg}(a+b) = (\text{tg}(a) + \text{tg}(b))/(1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)).$$

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$$

Tangente é uma função periódica: $\text{tg}(x+\pi) = \text{tg}(x), \forall x \in D.$

A função tangente

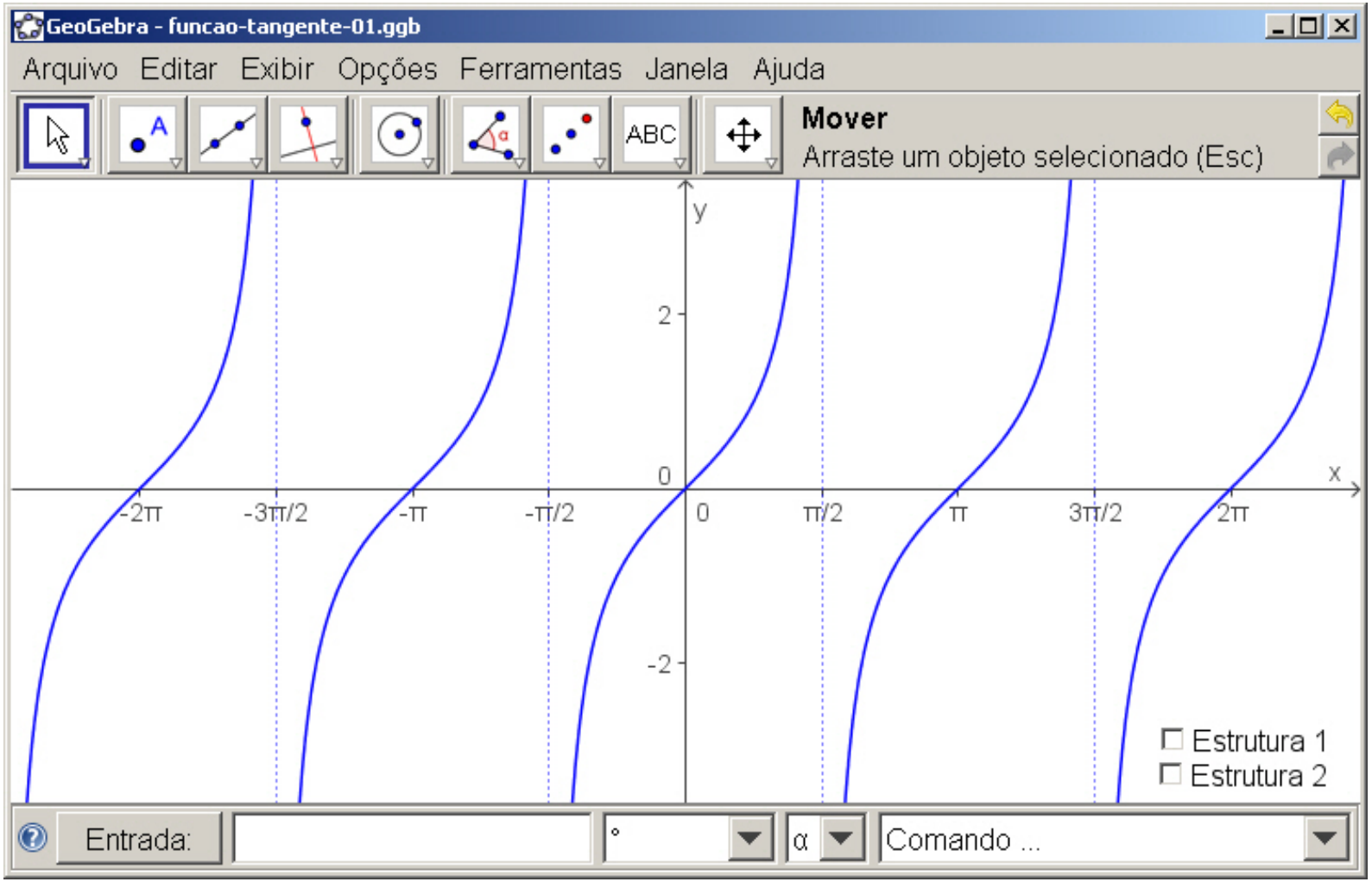
$$\mathrm{tg}(0) = 0, \quad \mathrm{tg}(\pi) = 0,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{não existe},$$

$$\mathrm{tg}(90) = \mathrm{tg}(5156.620156177\ldots^{\circ}) = -1.9952004122082\ldots.$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = (\mathrm{tg}(a) + \mathrm{tg}(b))/(1 - \mathrm{tg}(a) \cdot \mathrm{tg}(b)).$$

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x), \quad \forall x \in D = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tangente é uma função periódica: $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x), \forall x \in D.$

A função tangente