Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 4

Versão 0.9

Novas funções a partir de antigas: operações com funções

Operações com funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ e $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ duas funções reais. Definimos as funções soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcll}
(f+g)(x) & = & f(x)+g(x), & \text{com } D_{f+g} = D_f \cap D_g \\
(f-g)(x) & = & f(x)-g(x), & \text{com } D_{f-g} = D_f \cap D_g \\
(f \cdot g)(x) & = & f(x) \cdot g(x), & \text{com } D_{f\,.\,g} = D_f \cap D_g \\
(f\,/\,g)(x) & = & f(x)\,/\,g(x), & \text{com } D_{f\,/\,g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}.
\end{array}$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty),$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$(f+g)(x) =$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3 =$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3 = x - 2 + \sqrt{x-2},$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3 = x - 2 + \sqrt{x-2},$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$(f - g)(x) =$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) =$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-3) =$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2},$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2},$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) =$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) =$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) \cdot (x-3),$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) \cdot (x-3),$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) =$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) =$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x-3},$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$

$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1 + \sqrt{x-2}}{x-3},$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = [2, +\infty) - \{3\}.$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R},$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} =$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1,$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$

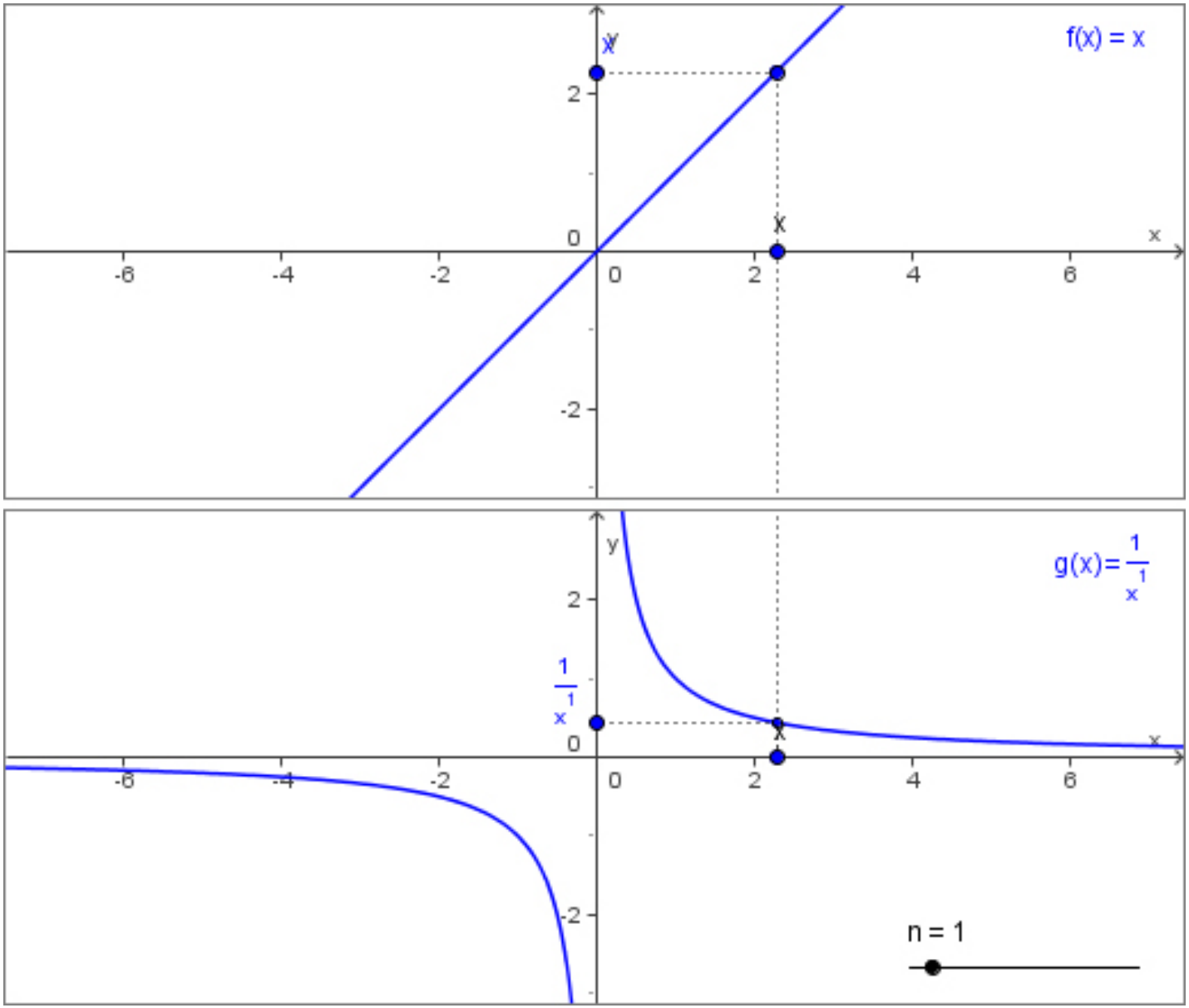
$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1,$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

Revisão: funções da forma x elevado a menos n



Revisão: funções da forma x elevado a menos n

$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

(2) Se $0 < x < 1$, então $\dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

(2) Se $0 < x < 1$, então $\dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

Revisão: funções da forma x elevado a menos n

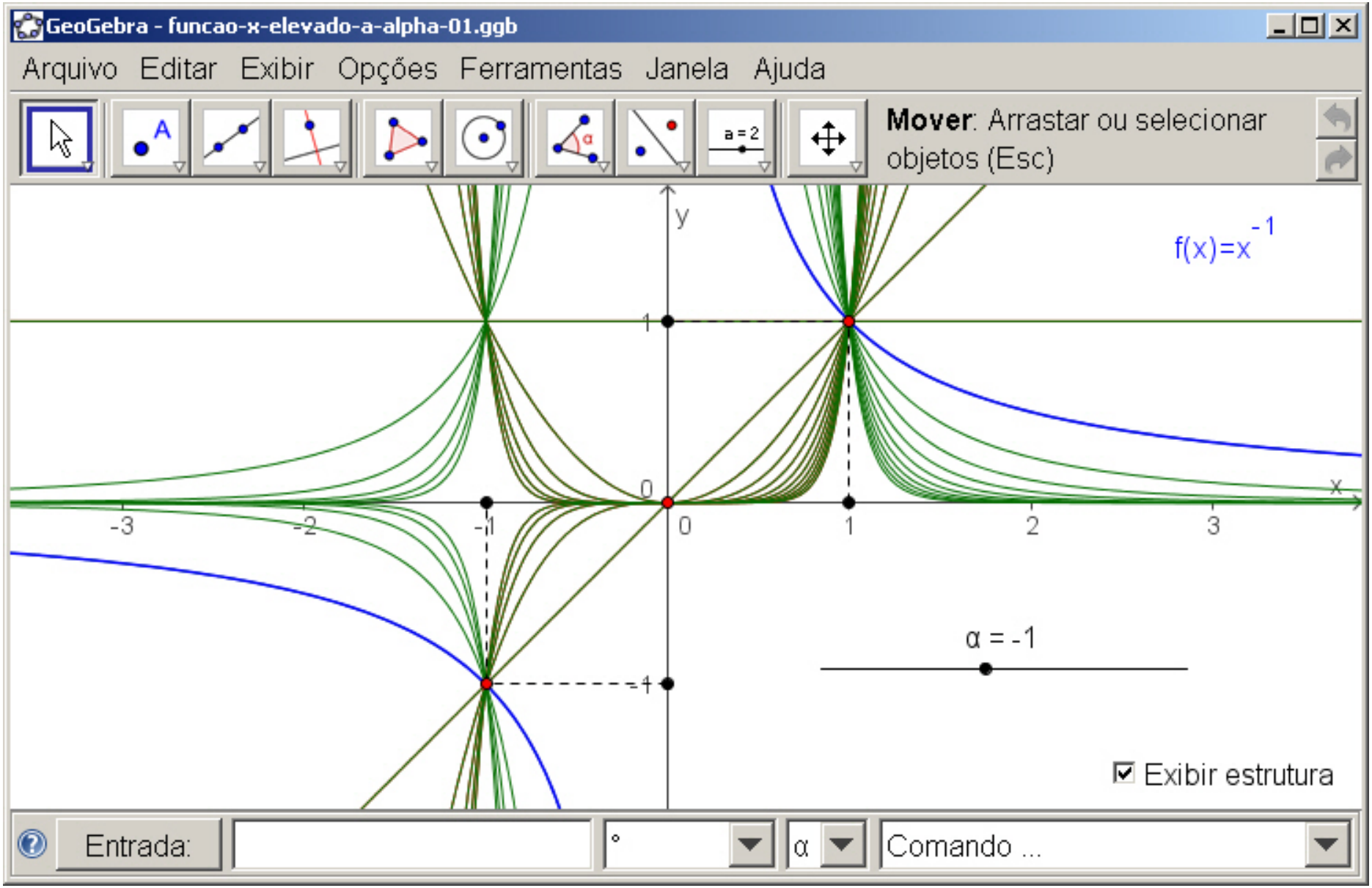
$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \neq 0$$

(1) f é uma função par se n é um número par e f é uma função ímpar se n é um número ímpar.

(2) Se $0 < x < 1$, então $\dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

(3) Se $1 < x$, então $\dfrac{1}{x^{n+1}} < \dfrac{1}{x^n}$.

Revisão: funções da forma x elevado a α



Novas funções a partir de antigas: composição de funções

Composição de funções

Definição

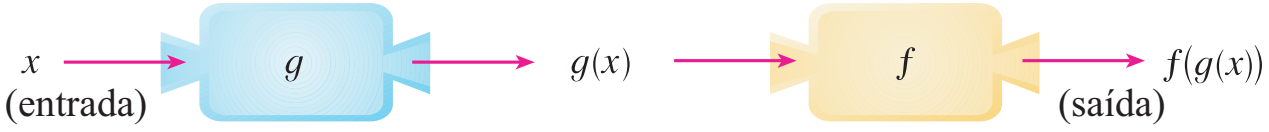
Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$. A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$. A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

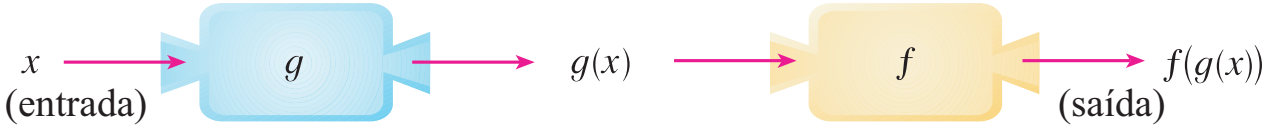
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

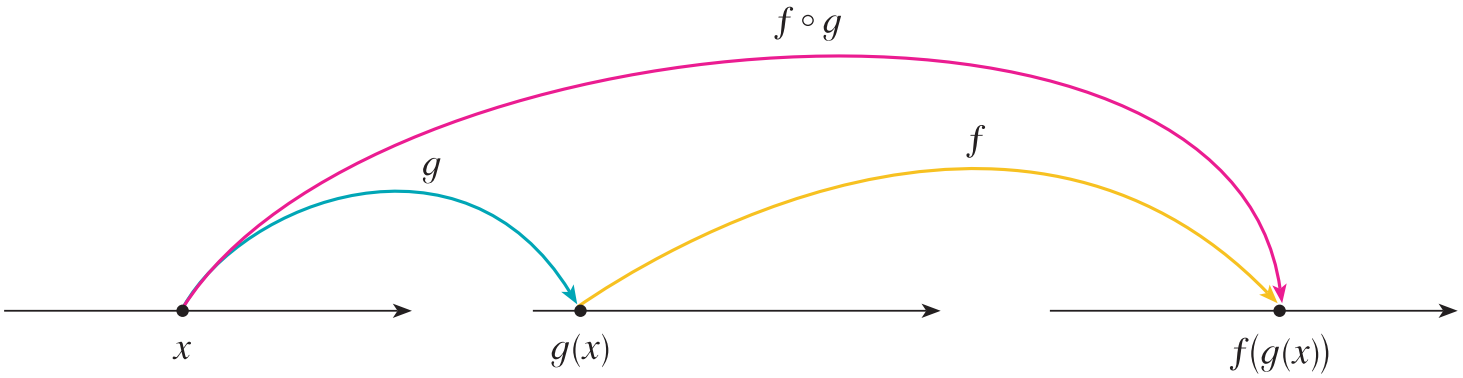


Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$. A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$





Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) =$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Moral: (em geral) $f \circ g \neq g \circ f$.

A operação de composição de funções não é comutativa!

Identificando composições

$$h(x) = (x^2 + 1)^{10} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \qquad\qquad \text{e} \qquad g(x) =$$

Identificando composições

$$h(x) = (x^2 + 1)^{10} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = x^{10} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

Identificando composições

$$h(x) = \text{tg}(x^5) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \qquad\qquad \text{e} \qquad g(x) =$$

Identificando composições

$$h(x) = \text{tg}(x^5) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \text{tg}(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^5.$$

Identificando composições

$$h(x) = \sqrt{4 - 3\,x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \qquad\qquad \text{e} \qquad g(x) =$$

Identificando composições

$$h(x) = \sqrt{4 - 3\,x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 4 - 3\,x.$$

Identificando composições

$$h(x) = 8 + \sqrt{x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \qquad\qquad \text{e} \qquad g(x) =$$

Identificando composições

$$h(x) = 8 + \sqrt{x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 8 + x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

Identificando composições

$$h(x) = 1/(x+1) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \qquad\qquad \text{e} \qquad g(x) =$$

Identificando composições

$$h(x) = 1/(x+1) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 1/x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 1.$$

Funções inversíveis

Funções inversíveis

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in D$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in C.$$

Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

$$g = f^{-1}.$$

Funções inversíveis

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in D$$

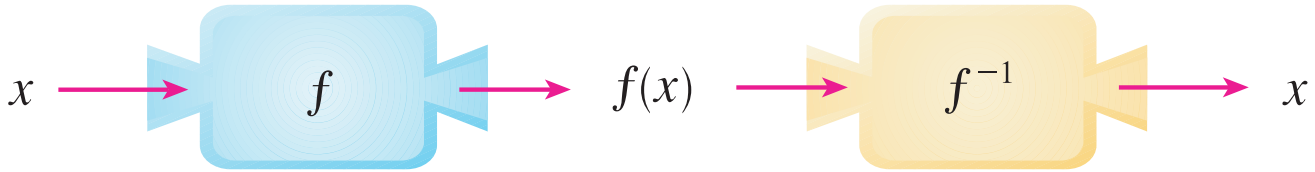
e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in C.$$

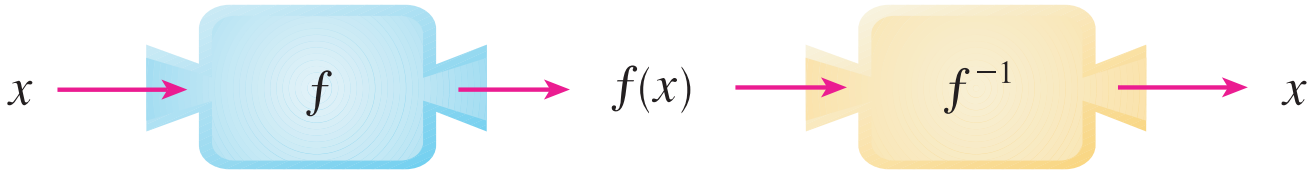
Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

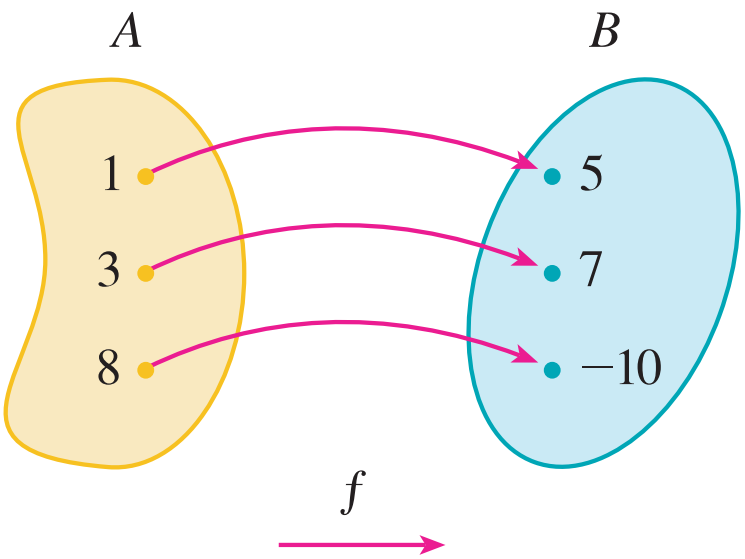
$$g = f^{-1}.$$

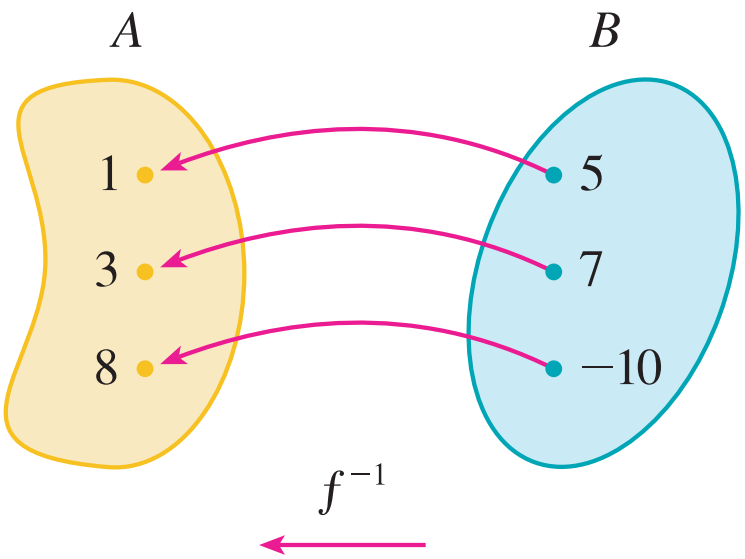
Exemplo



Exemplo







Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f: & D = \mathbb{R} & \to & C = \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = 2\,x + 1 \end{array}$$

é inversível

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)= \qquad\qquad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \qquad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1) \qquad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2 \qquad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)= \qquad\qquad \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \qquad \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2) \qquad \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2)=2((x-1)/2)+1 \qquad \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2)=2((x-1)/2)+1=x, \ \ \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rrcl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x, \quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2)=2((x-1)/2)+1=x, \ \ \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=(x-1)/2$.

Cuidado

Cuidado!

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) =$, enquanto que $(f(x))^{-1} =$.

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x) = (x-1)/2$, enquanto que $(f(x))^{-1} = (2\,x+1)^{-1} = 1/(2\,x+1)$.

O gráfico da função inversa

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) =$

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) =$

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) =$

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.

Assim, o ponto pertence ao gráfico de f

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto pertence ao gráfico de f

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.
Assim, o ponto pertence ao gráfico de f

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.
Assim, o ponto (x, y) pertence ao gráfico de f

O gráfico da função inversa

Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.
Assim, o ponto (x, y) pertence ao gráfico de f e pertence ao gráfico de f^{-1}.

O gráfico da função inversa

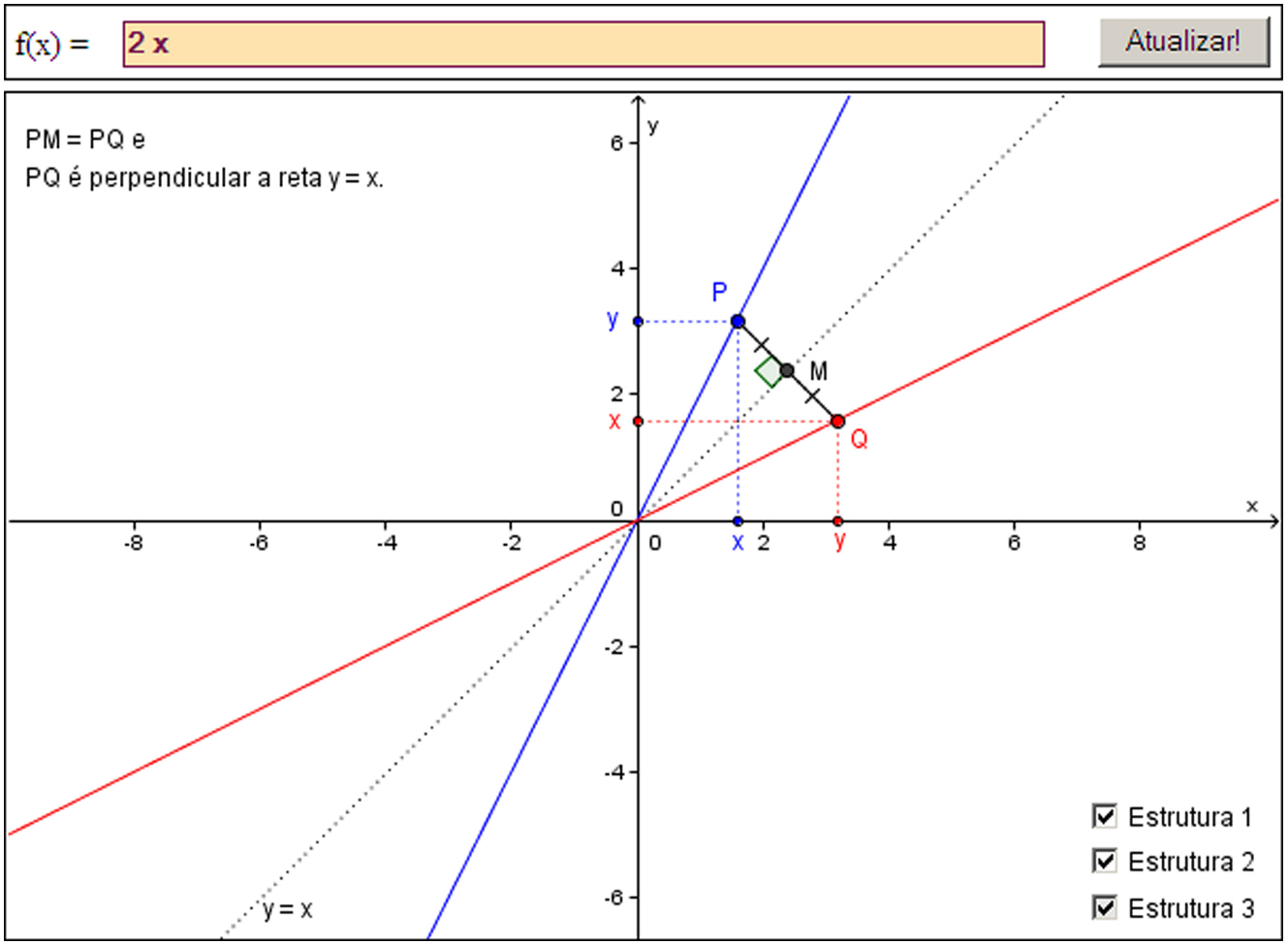
Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.
Assim, o ponto (x, y) pertence ao gráfico de f e (y, x) pertence ao gráfico de f^{-1}.

O gráfico da função inversa



(Ir para o GeoGebra)

O gráfico da função inversa

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

o gráfico da inversa f^{-1} é obtido
fazendo-se uma reflexão do gráfico de f com relação a reta $y = x$.

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
o gráfico da inversa f^{-1} é obtido
fazendo-se uma reflexão do gráfico de f com relação a reta $y = x$.

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se $x_1 = x_2$.

Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se $x_1 = x_2$.

Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se $x_1 = x_2$.

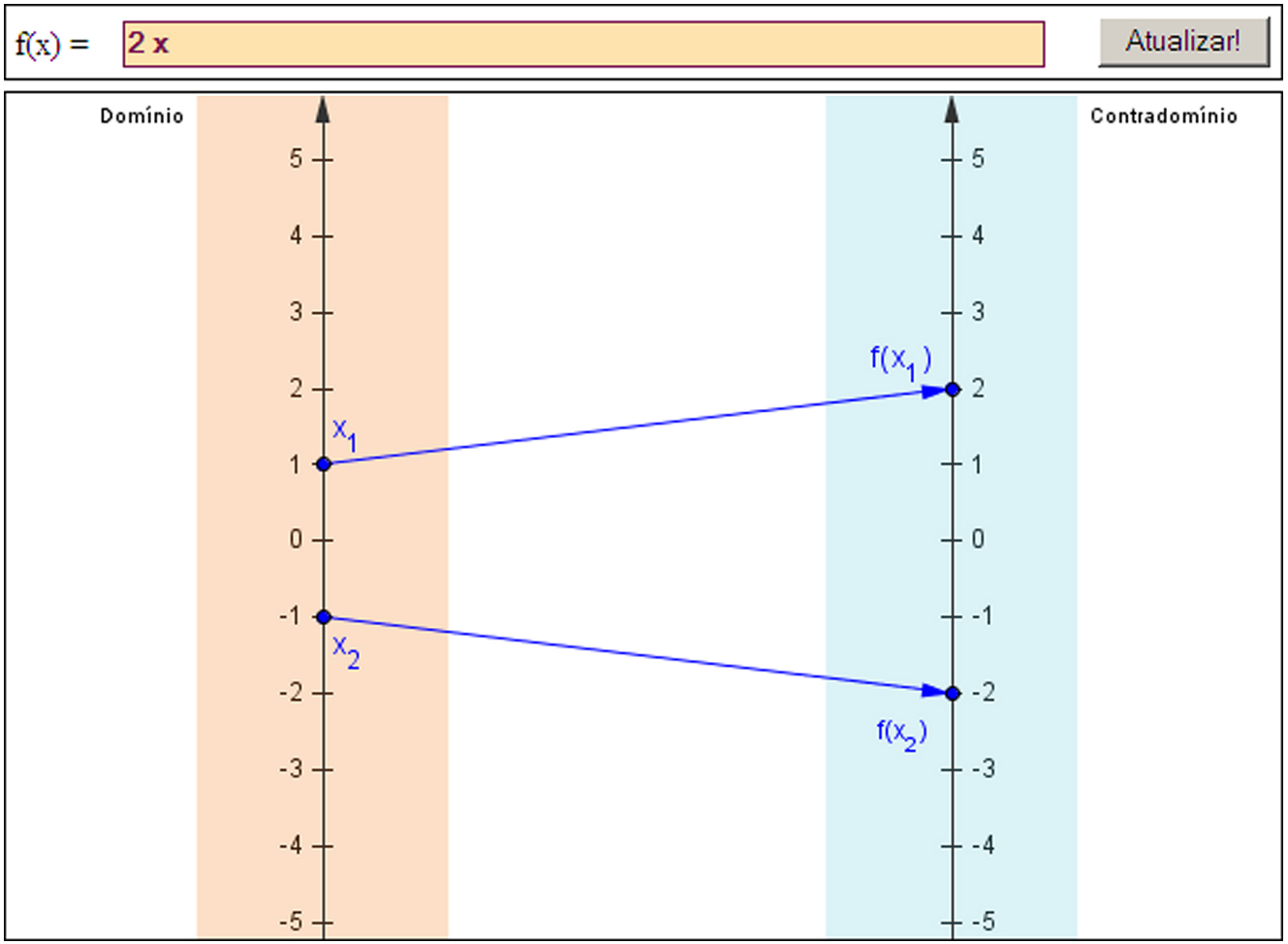
Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

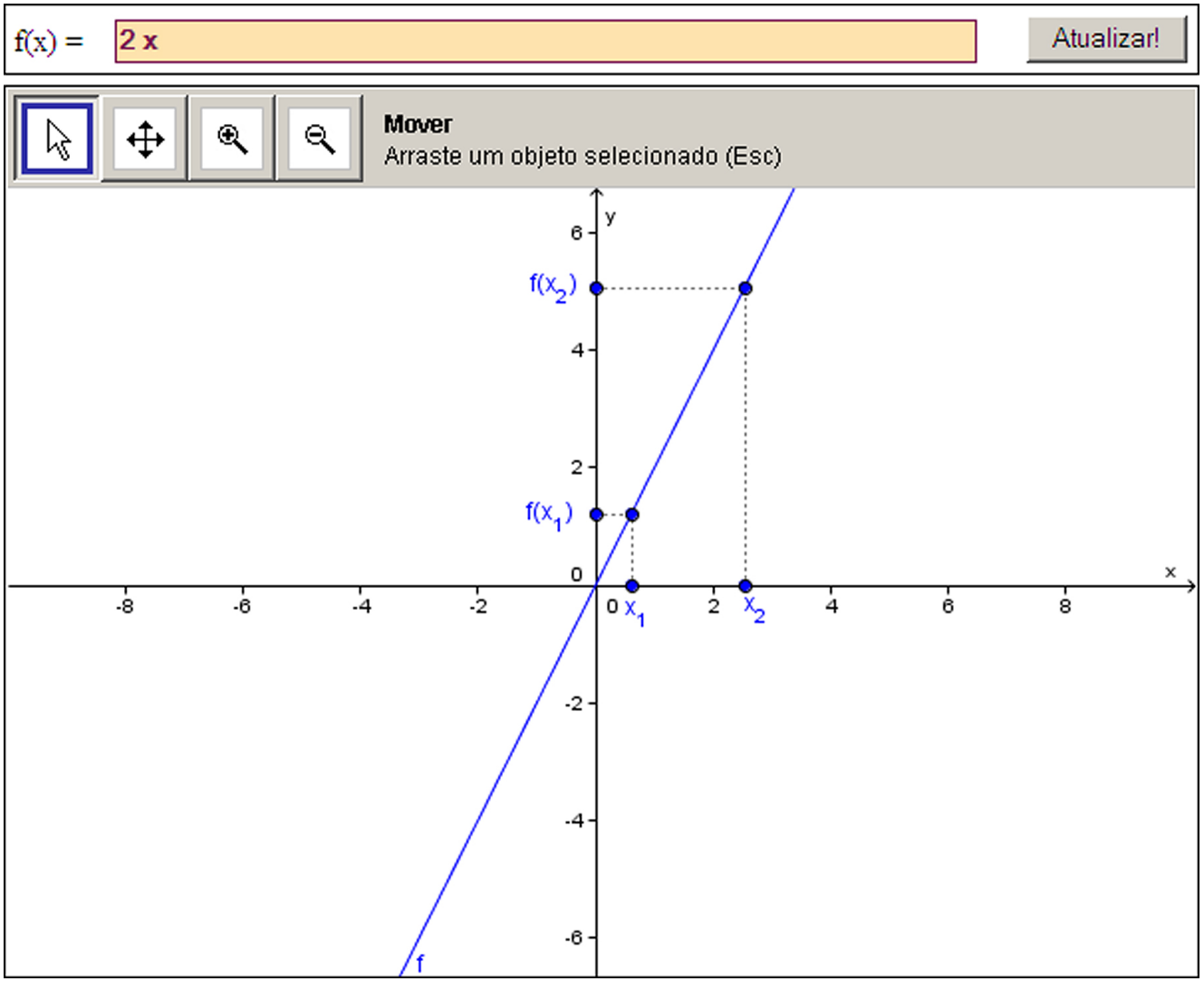
Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D$, com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se $x_1 = x_2$.

Funções injetivas



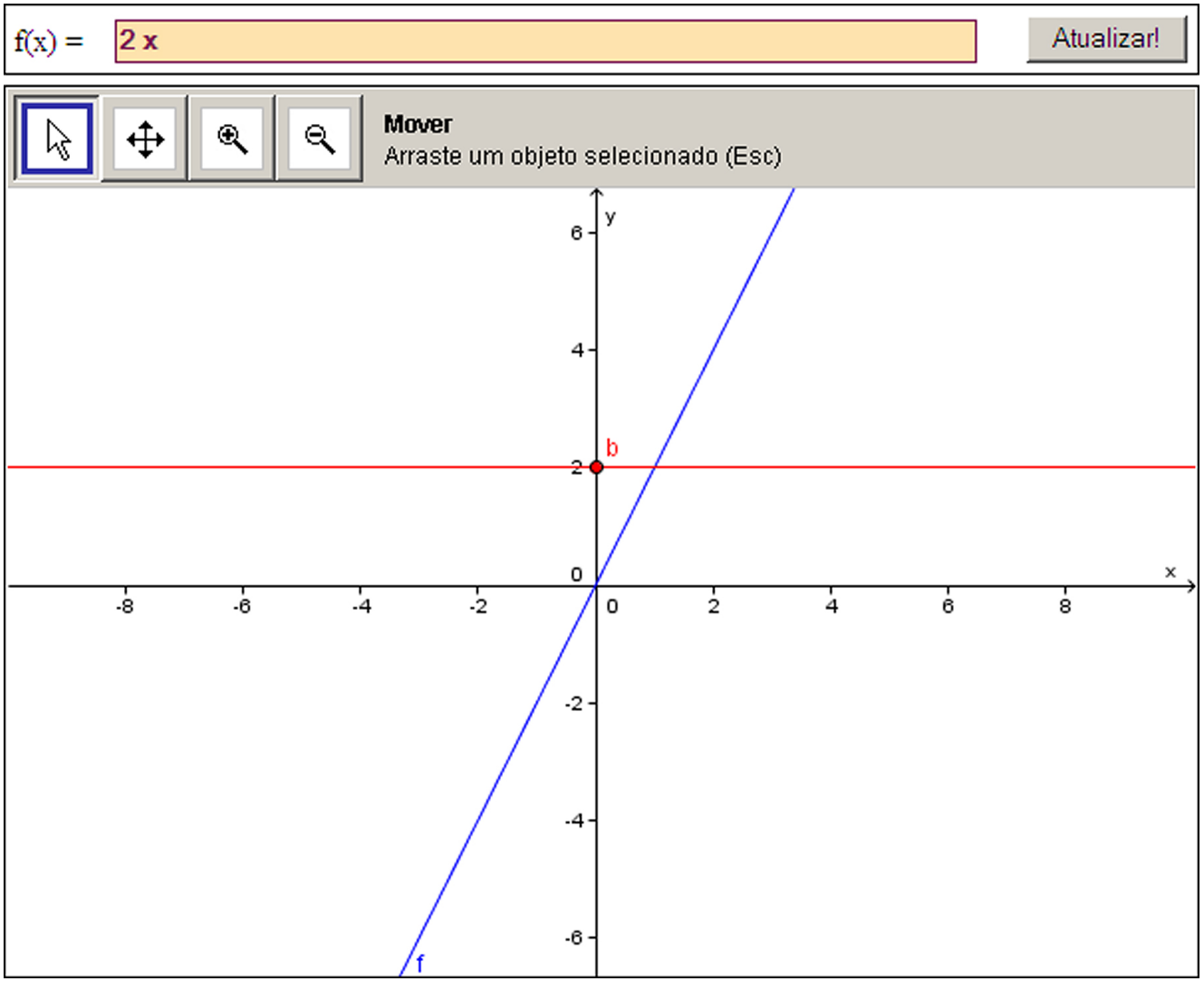
(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\;\Rightarrow\;\; 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2\,x_1 = 2\,x_2$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2\,x_1 = 2\,x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1 \;\Rightarrow\; 2\,x_1 = 2\,x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2. \qquad \blacksquare$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração.

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$.

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Em particular, $x_1 = x_2$.

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - x_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Em particular, $x_1 = x_2$. ■

Funções sobrejetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas

Definição

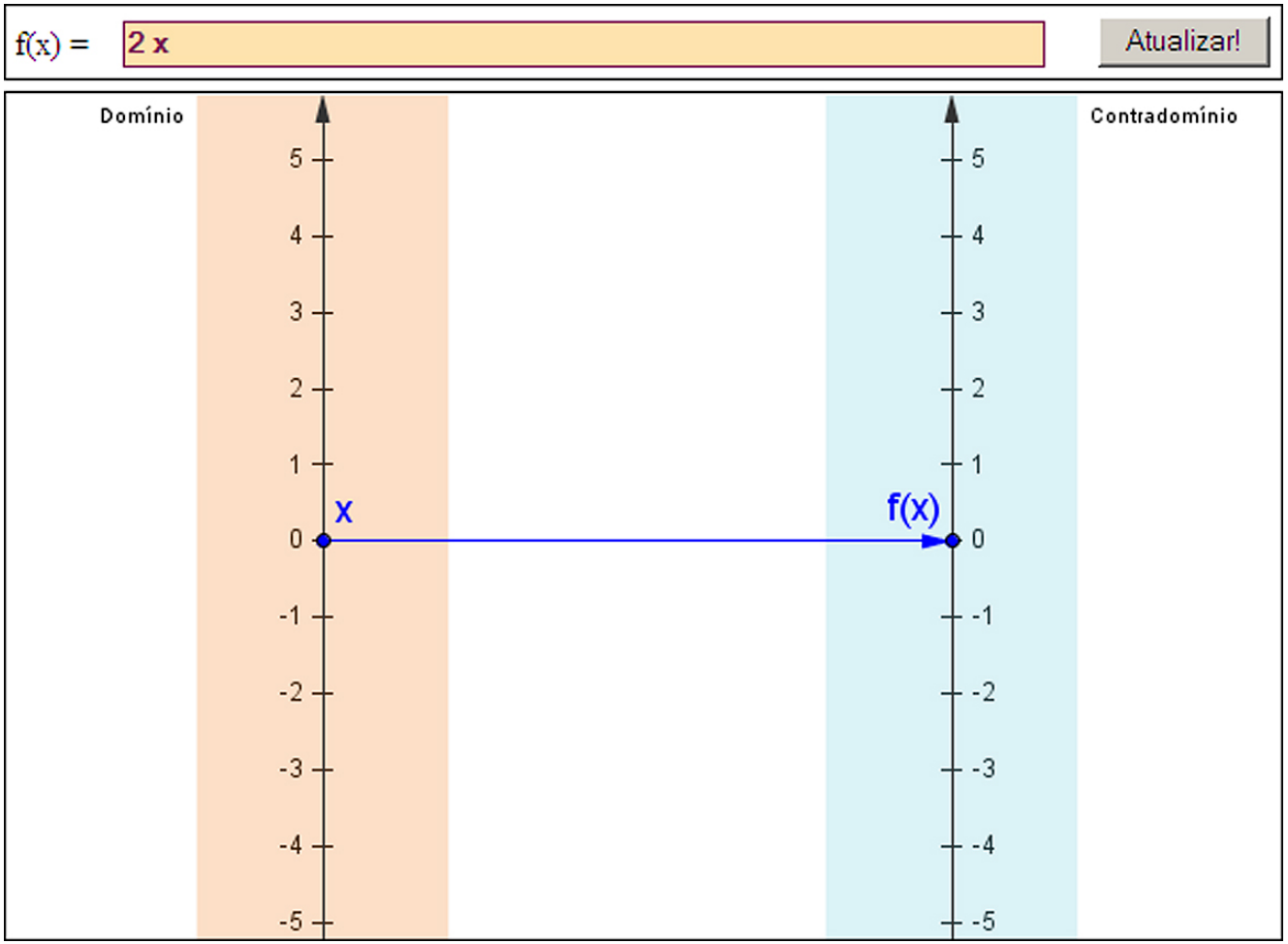
Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas

Definição

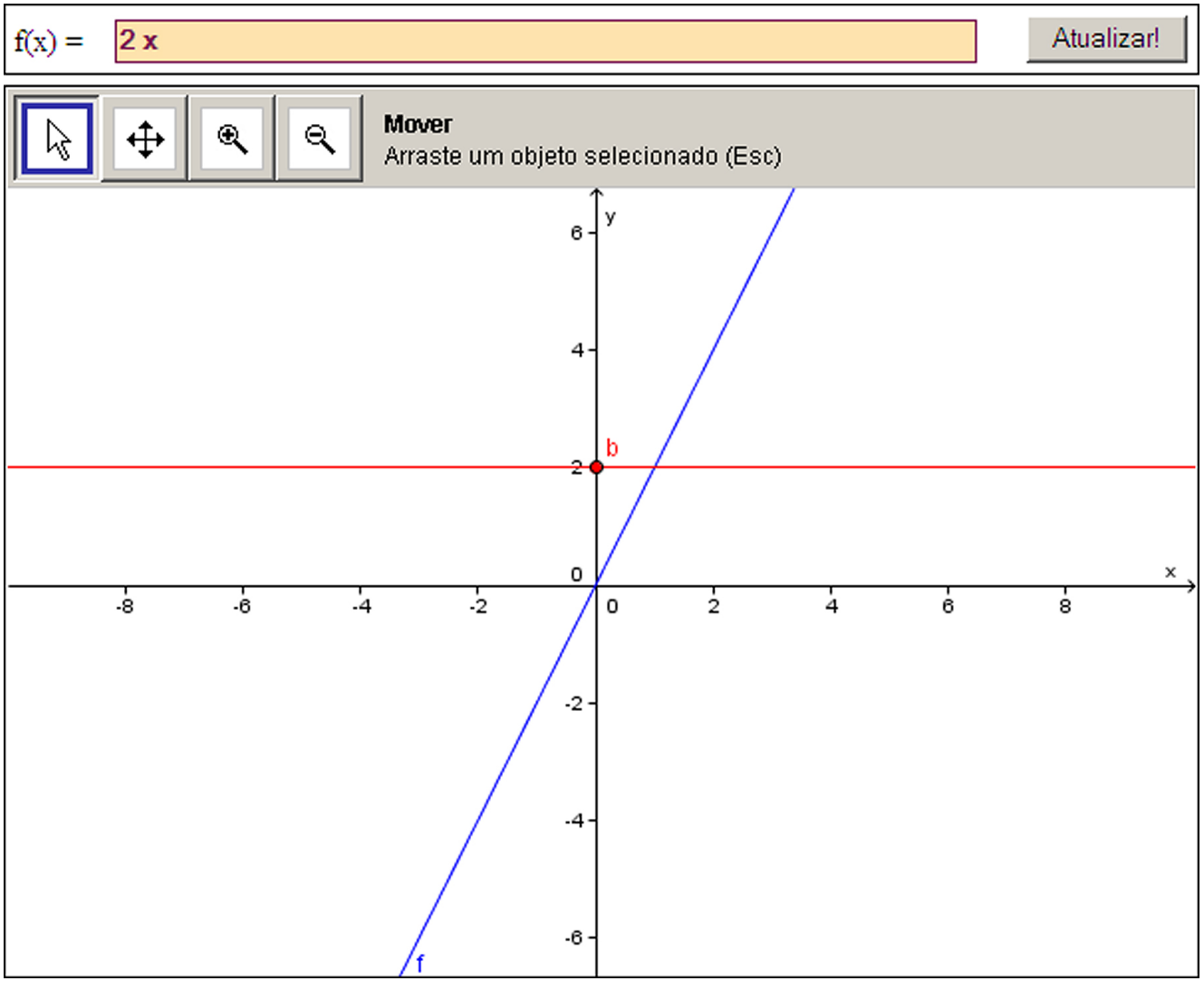
Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, $x = (y-1)/2 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = y$.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, $x = (y-1)/2 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = y$. Isto mostra que f é sobrejetiva.

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2\,x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, $x = (y-1)/2 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = y$. Isto mostra que f é sobrejetiva. ■

Atenção!

Mostrar que a função $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva

Atenção!

Mostrar que a função $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva

é bem mais complicado!

Atenção!

Mostrar que a função $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva

é bem mais complicado!

Para fazer isto, precisaríamos do conceito de continuidade,
que será visto em Cálculo I -A-.

Funções bijetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é bijetiva se ela é injetiva e sobrejetiva.

Funções bijetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é bijetiva se ela é injetiva e sobrejetiva.

Funções bijetivas

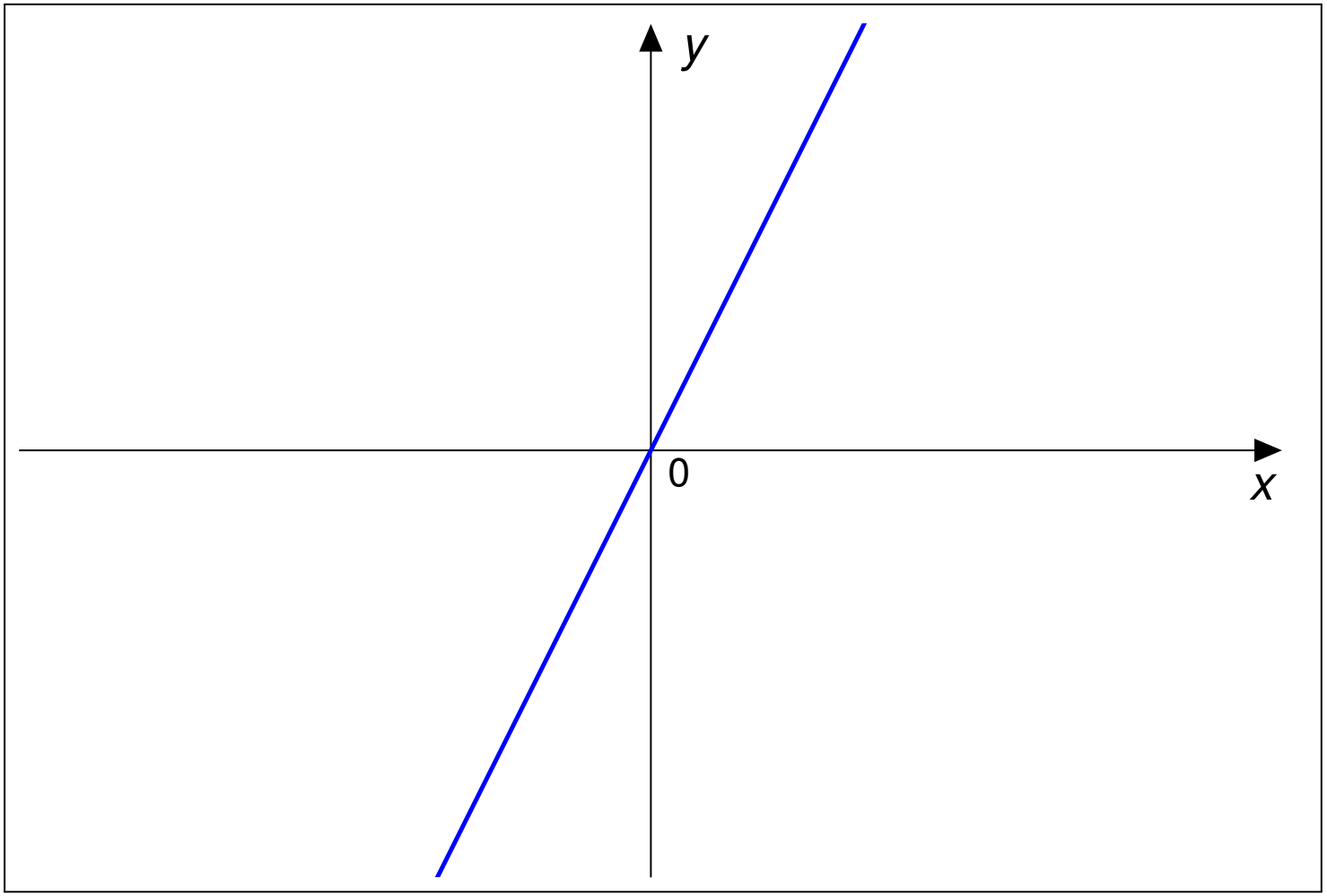
$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x + 1 \end{array}$$

Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x + 1 \end{array}$$ é bijetiva.

Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2\,x + 1 \end{array}$$ é bijetiva.



Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Funções bijetivas

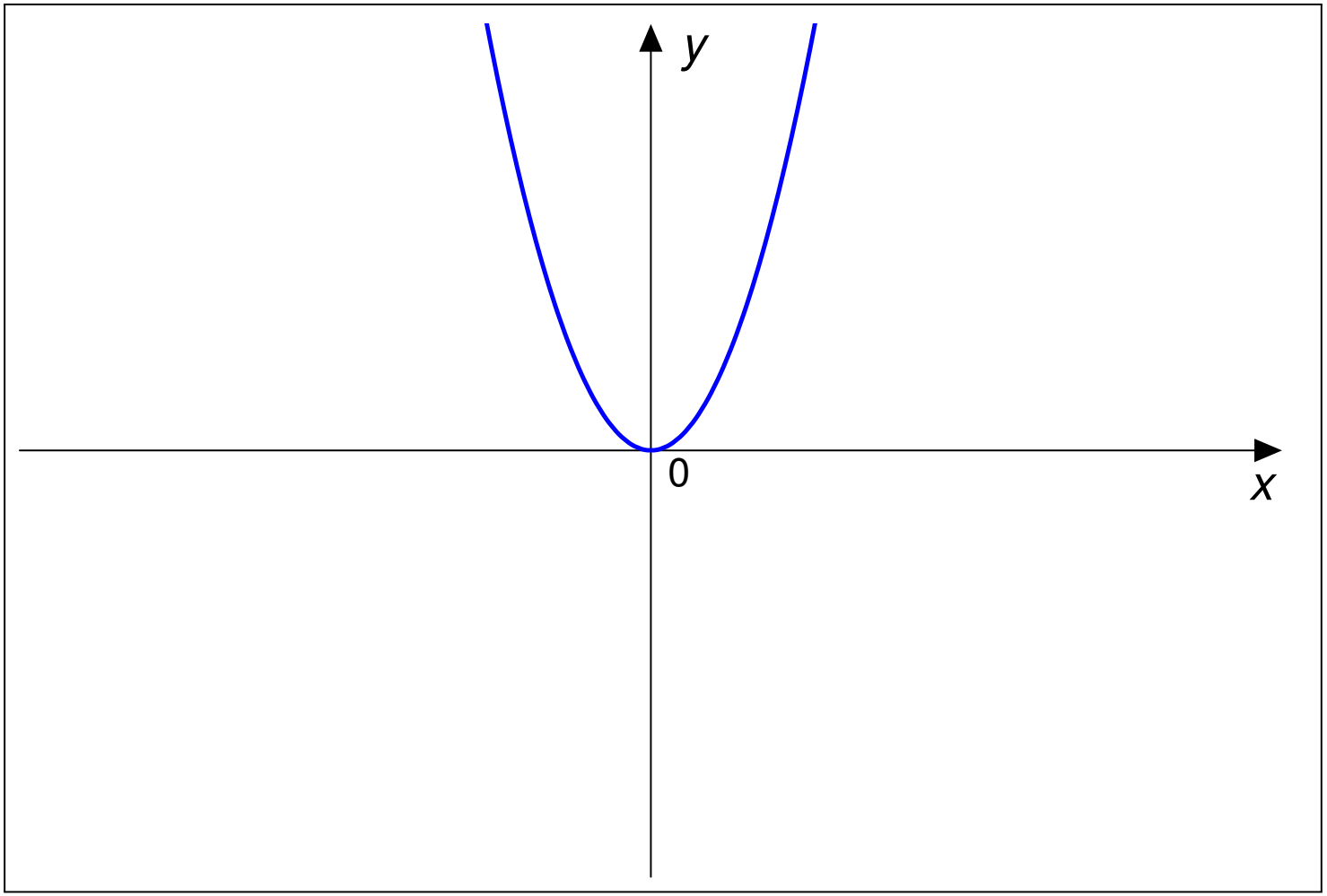
$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva

Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva e nem sobrejetiva.

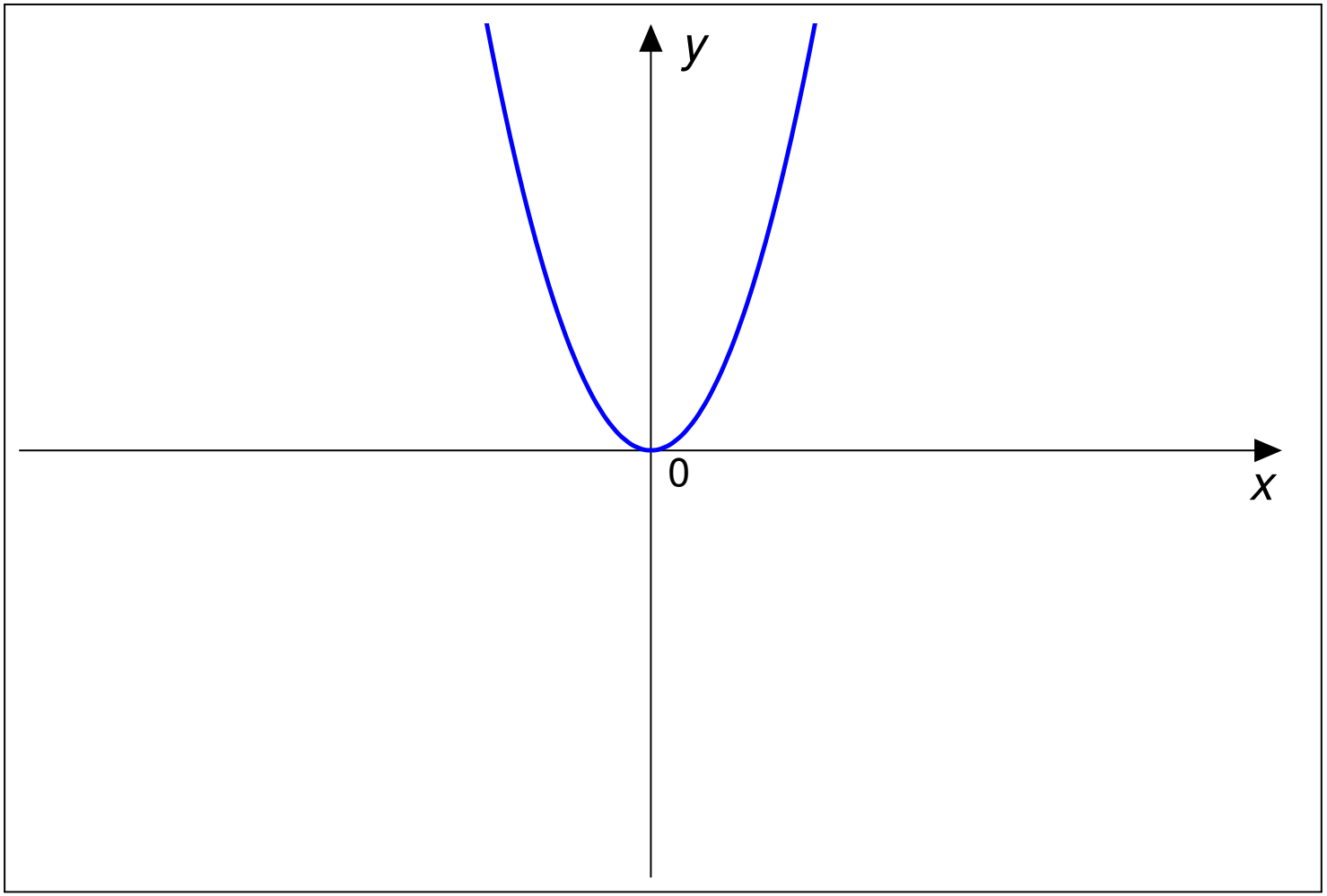
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva e nem sobrejetiva.



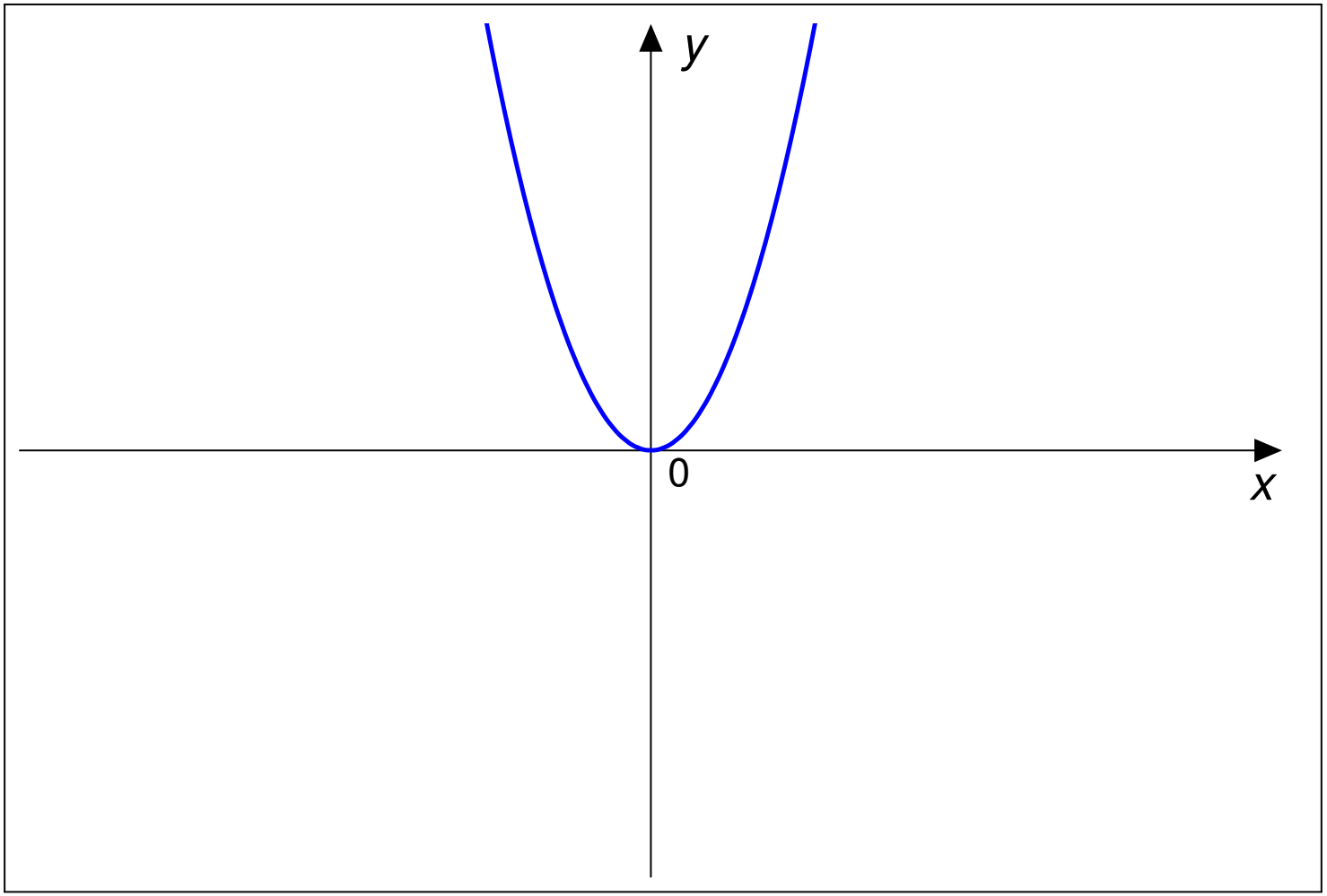
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$



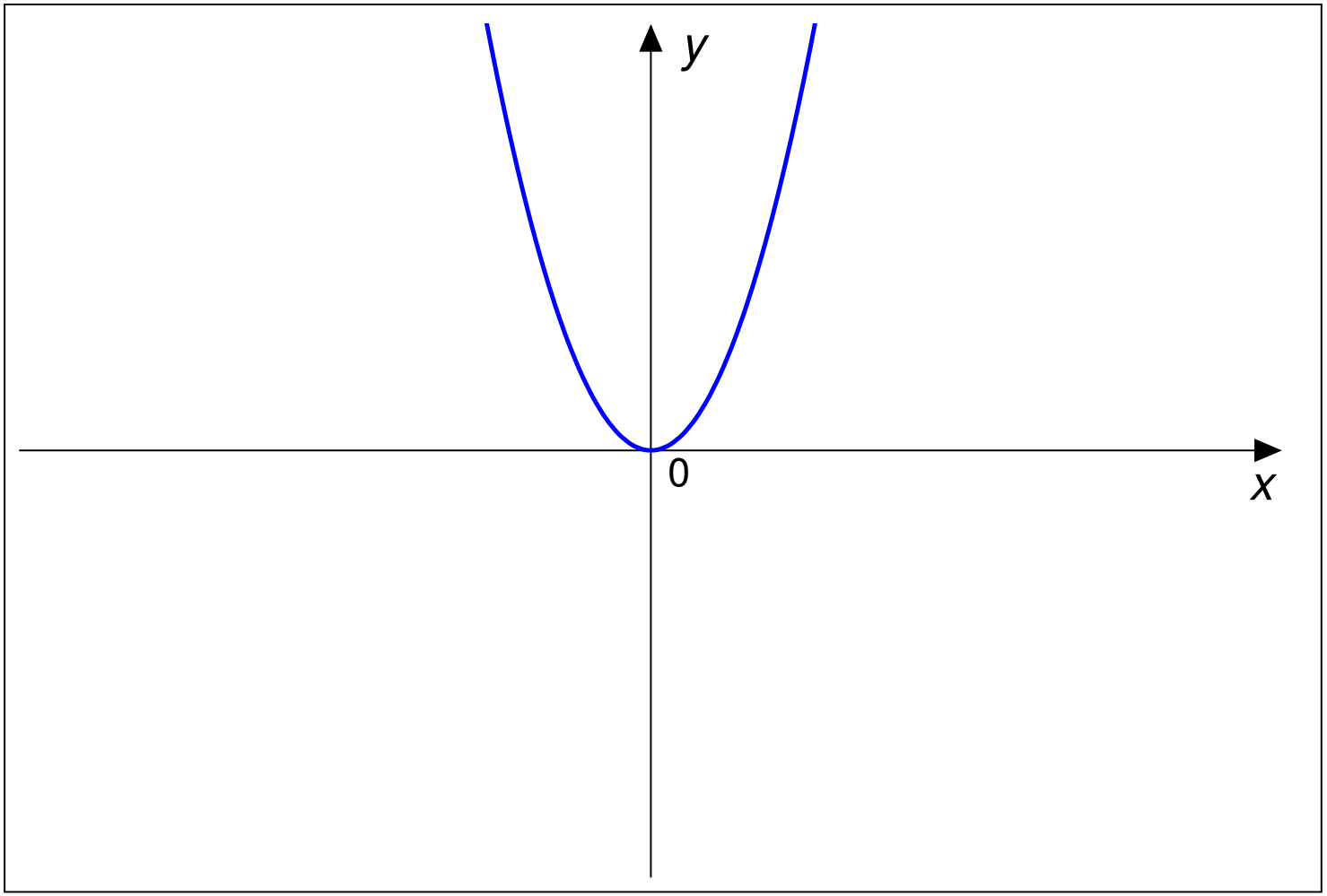
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$ não é bijetiva



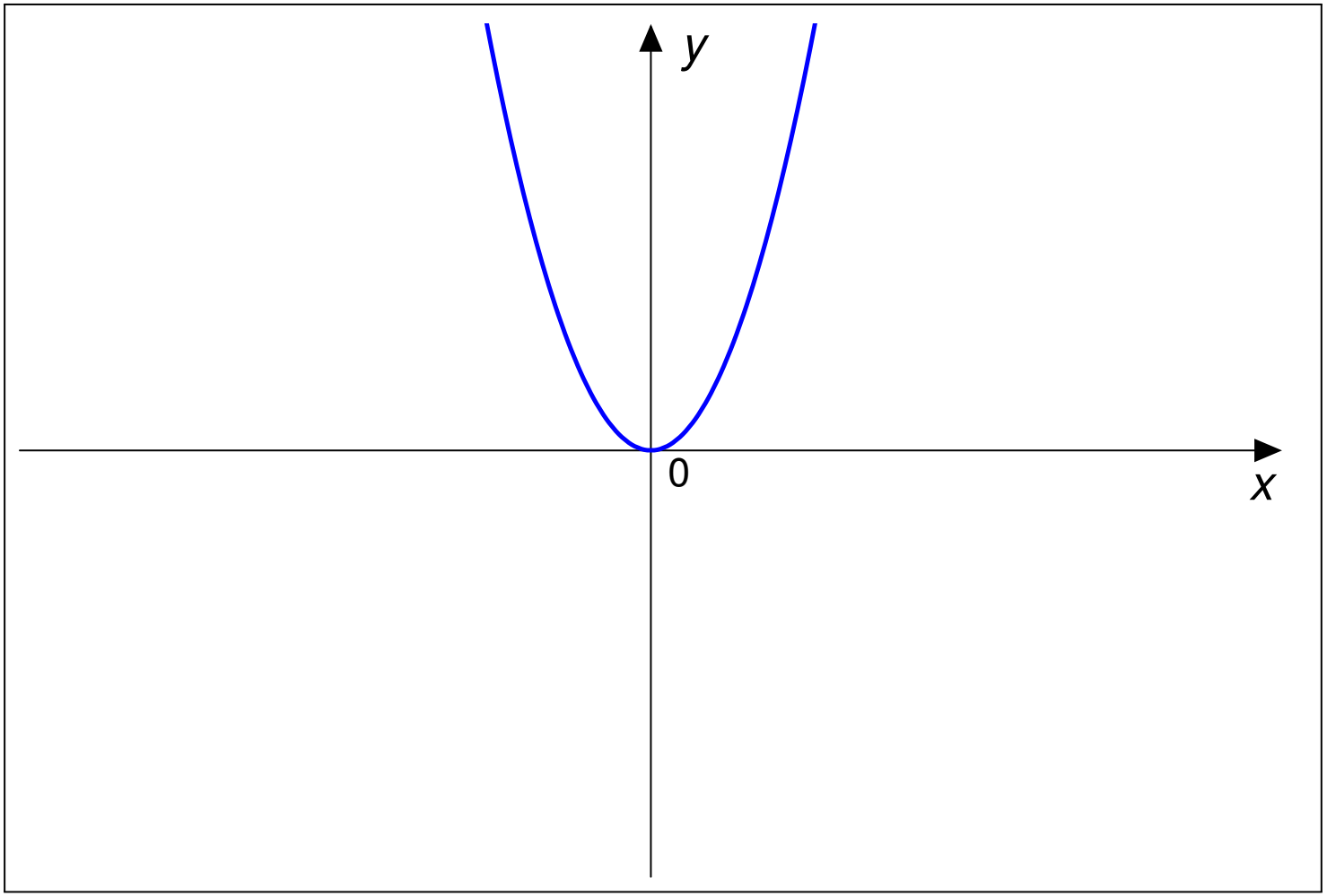
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva



Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva (mas é sobrejetiva).



Funções bijetivas

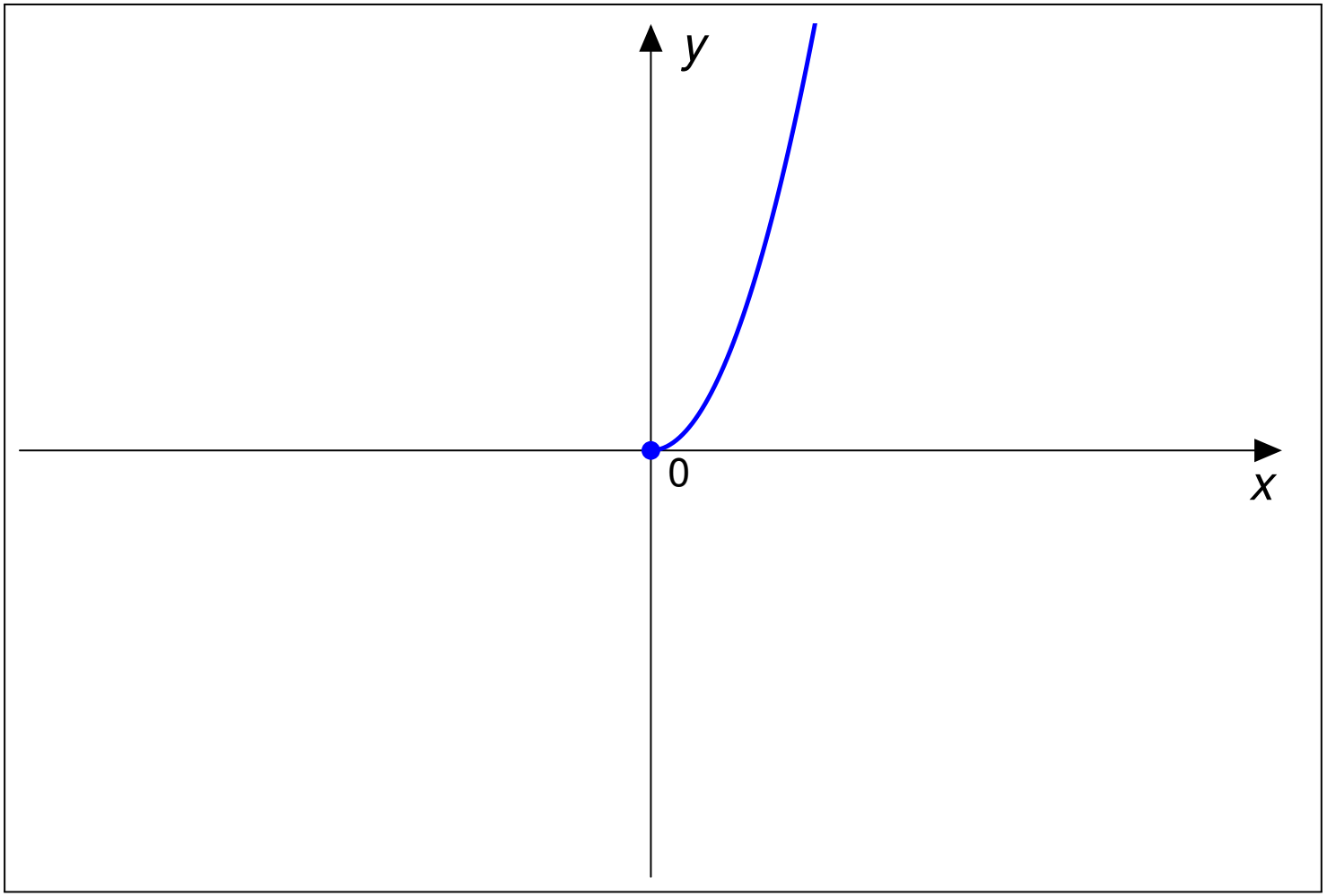
$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array} \quad \text{é bijetiva.}$$

Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array} \quad \text{é bijetiva.}$$



Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Proposição

$f\colon D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: se $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ e $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

A demonstração pode ser encontrada no livro A Matemática do Ensino Médio de Lima et al!

Observações

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil seja com a definição, seja com a proposição anterior.

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil seja com a definição, seja com a proposição anterior.

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para estudar se uma função é inversível

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil seja com a definição, seja com a proposição anterior.

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para estudar se uma função é inversível (localmente).