Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 5

Versão 0.9

A função raiz quadrada

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada.

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada. Usaremos a notação

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada. Usaremos a notação

$$\sqrt{x}$$

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada. Usaremos a notação

$$\sqrt{x}$$

para representar

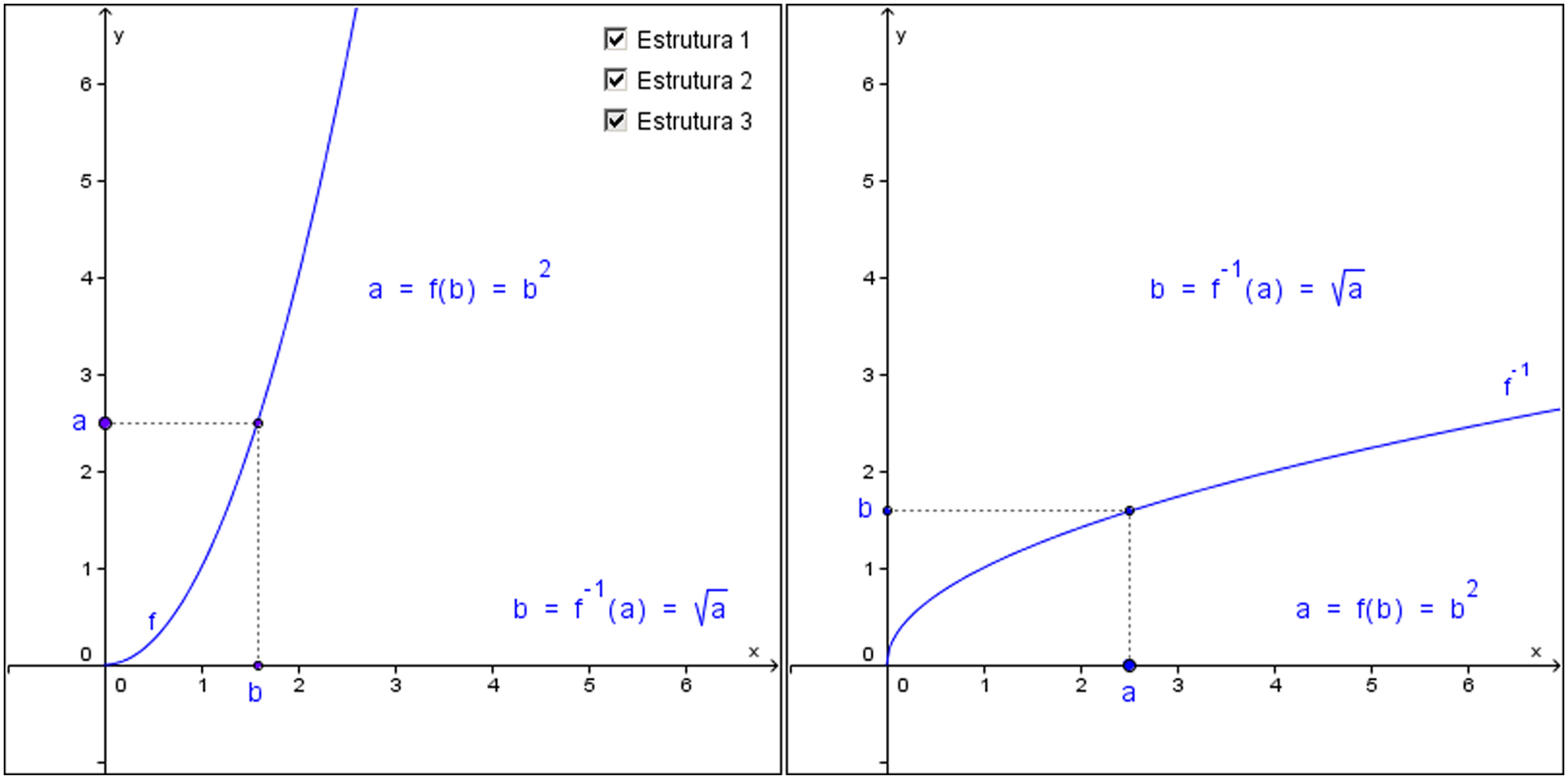
$$f^{-1}(x).$$

A função raiz quadrada

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Já demonstramos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é injetiva.
- Já mencionamos que $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é sobrejetiva (a prova deste fato requer ferramentas de análise).
- Logo $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é bijetiva e, portanto, inversível.
- A função inversa f^{-1} de f é denominada função raiz quadrada. Usaremos a notação
$$\sqrt{x}$$
para representar
$$f^{-1}(x).$$
- Note então que, se $a \geq 0$, então $\sqrt{a}$ é o único número real ≥ 0 que, elevado ao quadrado, dá o número real a.

A função raiz quadrada



(Ir para o GeoGebra)

Propriedades

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.

- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\forall a, b \leq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\forall a, b \leq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.
- $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\forall a \leq 0, \forall b < 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\forall a, b \leq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.
- $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\forall a \leq 0, \forall b < 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.
- A função raiz quadrada é crescente: $\forall a, b \geq 0, \ \ a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Propriedades

- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ e $\forall a, b \leq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.
- $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\forall a \leq 0, \forall b < 0, \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.
- A função raiz quadrada é crescente: $\forall a, b \geq 0, \ a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- $\forall a, b \geq 0, \sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Mais funções trigonométricas: secante, cossecante e cotangente

A função secante

$$f(x) = \sec(x) =$$

A função secante

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

A função secante

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Qual é o domínio natural da função secante?

A função secante

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Qual é o domínio natural da função secante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\}$$

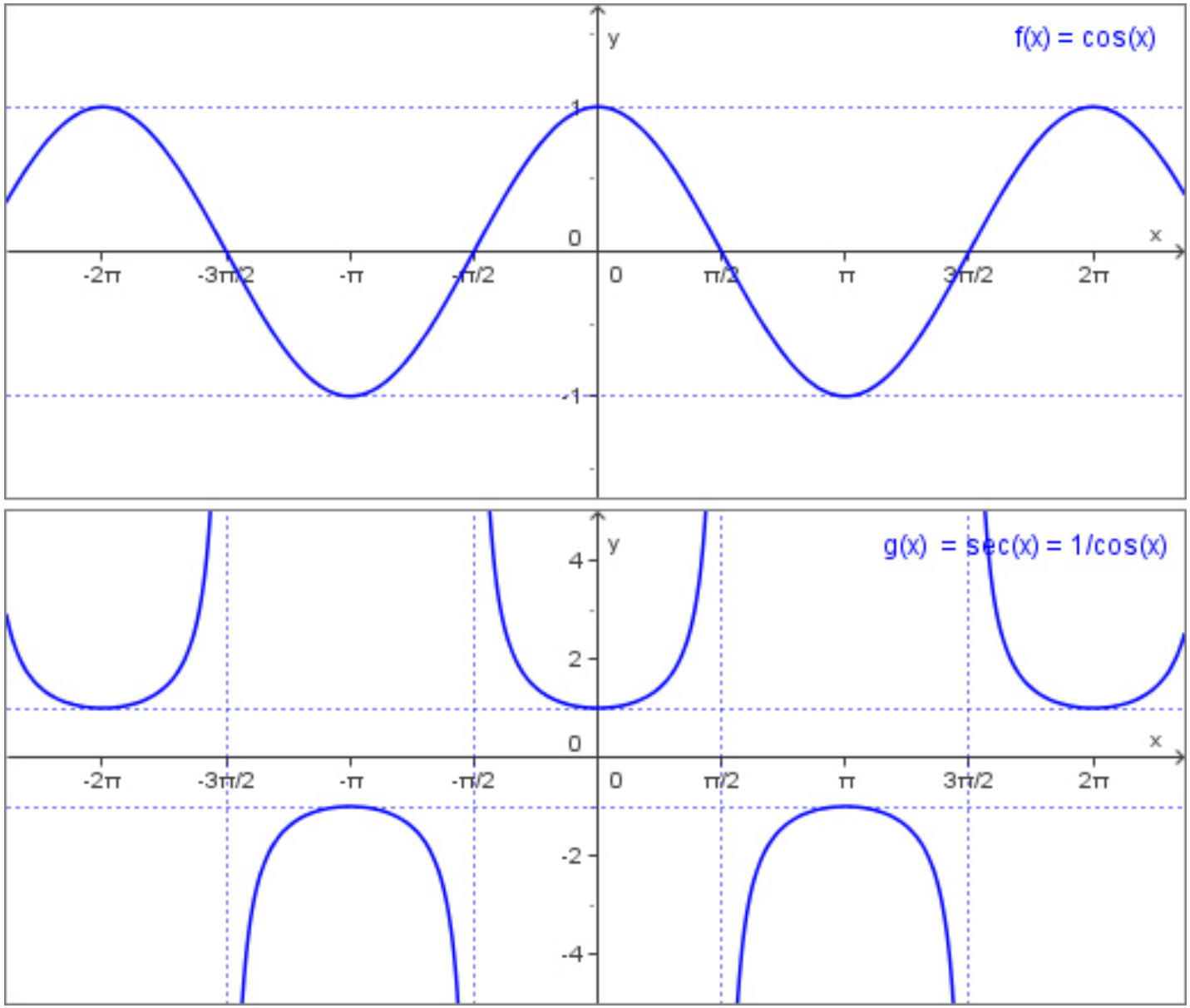
A função secante

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Qual é o domínio natural da função secante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função secante



A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) =$$

A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cossecante?

A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cossecante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\}$$

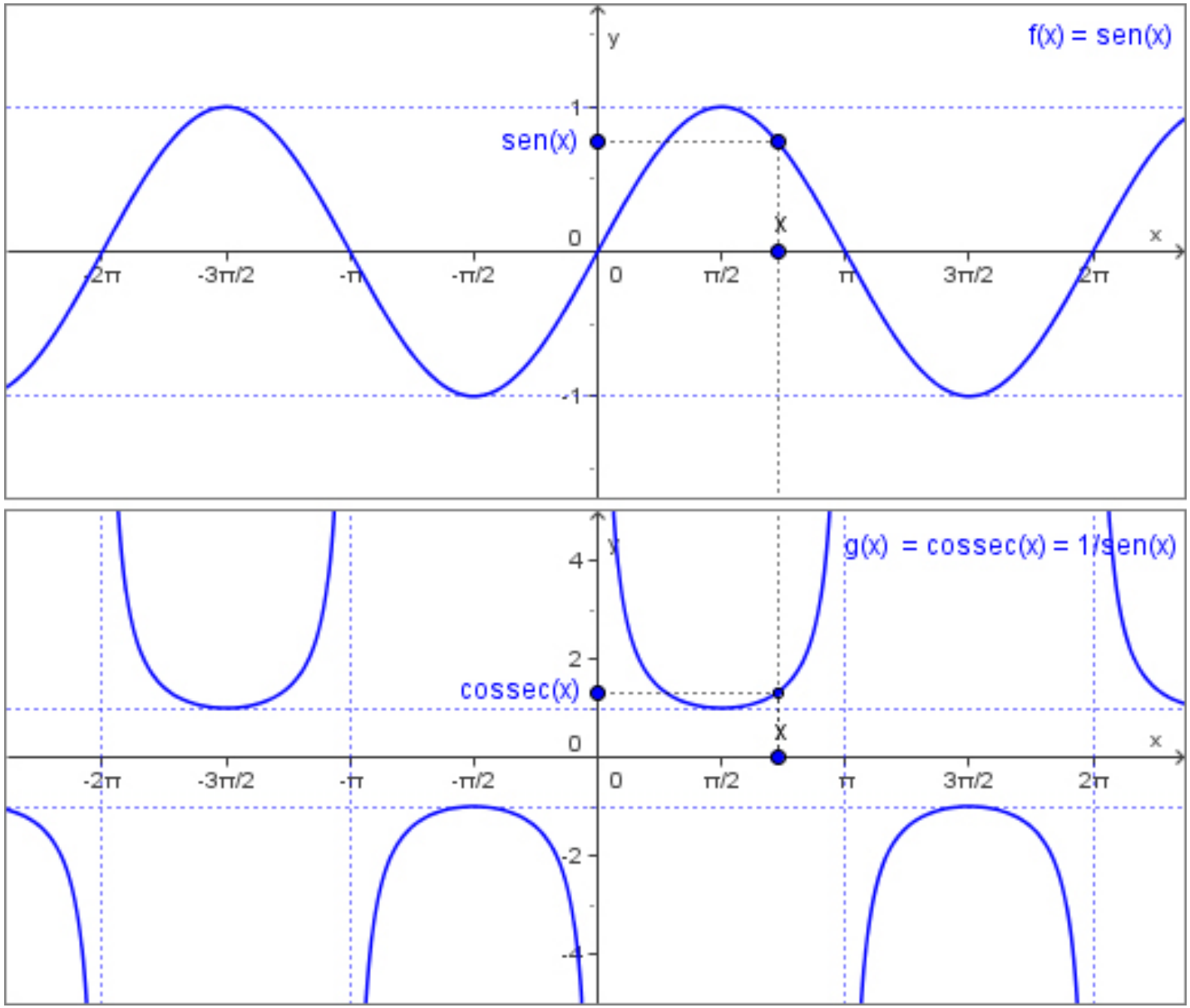
A função cossecante

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cossecante?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função cossecante



A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) =$$

A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cotangente?

A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cotangente?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\}$$

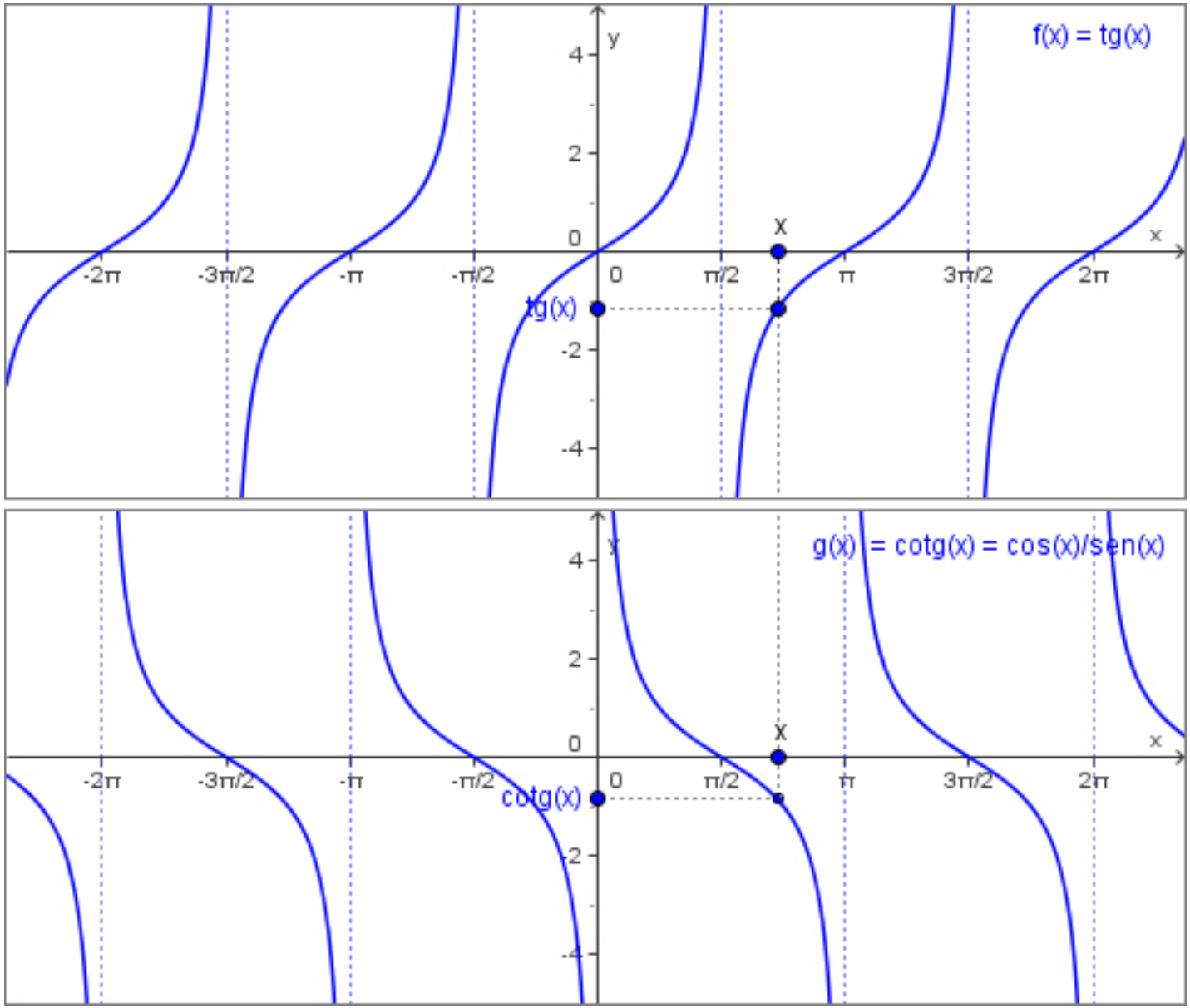
A função cotangente

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Qual é o domínio natural da função cotangente?

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

A função cotangente

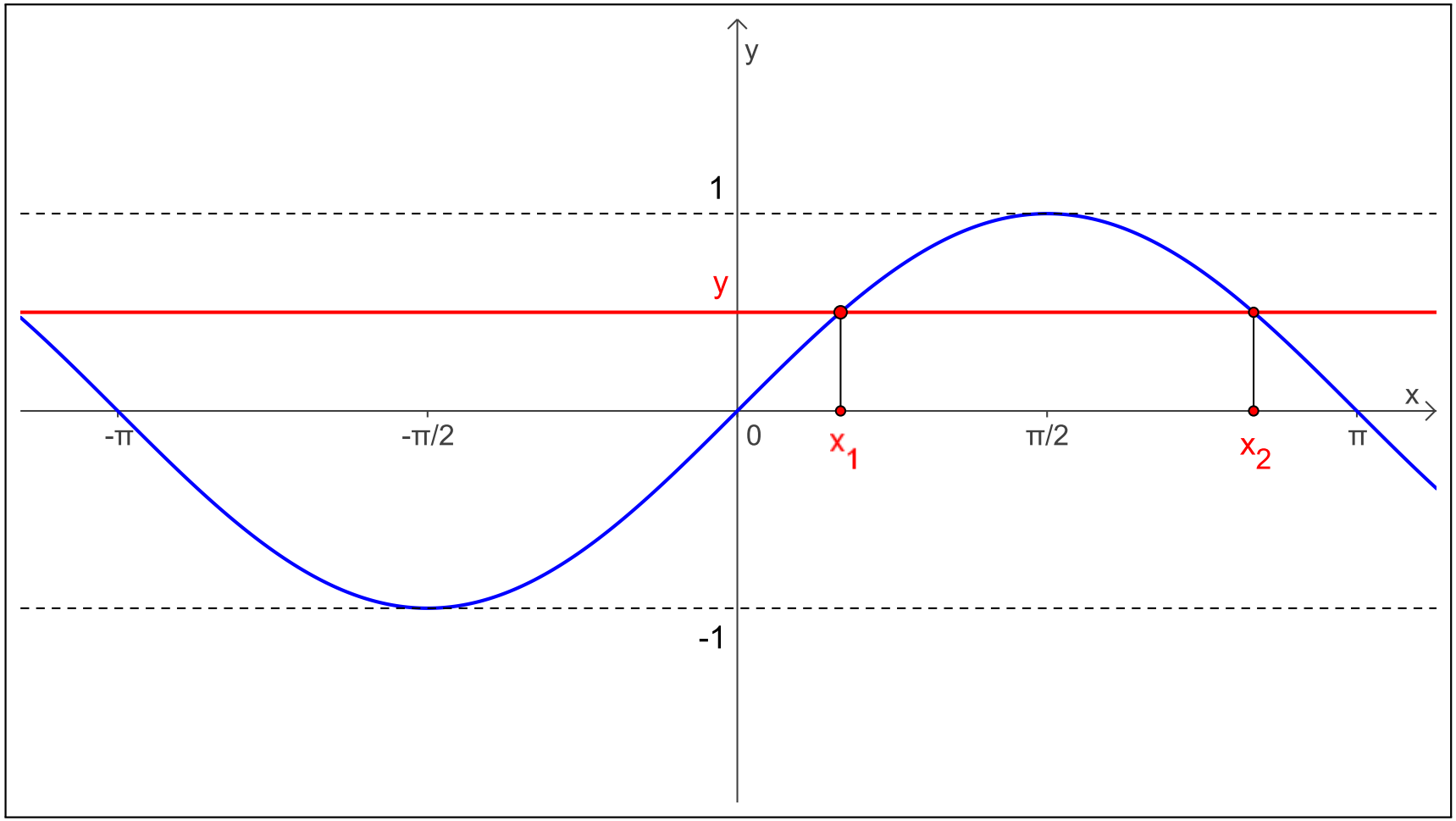


Funções trigonométricas inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente

A função arco seno

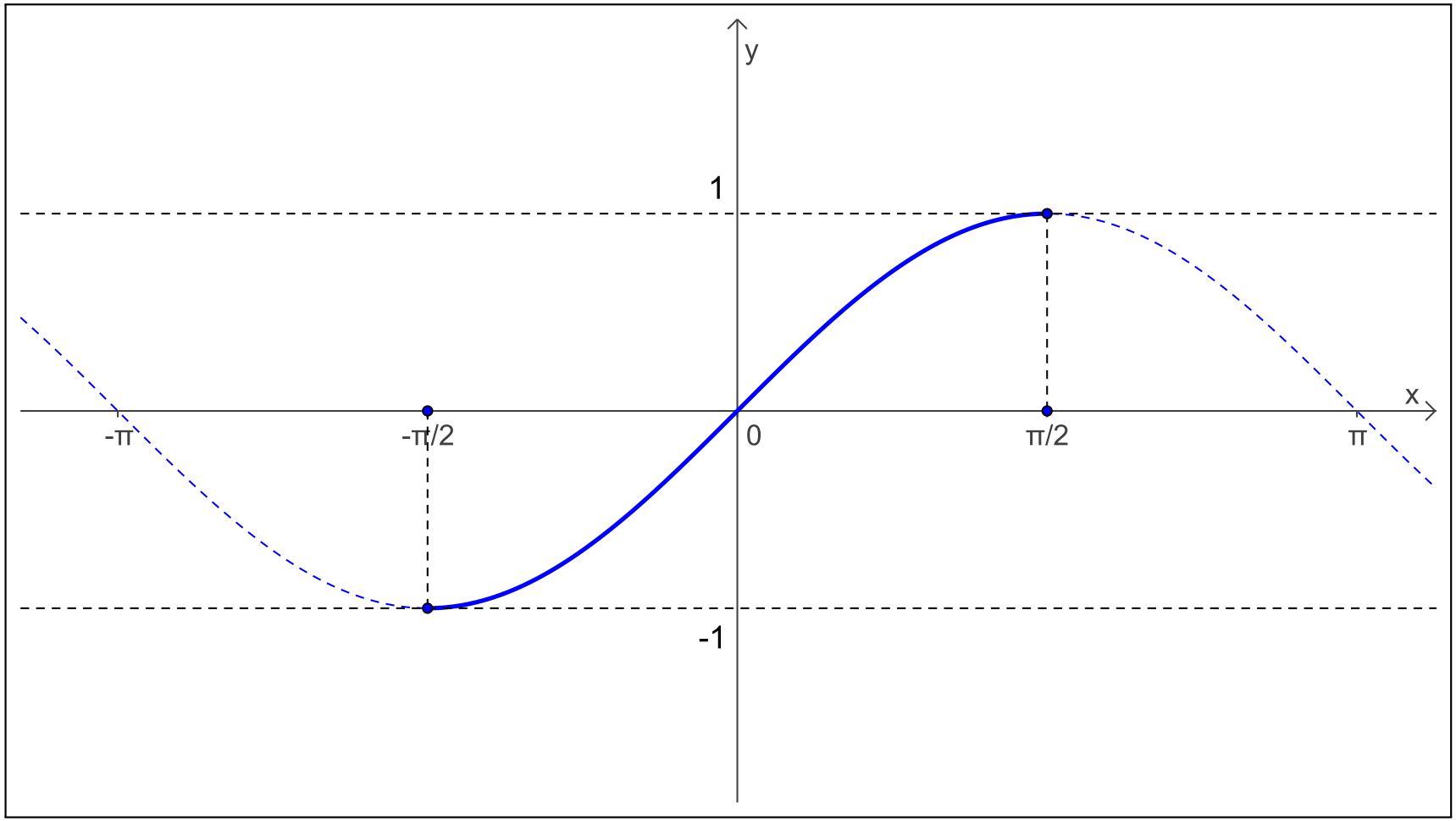
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$

não é inversível, pois não é injetiva.



A função arco seno

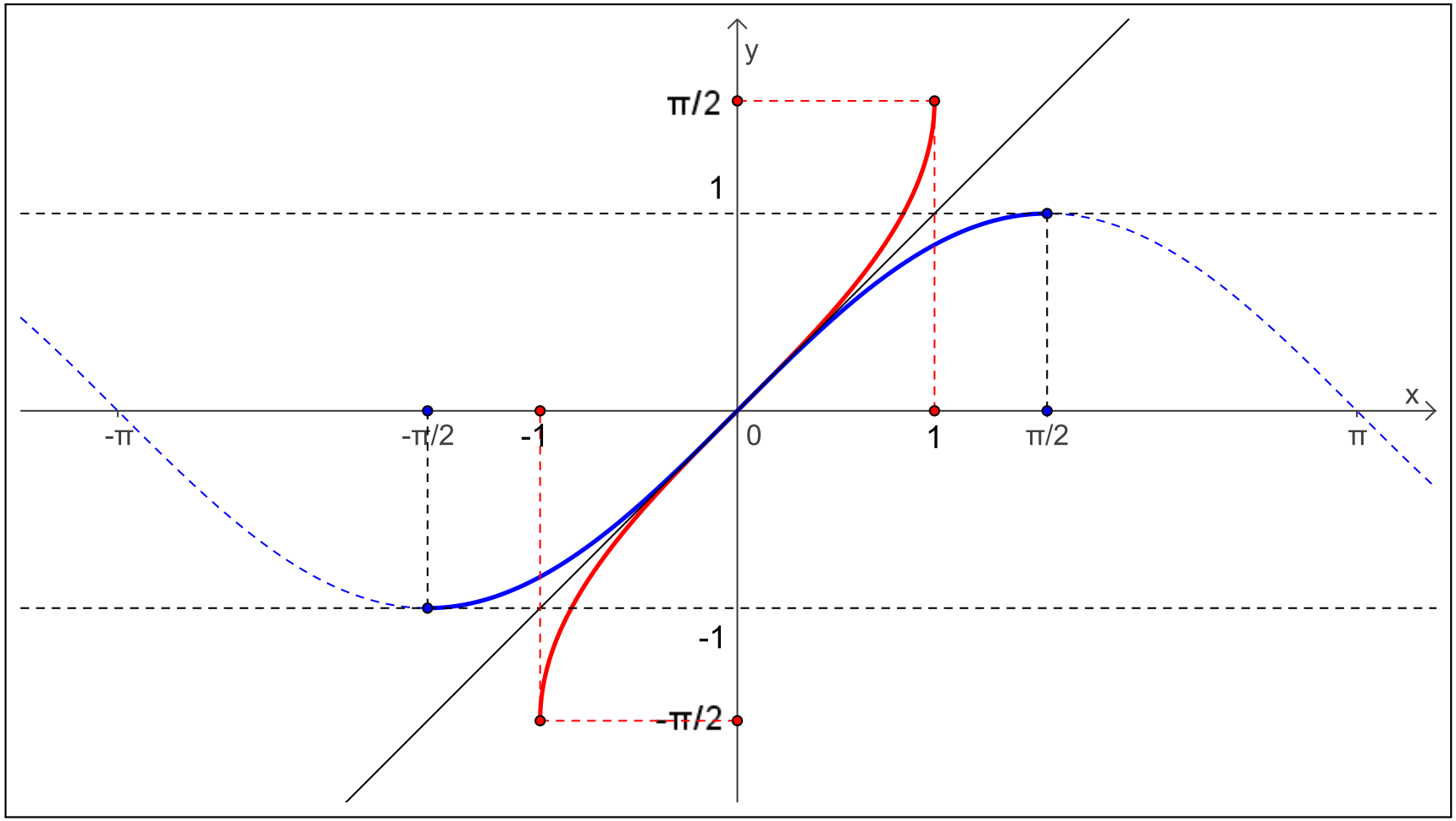
$$f: \begin{array}{rcl} [-\pi/2, +\pi/2] & \to & [-1, +1] \\ x & \mapsto & y = f(x) = \text{sen}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



A função arco seno

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \quad [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$

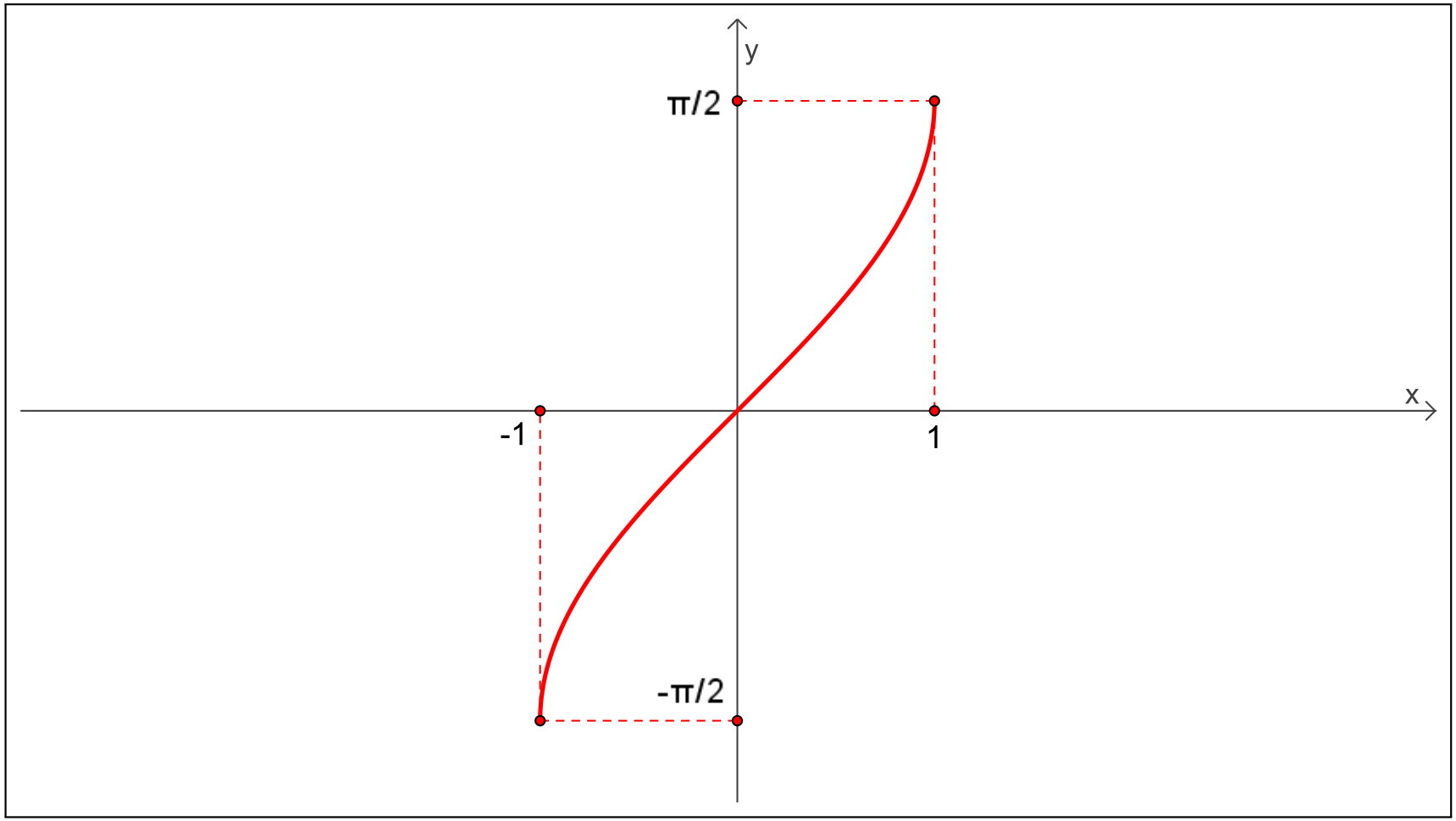
é sua função inversa.



Exemplo

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [-\pi/2,+\pi/2] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x) \end{array}$$

é sua função inversa.



A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1$$

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1$$

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2$$

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

A função arco seno

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$.

Mostre que $\cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

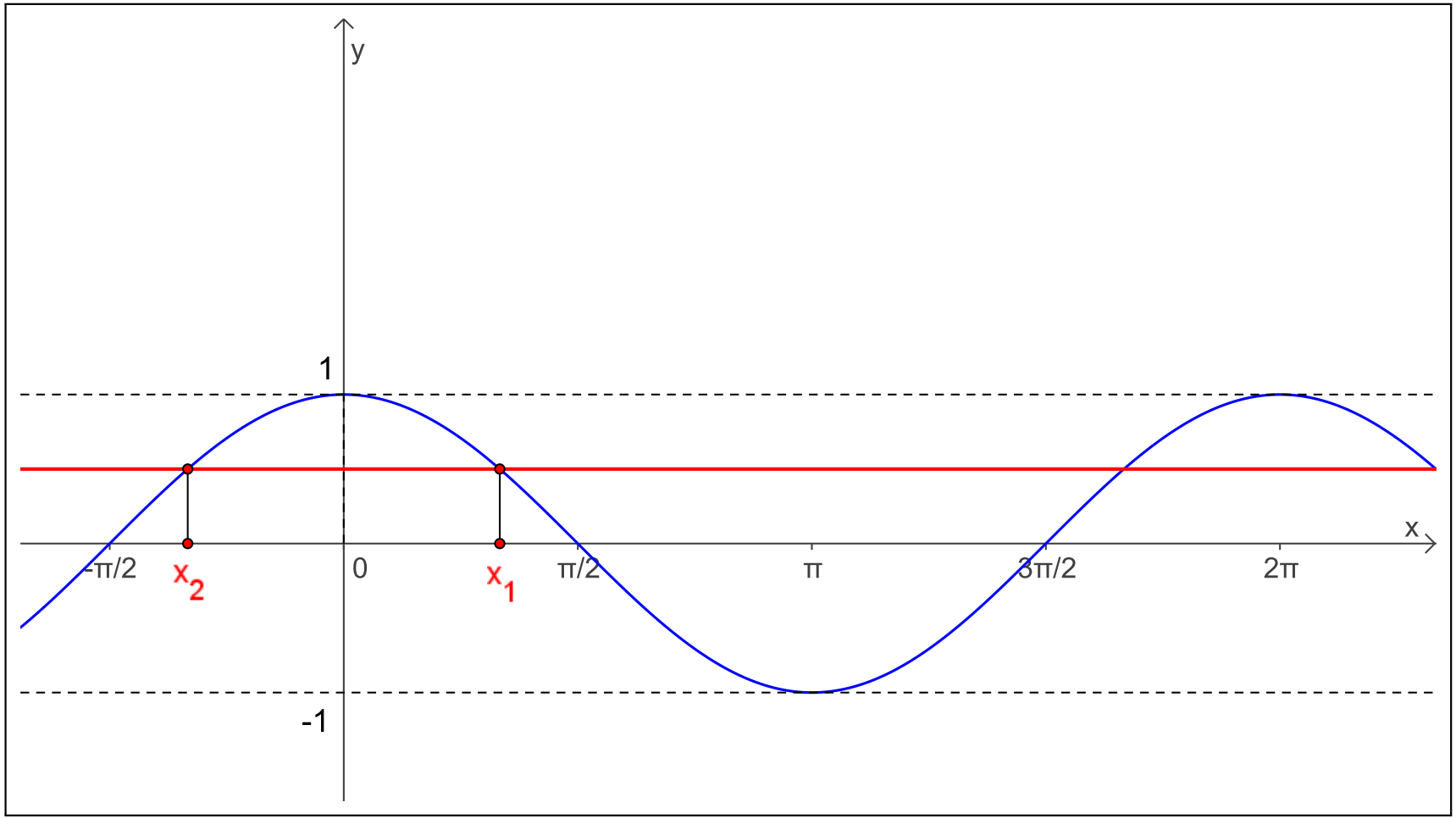
$$
\begin{aligned}
[\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 + x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\cos(\text{arcsen}(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\cos(\text{arcsen}(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\cos(\text{arcsen}(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \cos(\text{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\text{arcsen}(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ e, assim, $\cos(\text{arcsen}(x)) > 0$. ■

A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$

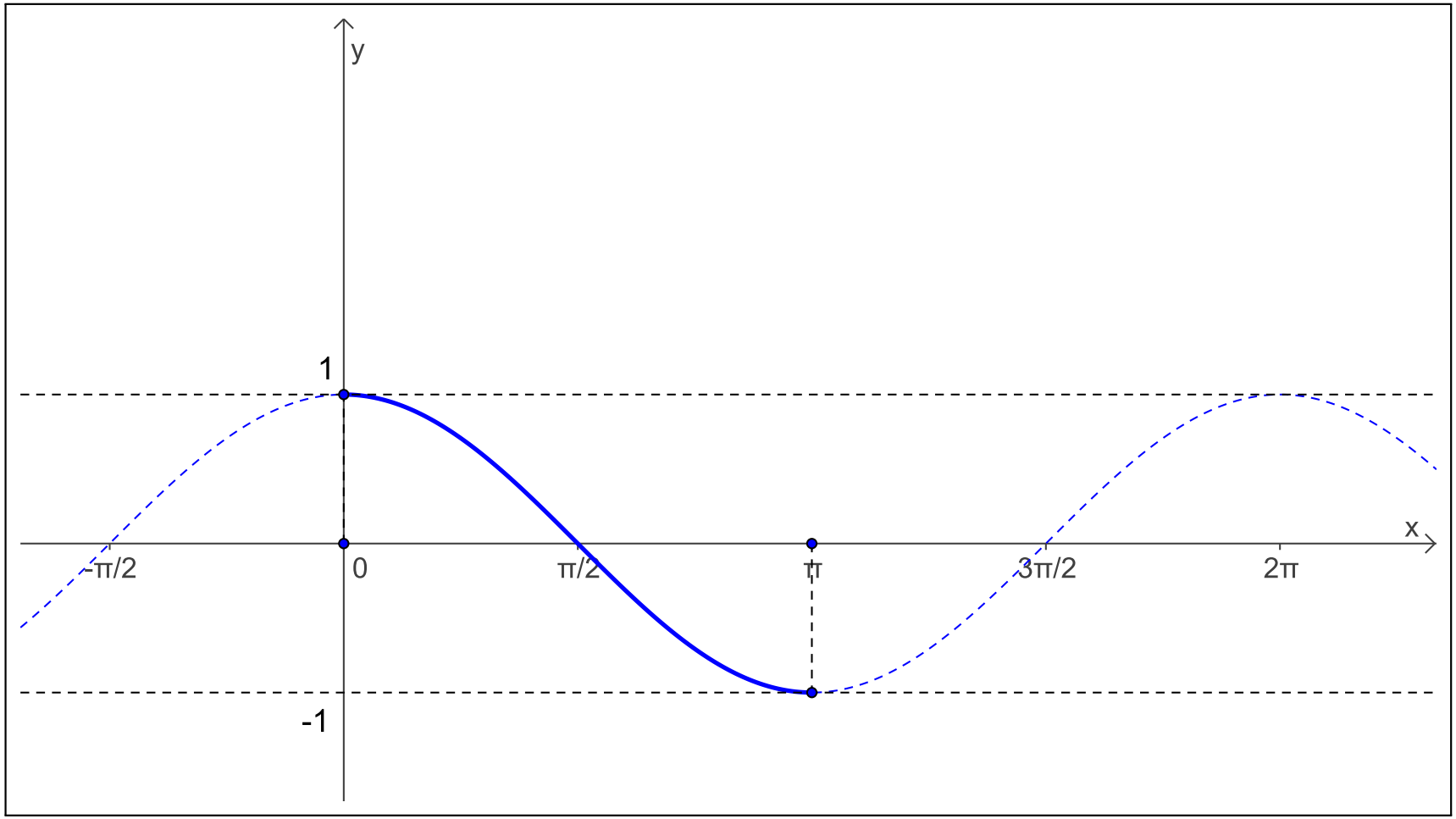
não é inversível, pois não é injetiva.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,\pi] & \to & [-1,+1] \\ & x & \mapsto & y = f(x) = \cos(x) \end{array}$$

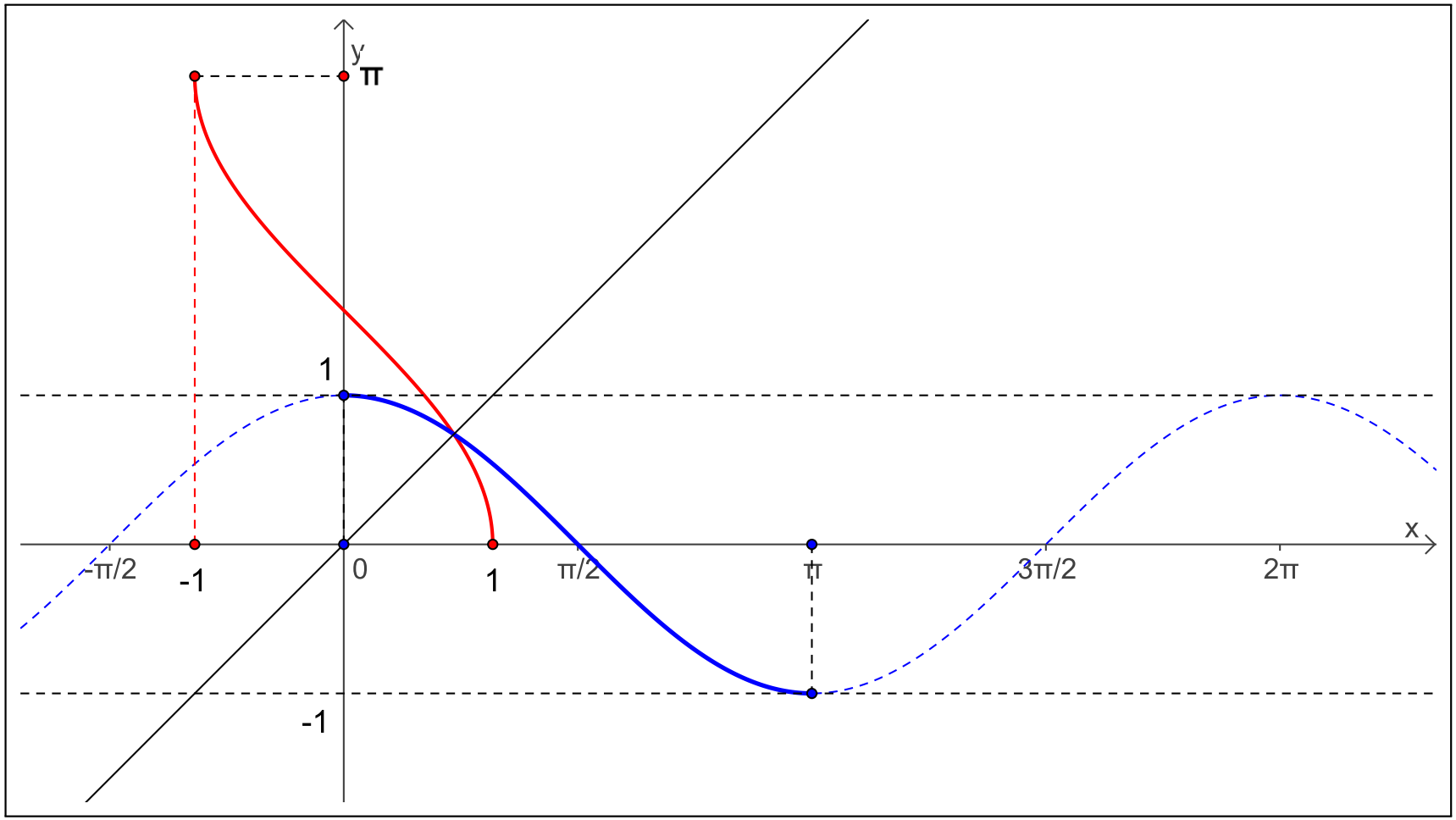
é inversível, pois é bijetiva.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$$

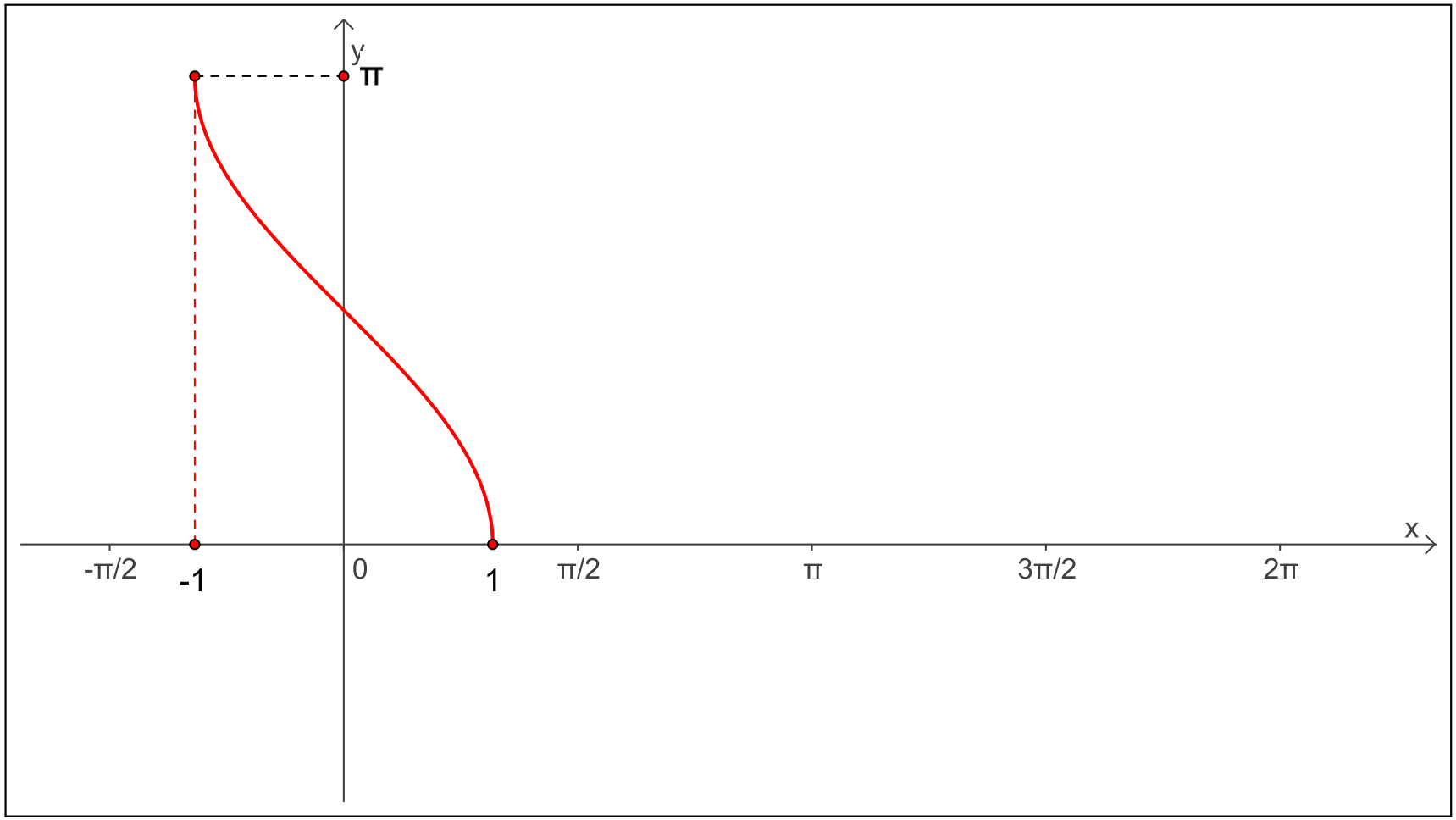
é sua função inversa.



A função arco cosseno

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & [-1,+1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$$

é sua função inversa.



A função arco cosseno

Mostre que $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

A função arco cosseno

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

A função arco cosseno

Mostre que $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$[\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1$$

A função arco cosseno

Mostre que $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$[\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1$$

A função arco cosseno

Mostre que $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$

Mostre que $\text{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\text{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1, +1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\arccos(x) \in (0,\pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$.

Mostre que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in (-1,+1)$.

Demonstração.

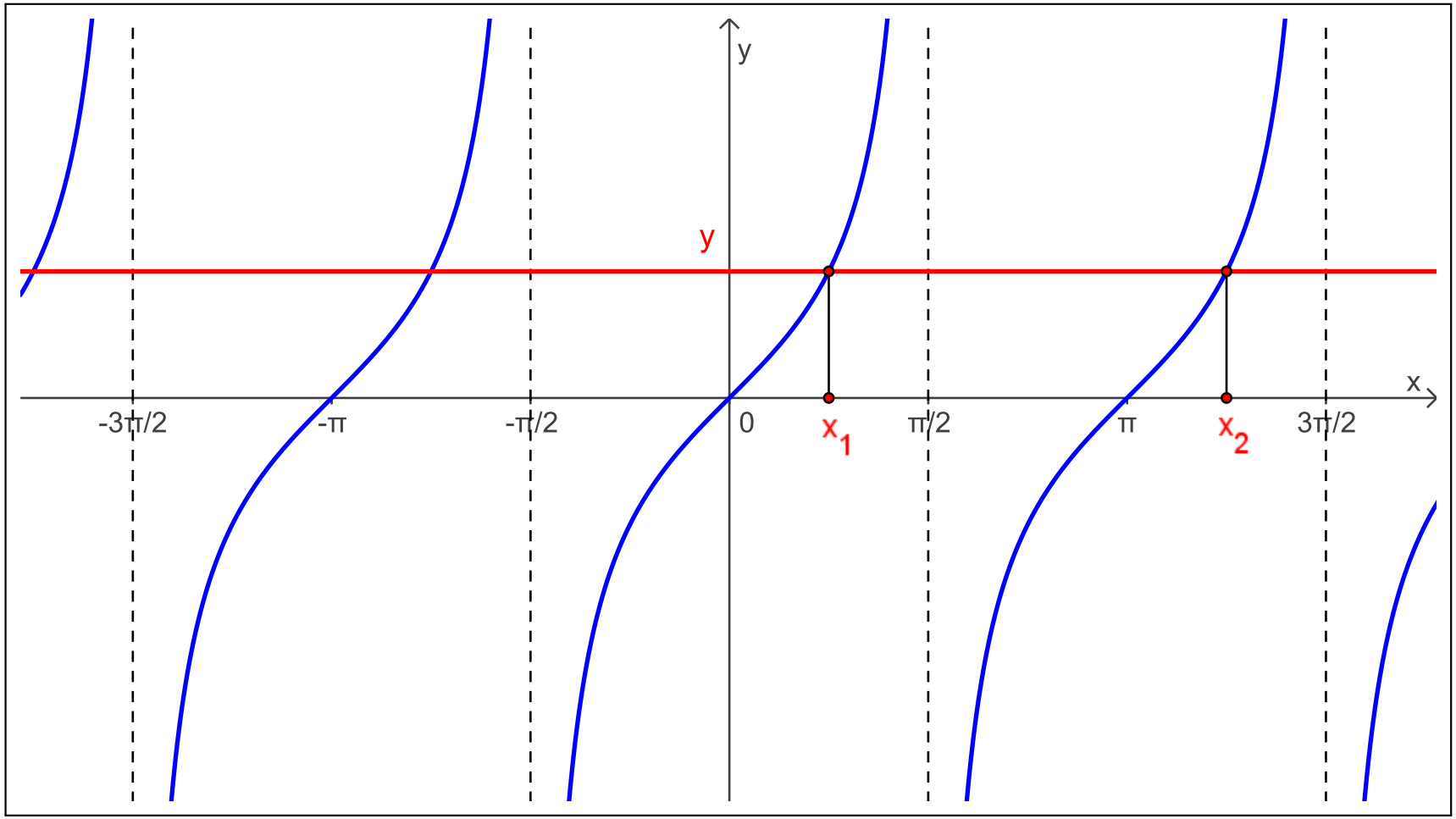
$$
\begin{aligned}
[\cos(\arccos(x))]^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad [\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{[\operatorname{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad |\operatorname{sen}(\arccos(x))| = \sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2},
\end{aligned}
$$

pois se $x \in (-1,+1)$, então $\arccos(x) \in (0,\pi)$ e, assim, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) > 0$. ■

A função arco tangente

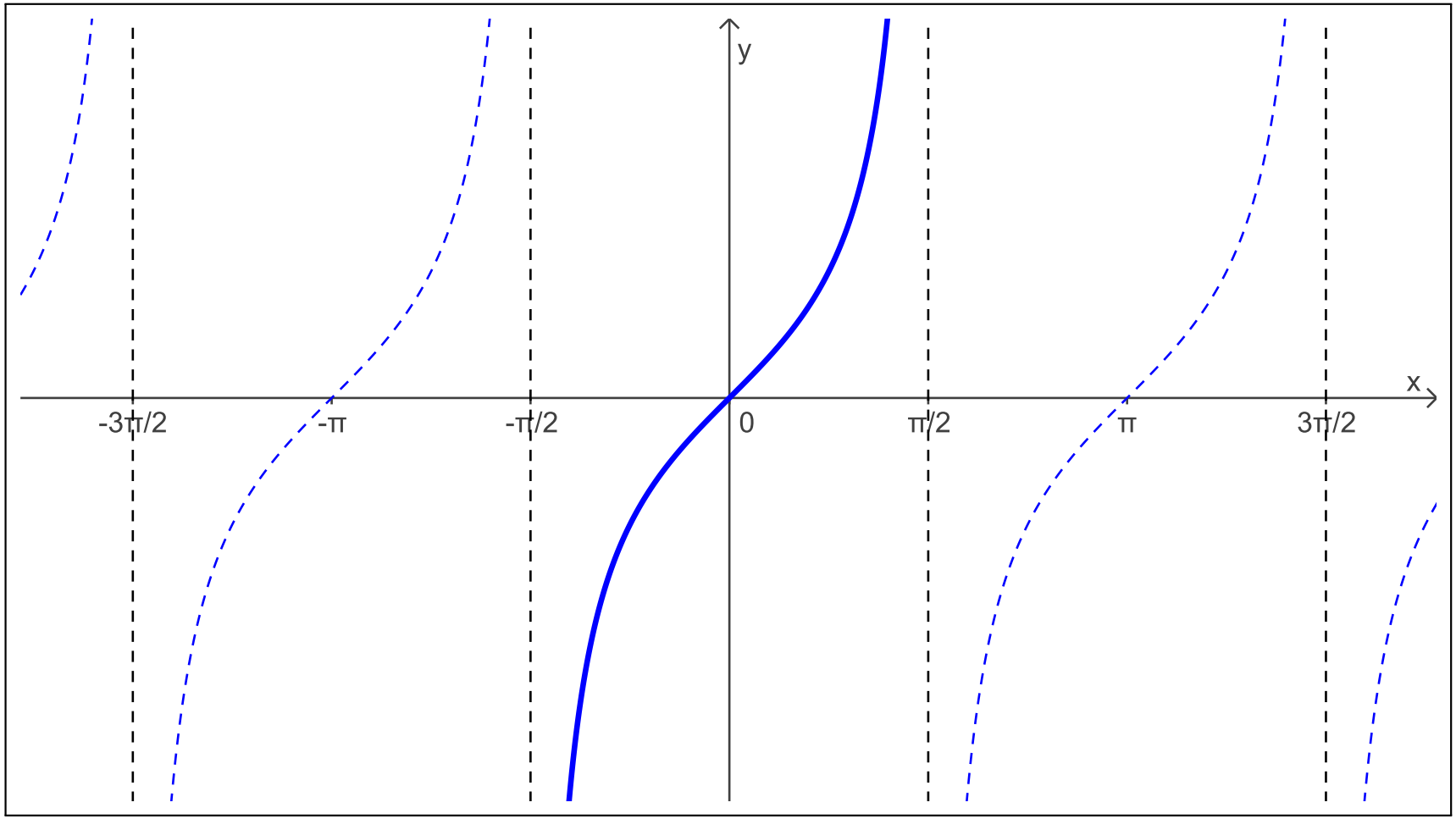
$$f: \quad \mathbb{R} - \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = \mathrm{tg}(x)$$

não é inversível.



A função arco tangente

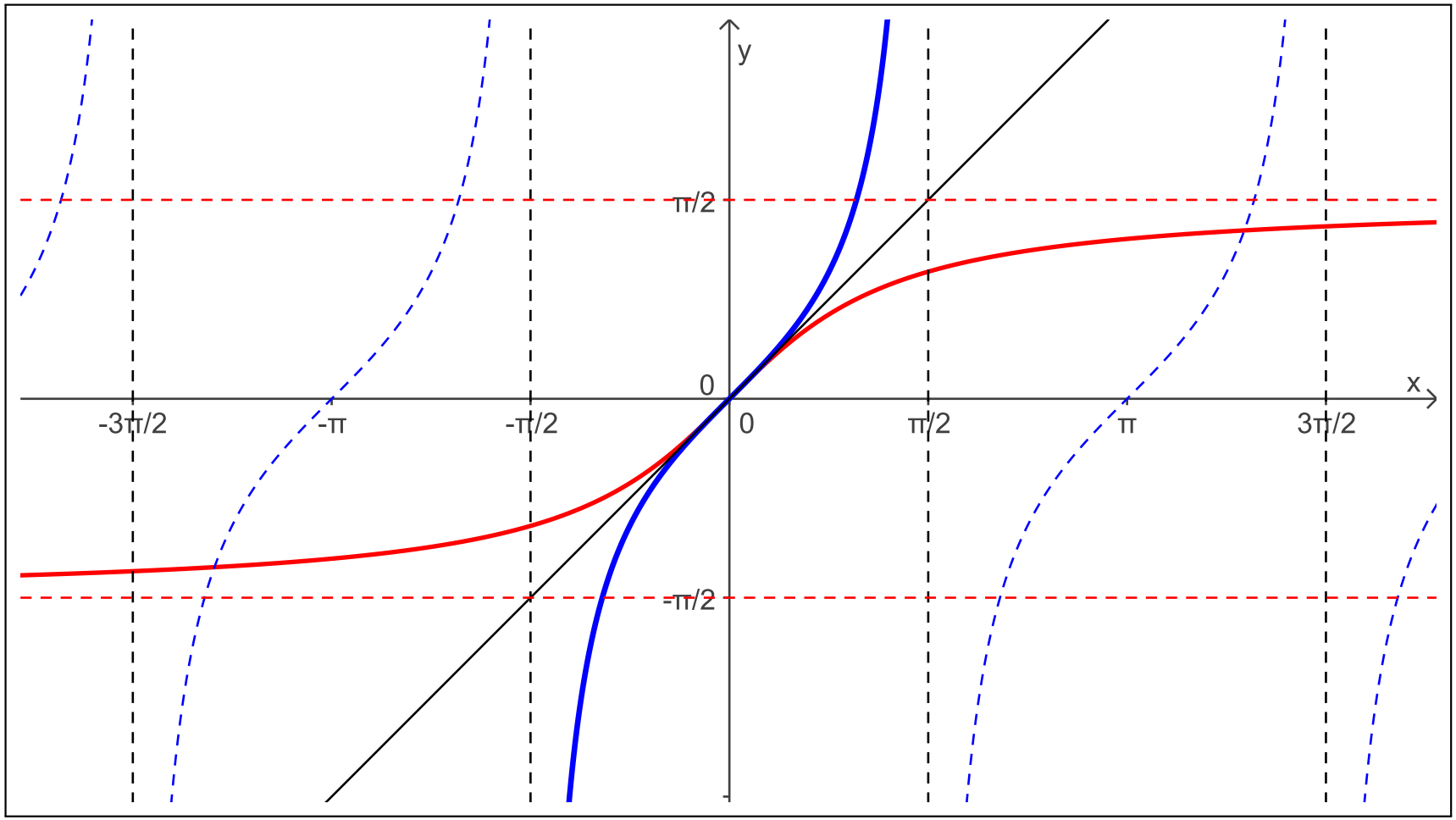
$$f: \begin{array}{rcl} (-\pi/2, +\pi/2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = \mathrm{tg}(x) \end{array}$$ é inversível, pois é bijetiva.



A função arco tangente

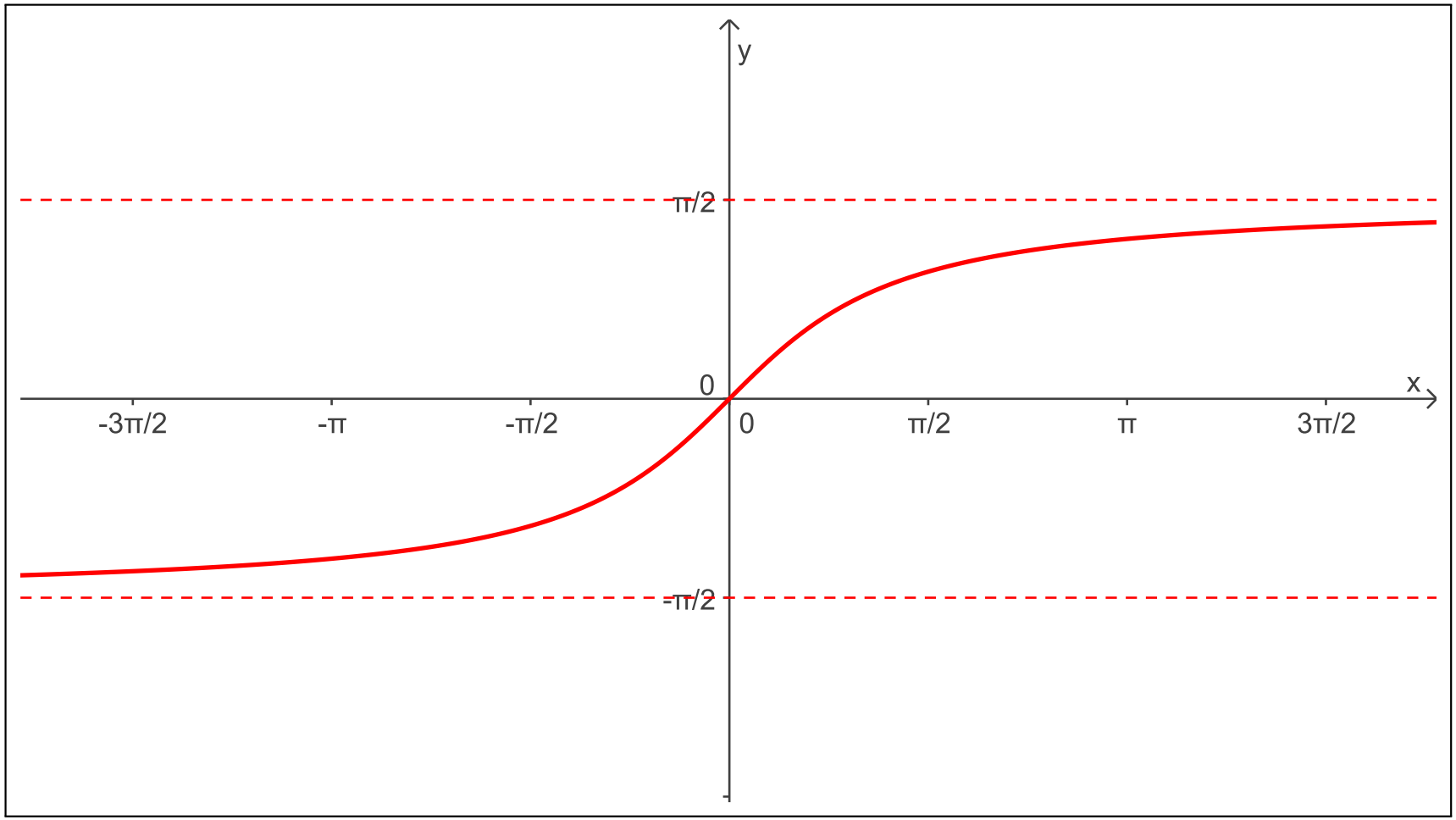
$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ & x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x) \end{array}$$

é sua função inversa.



A função arco tangente

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & (-\pi/2, +\pi/2) \\ x & \mapsto & y = f^{-1}(x) = \text{arctg}(x) \end{array}$$ é sua função inversa.



A função arco tangente

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

A função arco tangente

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$\blacksquare$

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

■

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

■

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$
$$\Downarrow$$
$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

■

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

■

Mostre que $\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

■

Funções monótonas

Função crescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Função crescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

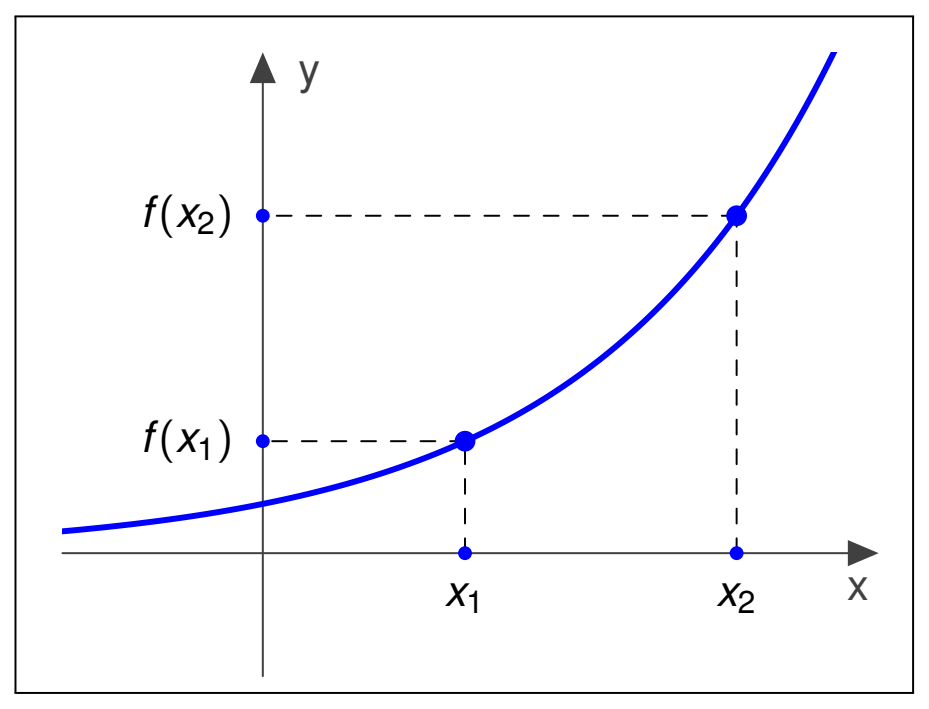
$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Função crescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$



Funções decrescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Funções decrescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

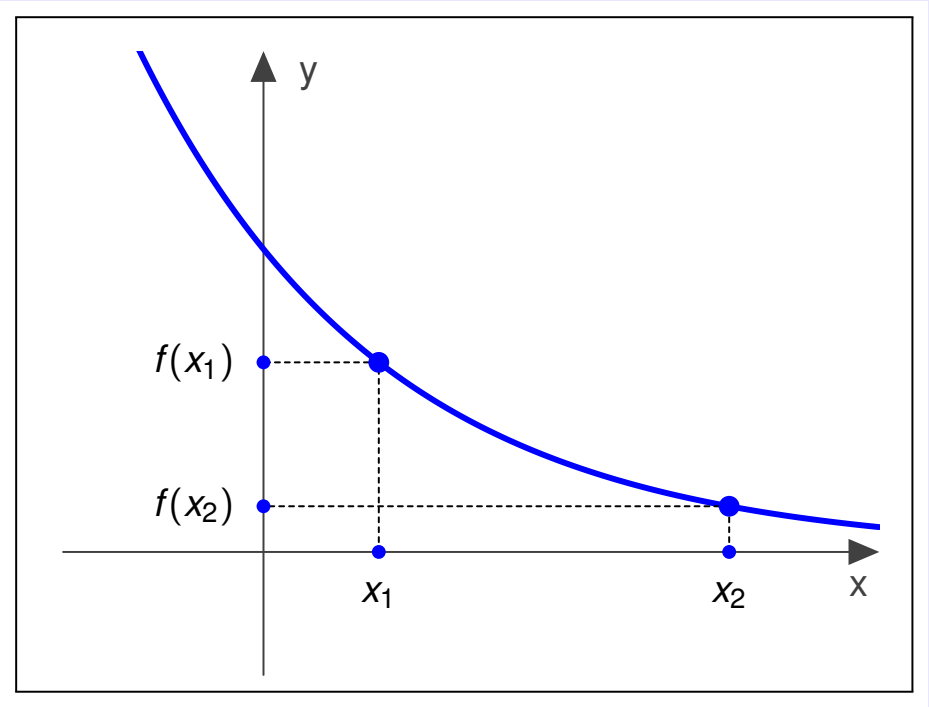
$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Funções decrescente

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

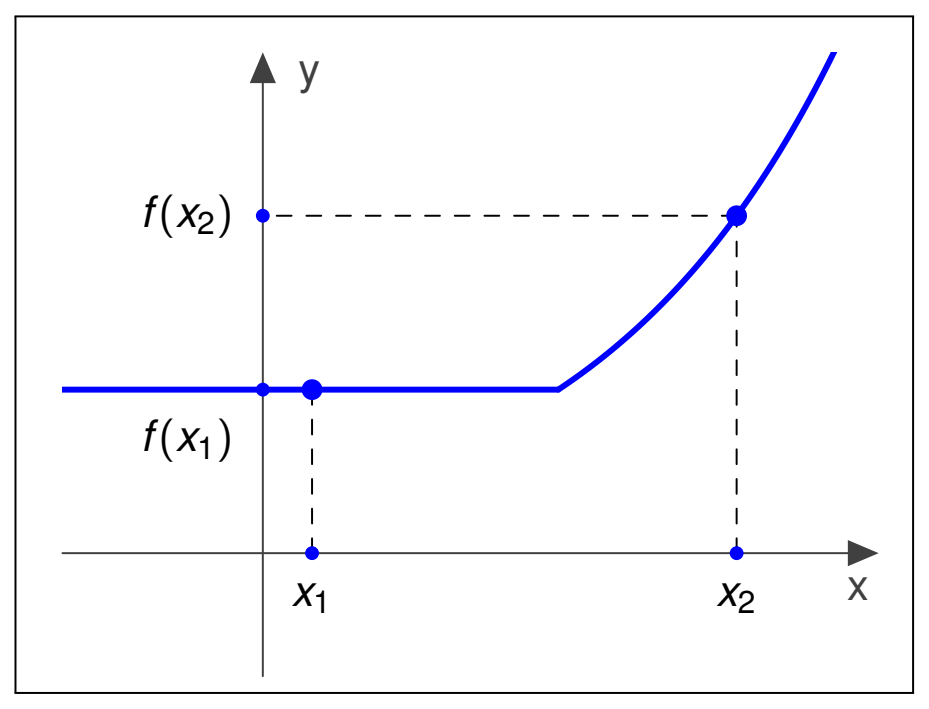
$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

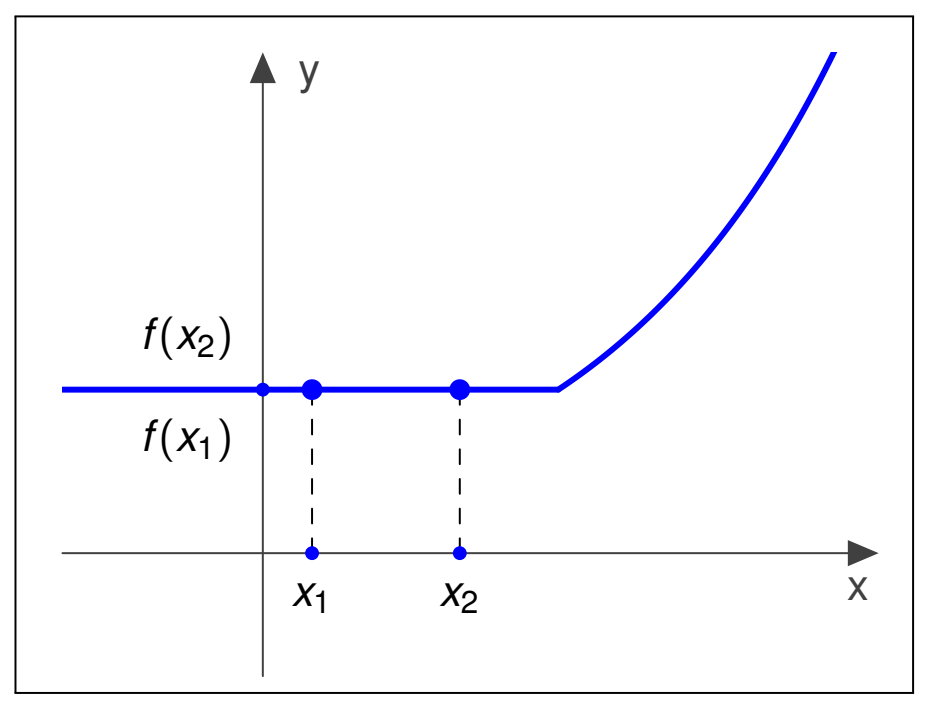


Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$



Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

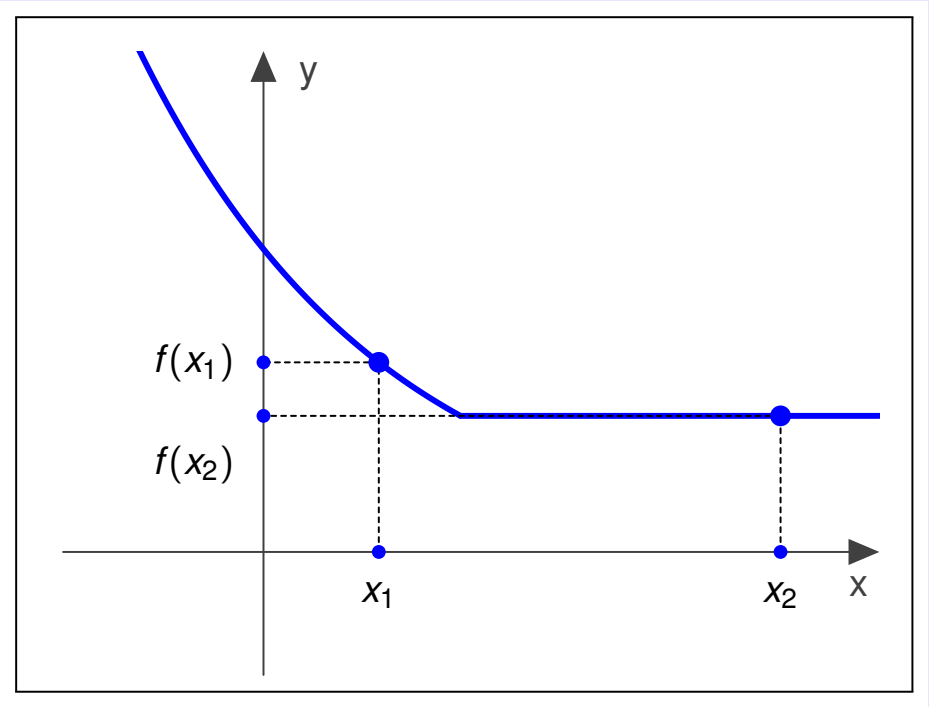
$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

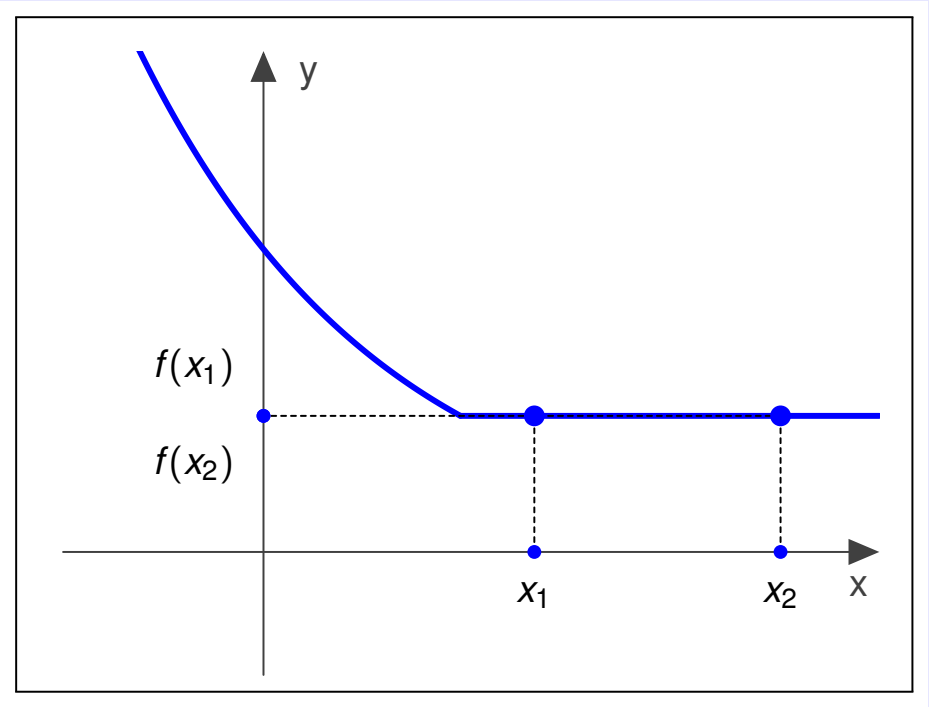


Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$



Observações

Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.

Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.
- Note que toda função crescente em um conjunto S também é monótona não-decrescente neste conjunto

Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.

- Note que toda função crescente em um conjunto S também é monótona não-decrescente neste conjunto e que toda função decrescente em um conjunto S também é monótona não-crescente neste conjunto.

Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.
- Note que toda função crescente em um conjunto S também é monótona não-decrescente neste conjunto e que toda função decrescente em um conjunto S também é monótona não-crescente neste conjunto.
- Uma função é estritamente monótona em um conjunto S se ou ela é crescente ou ela é decrescente neste conjunto.

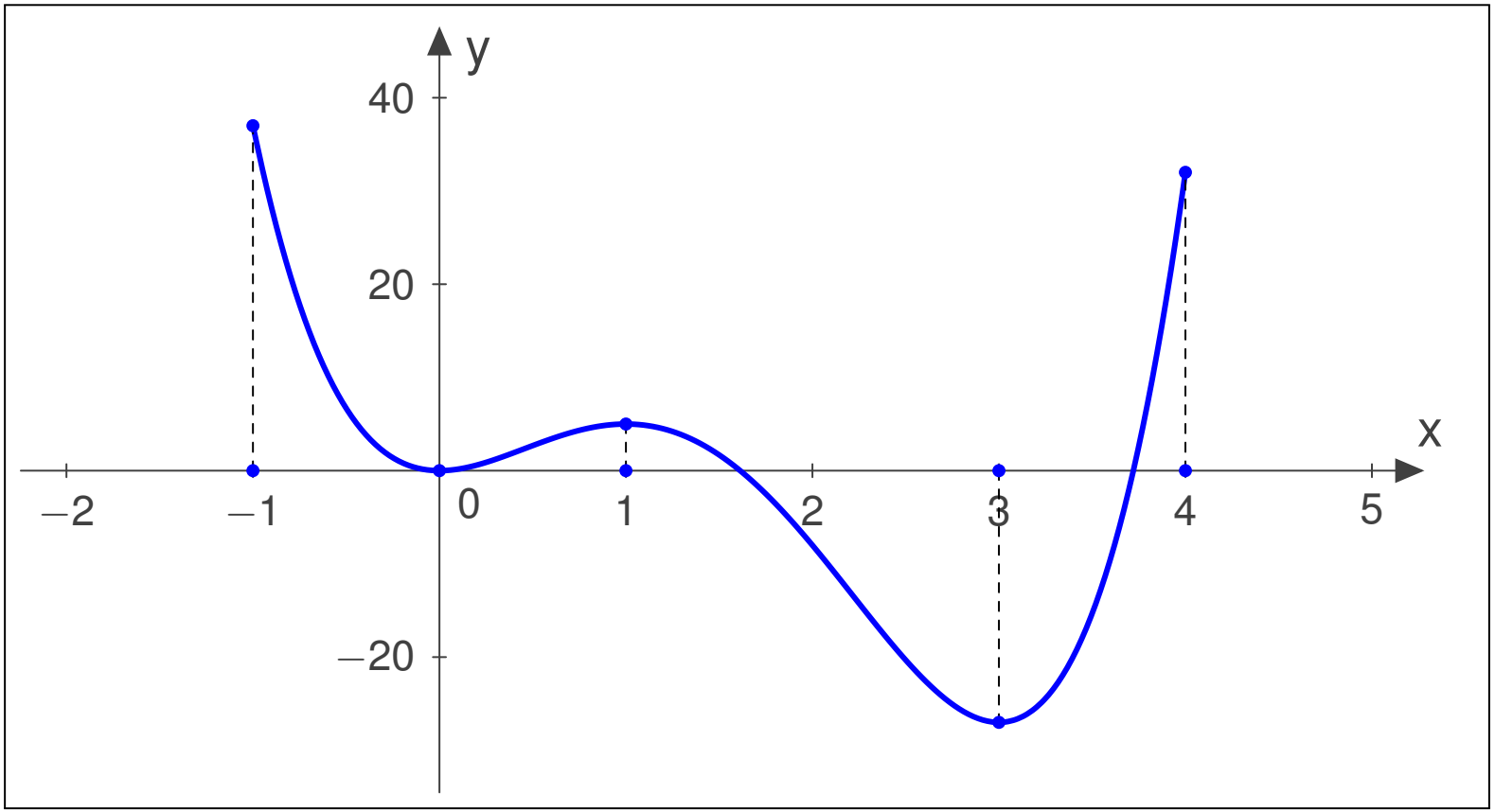
Observações

Observações

- Existem funções que não são monótonas.

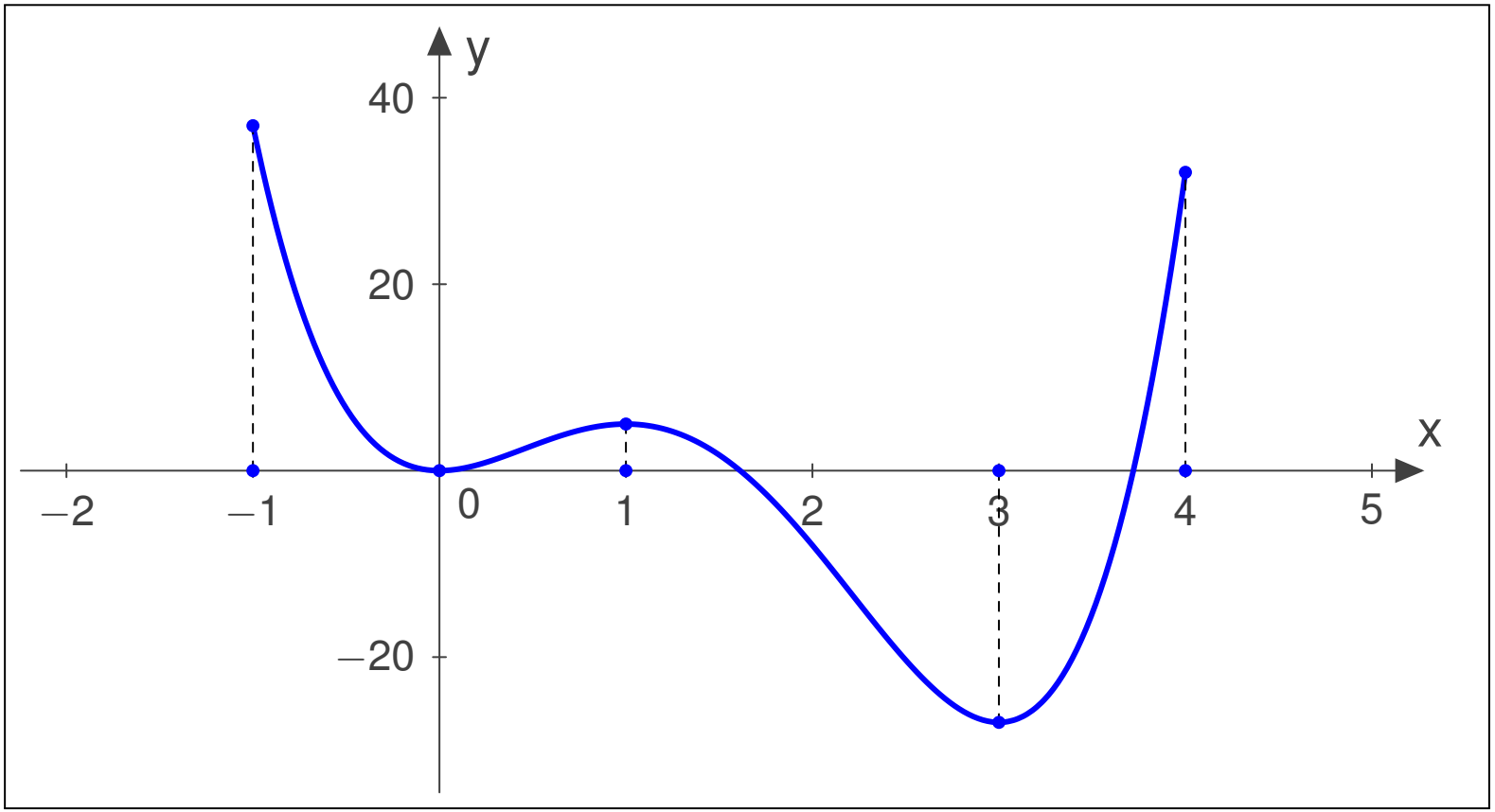
Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$.



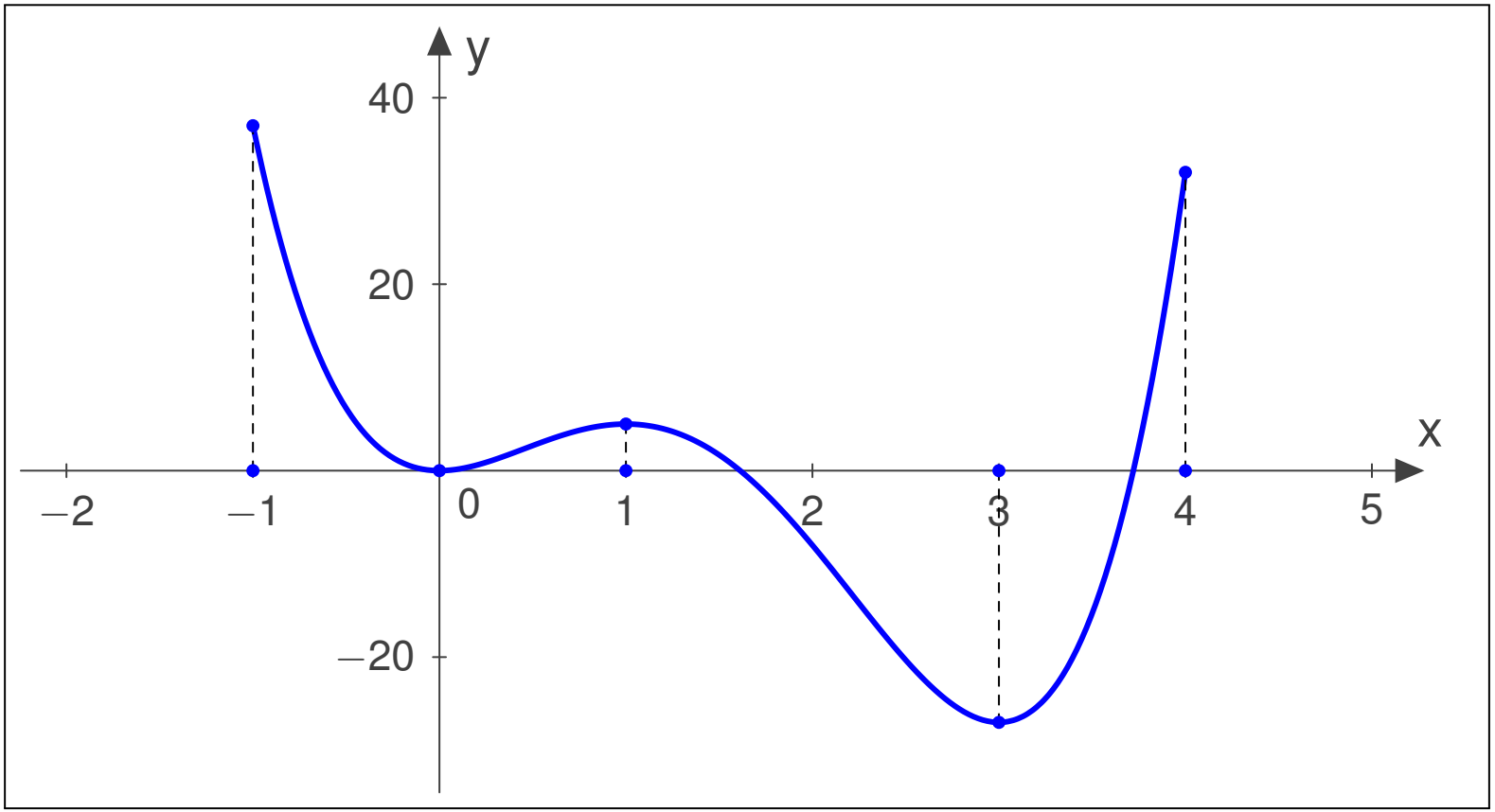
Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$



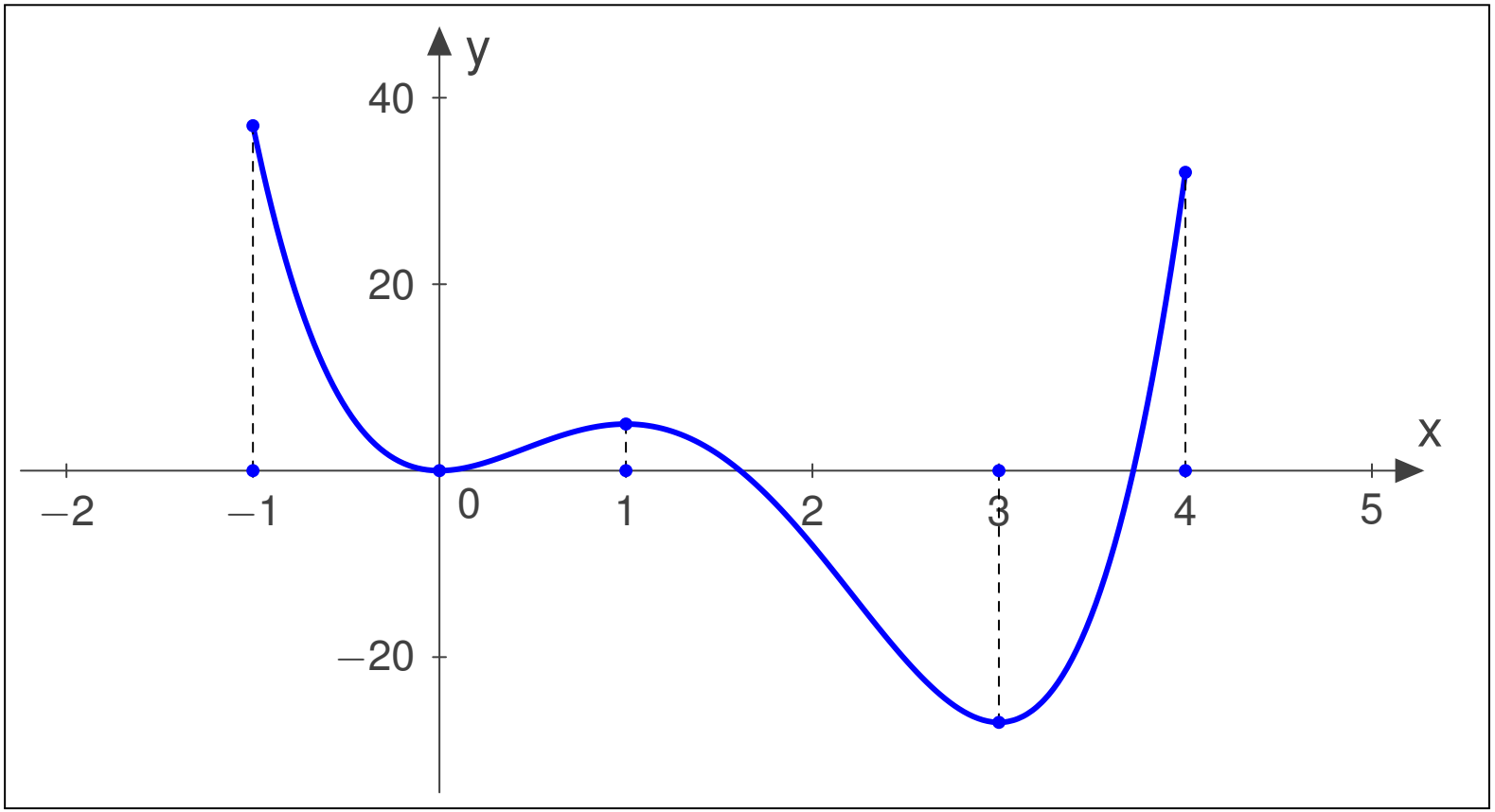
Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$, em $[0, 1]$



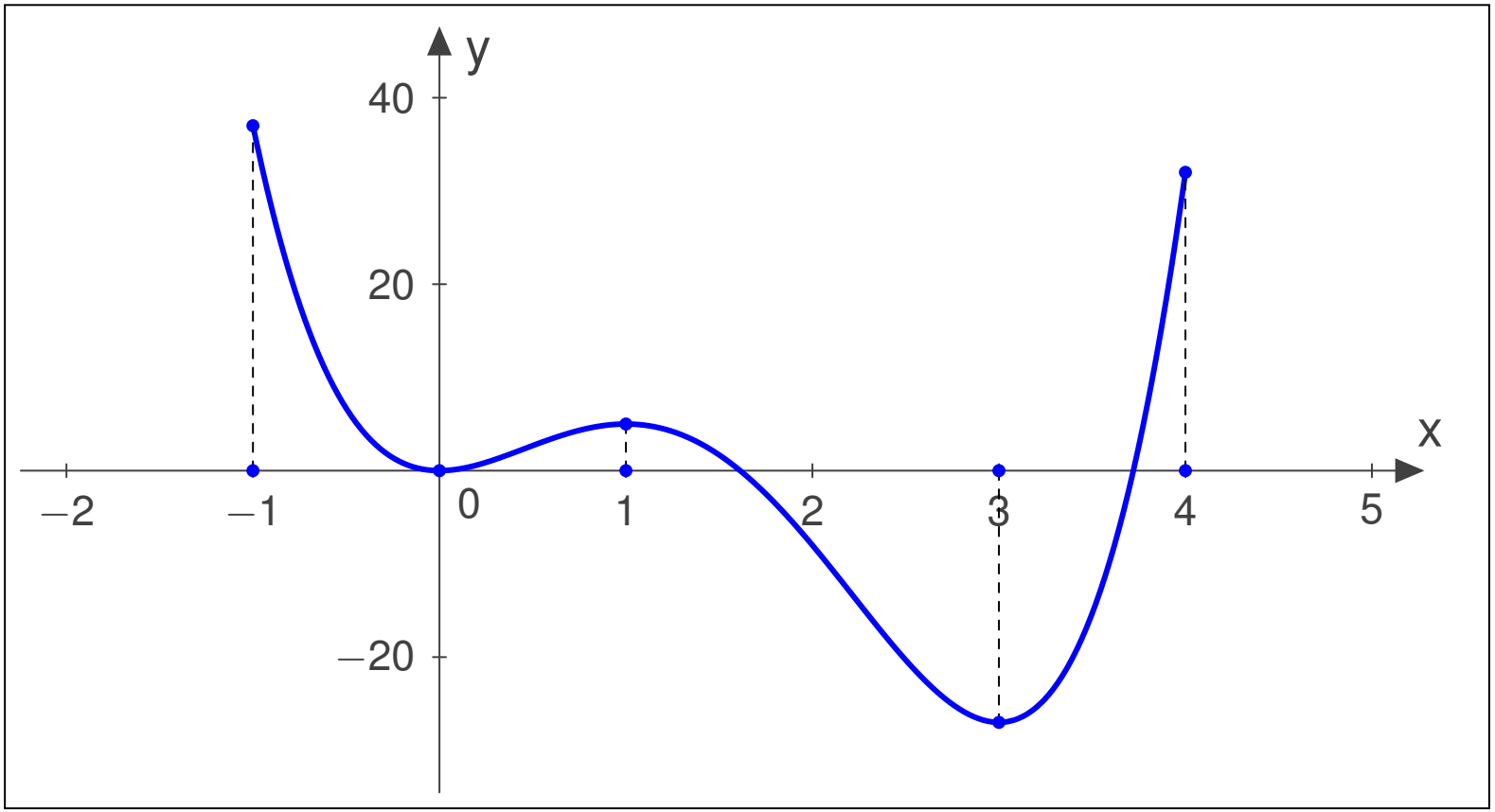
Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$, em $[0, 1]$, em $[1, 3]$



Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$, em $[0, 1]$, em $[1, 3]$ e em $[3, 4]$.



Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2$$

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos então que $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos então que $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é uma função crescente em S.

Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos então que $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é uma função crescente em S. ■

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

f é crescente nos intervalos

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

f é crescente nos intervalos

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}\right]$ e $\left[\frac{1+\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}, +\infty\right)$

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

f é crescente nos intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}\right] = (-\infty, 0.402806113\ldots] \text{ e } \left[\frac{1+\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}, +\infty\right) = [2.482583968\ldots, +\infty).$$

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

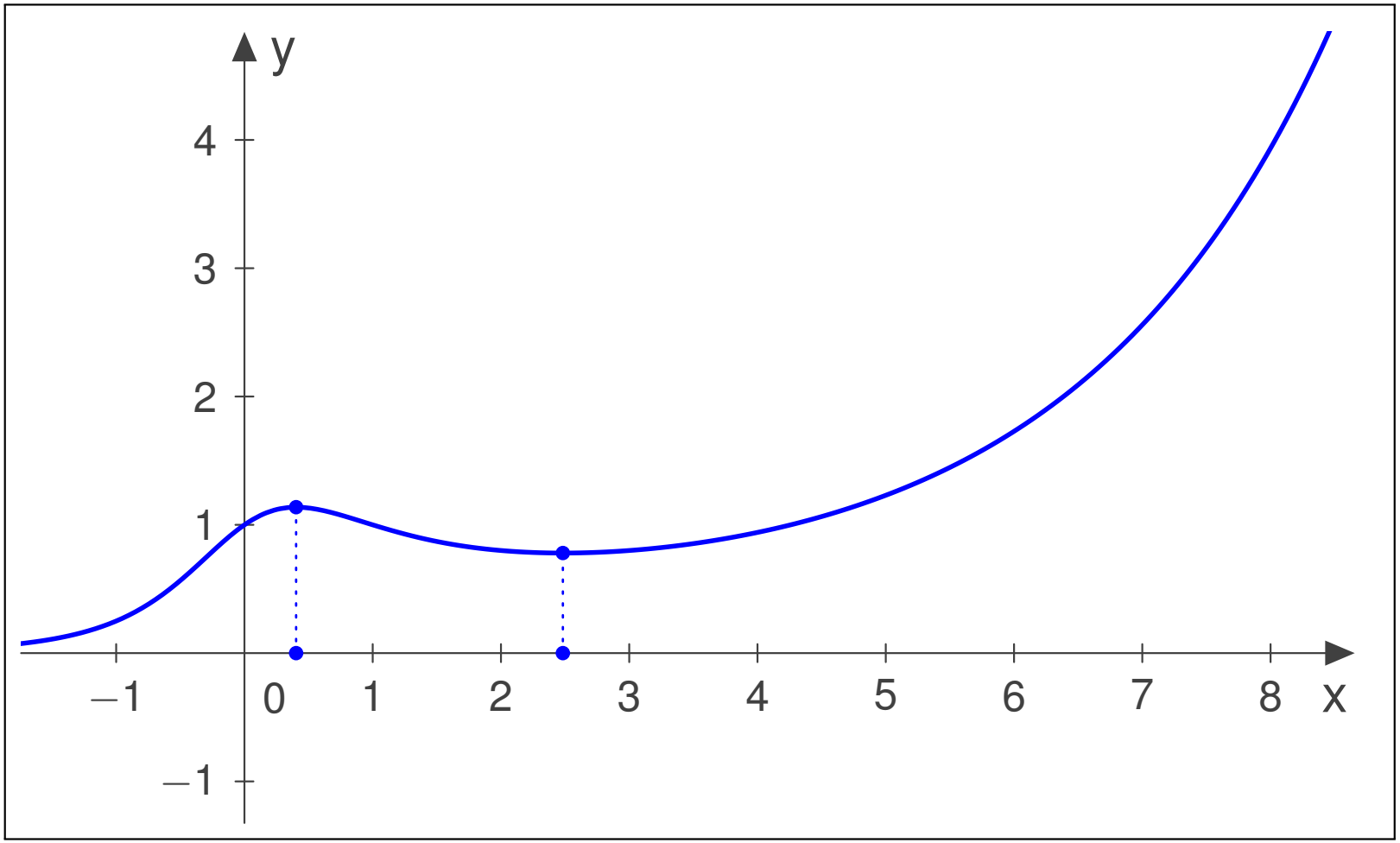
f é crescente nos intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}\right] = (-\infty, 0.402806113\ldots] \text{ e } \left[\frac{1+\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}, +\infty\right) = [2.482583968\ldots, +\infty).$$

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para se resolver questões deste tipo!

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$



Máximos e mínimos de funções reais

Extremos globais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Extremos globais

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo global (ou máximo absoluto) de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor máximo da função f em A.

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo global (ou mínimo absoluto) de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Neste caso, $f(p)$ é denominado de valor mínimo da função f em A.

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo global (ou extremo absoluto) de f em A se p é um ponto de máximo global ou p é um ponto de mínimo global de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Definição

Seja $f\colon D \to C$ uma função e seja A um subconjunto do domínio D.

(1) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

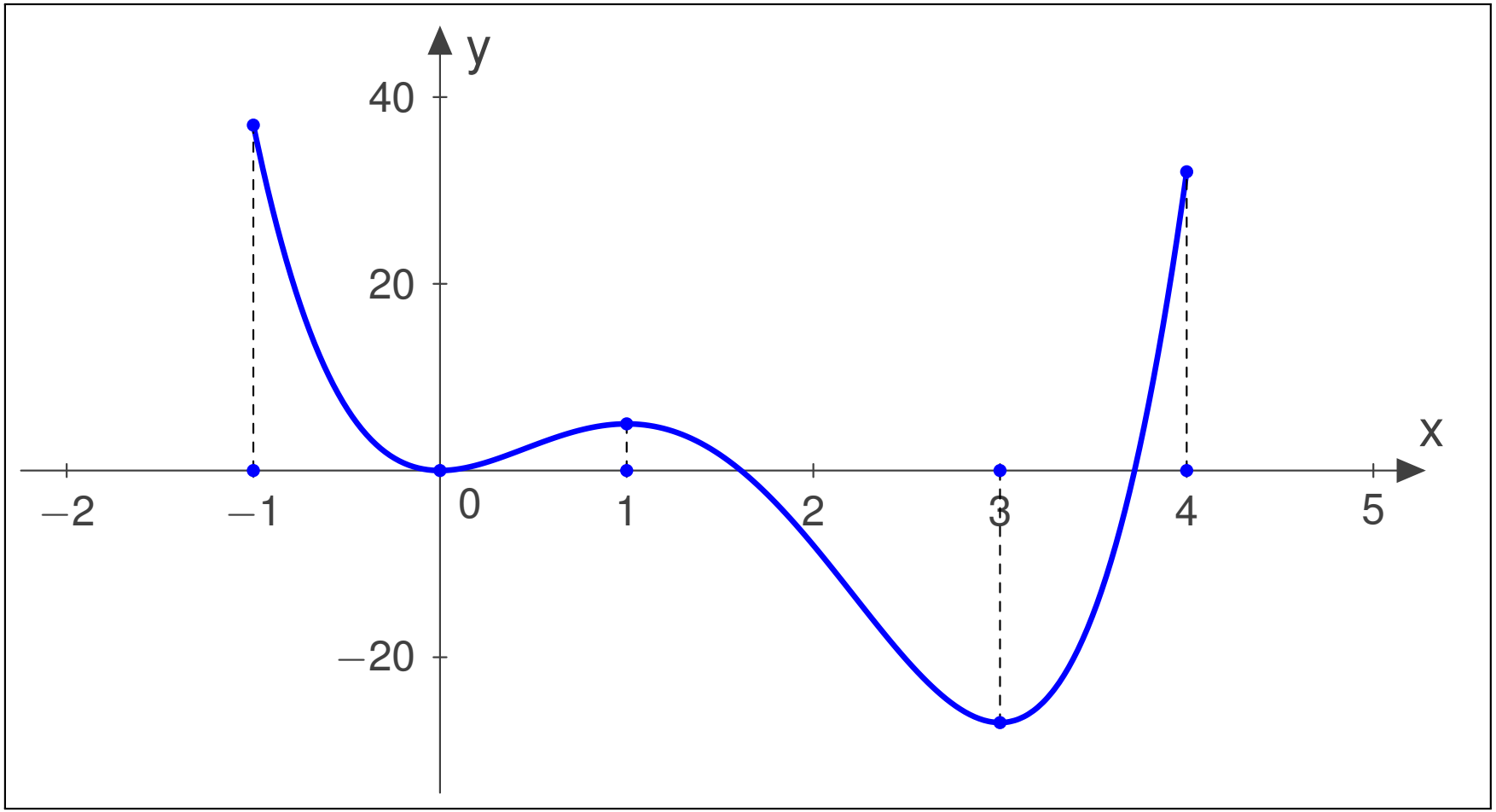
$$f(p) \geq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

(2) Dizemos que $p \in A$ é um ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f em A se existe um intervalo aberto I, com $p \in I$ e

$$f(p) \leq f(x), \qquad \forall x \in I \cap A.$$

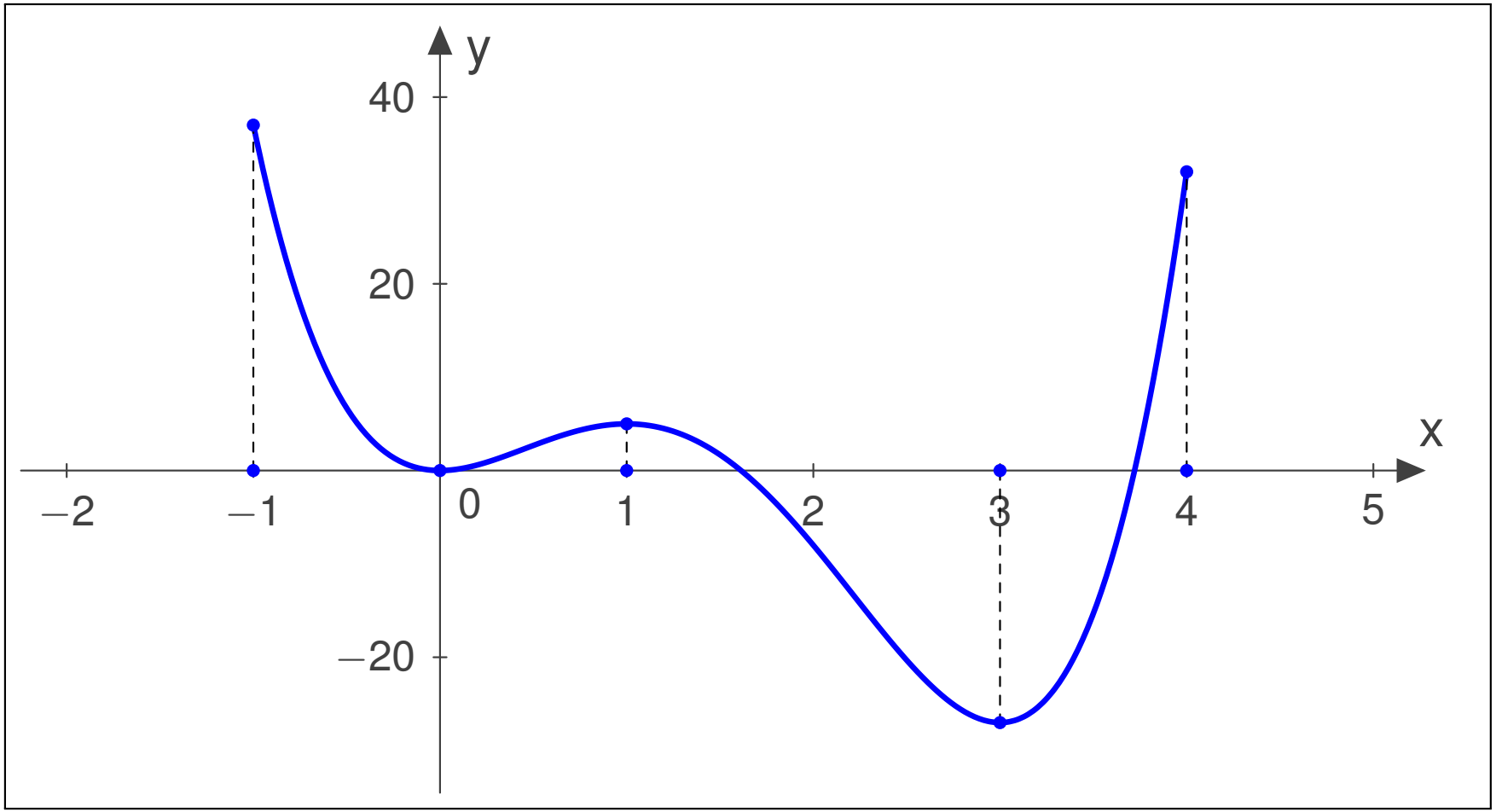
(3) Dizemos que $p \in A$ é um extremo local (ou extremo relativo) de f em A se p é um ponto de máximo local ou p é um ponto de mínimo local de f em A.

Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$



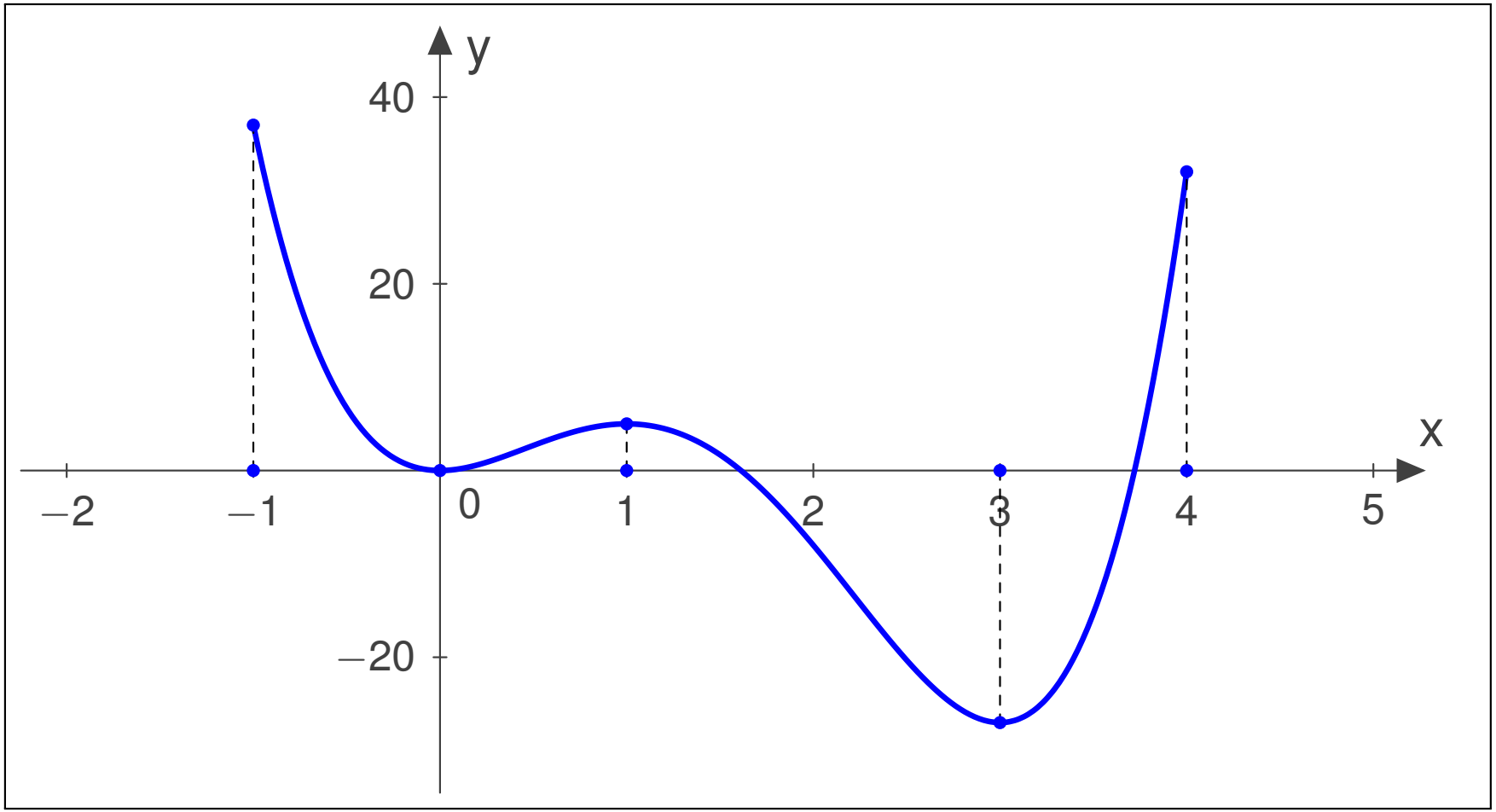
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p =$



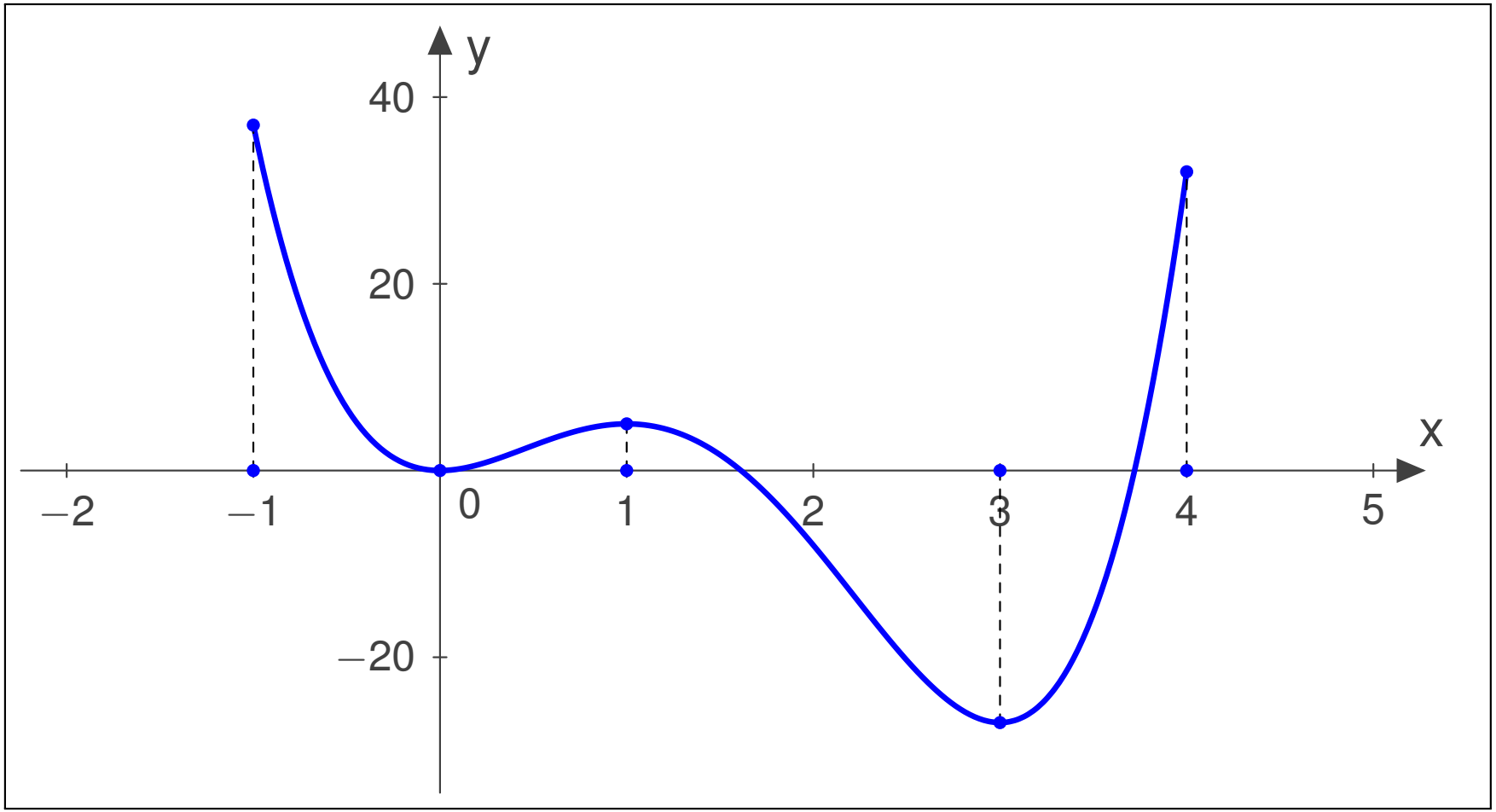
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de máximo global de f em A é $p = -1$.



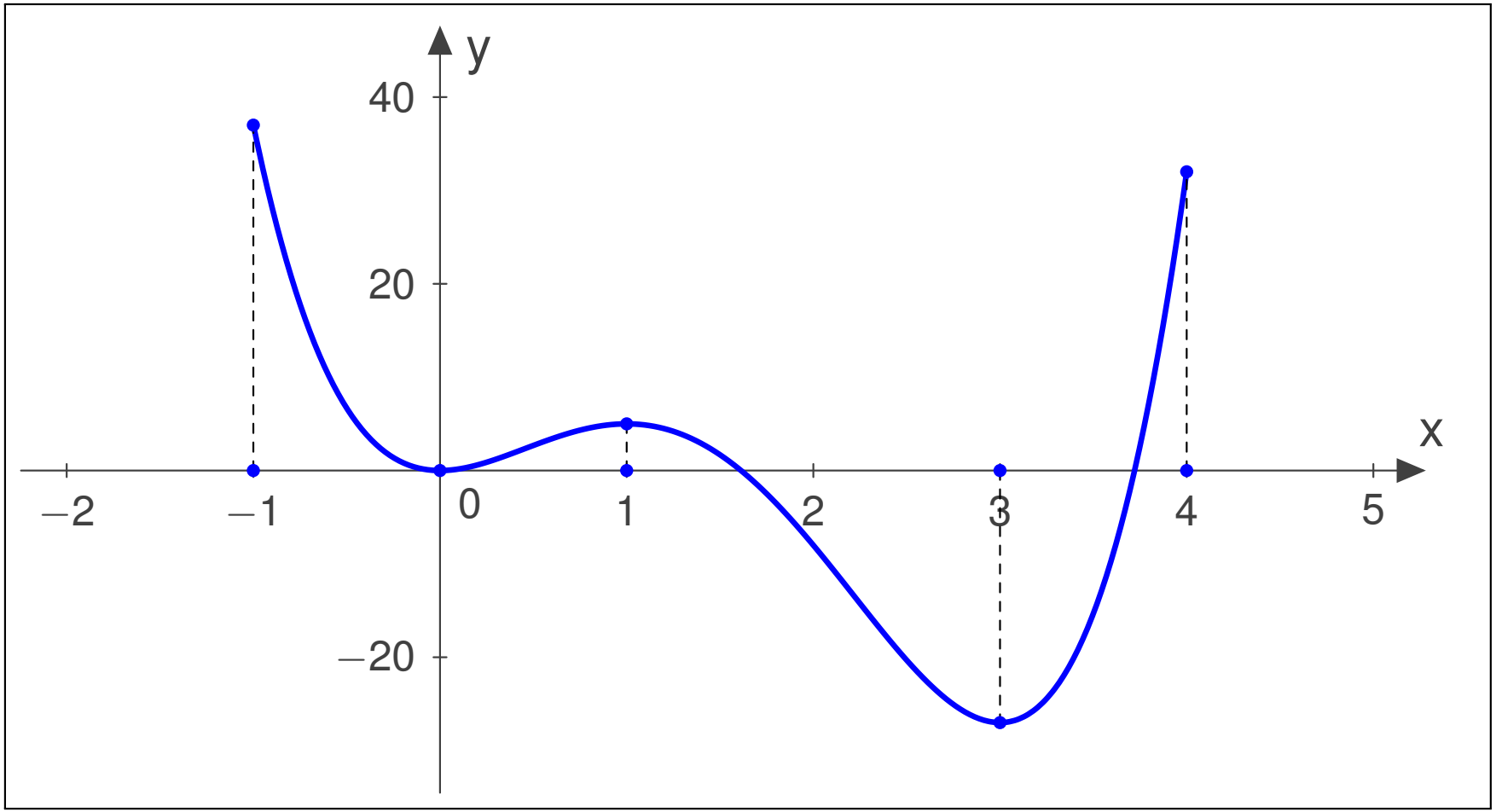
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo global de f em A é $p =$



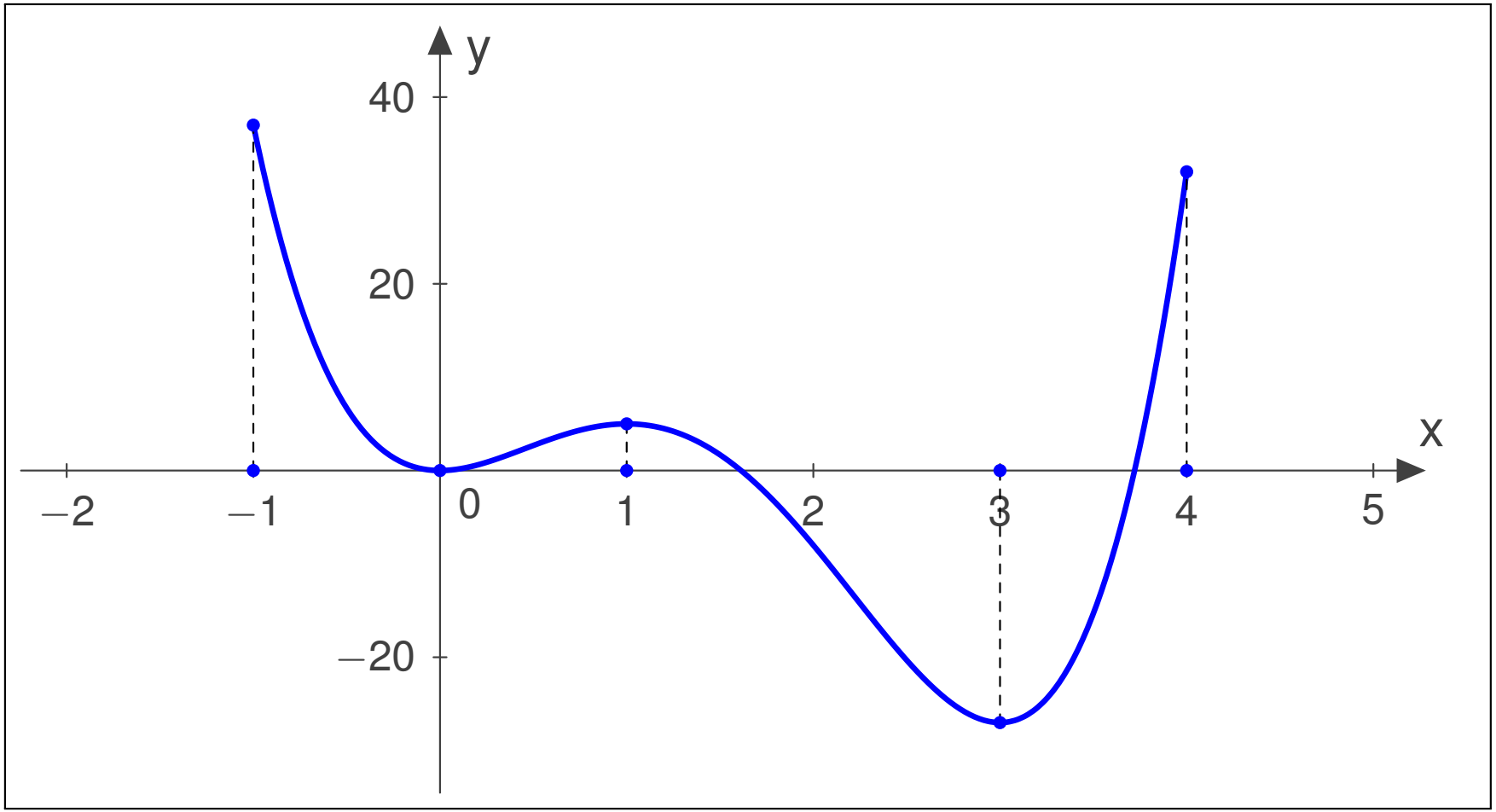
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo global de f em A é $p = 3$.



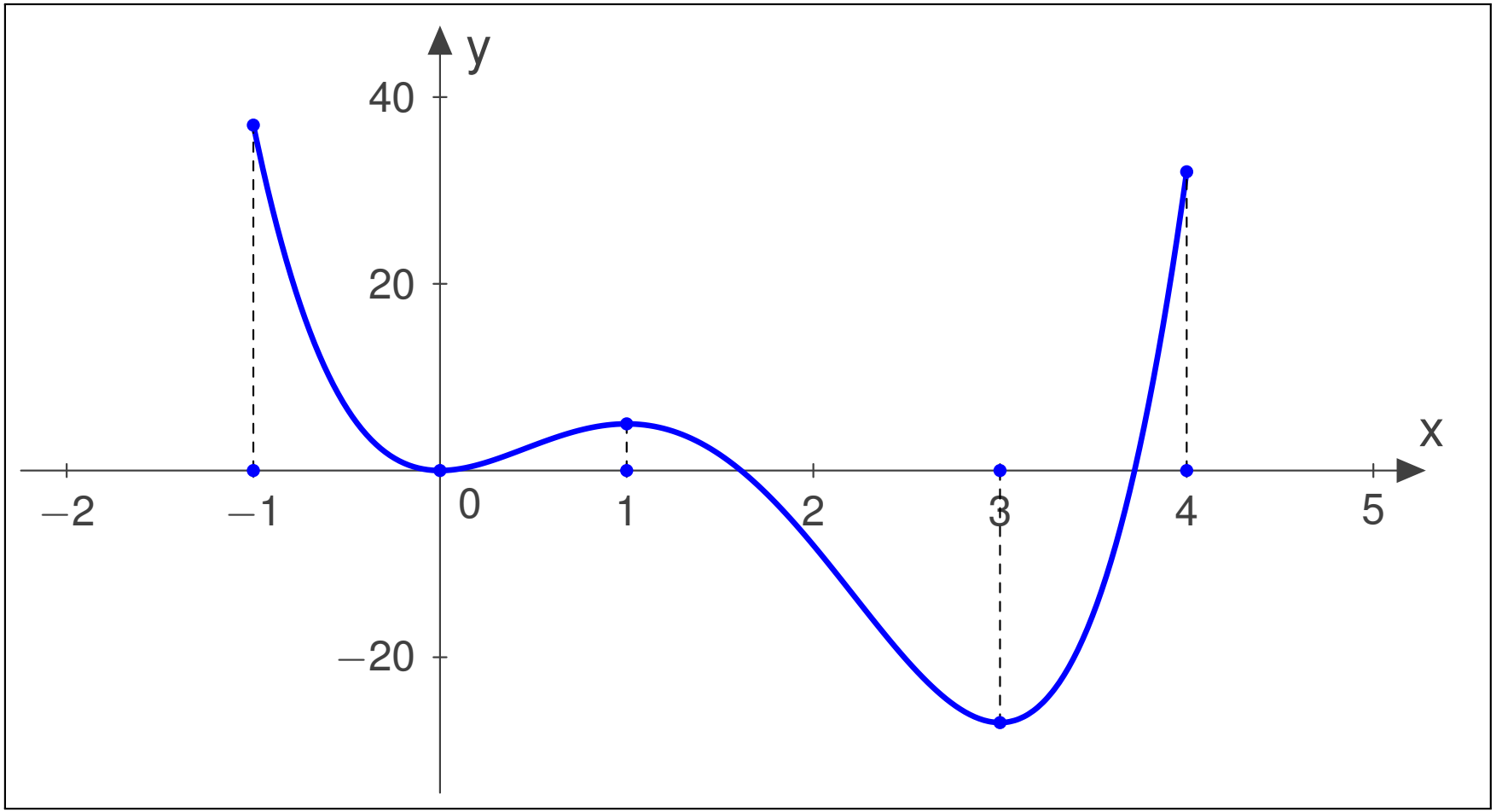
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p =$



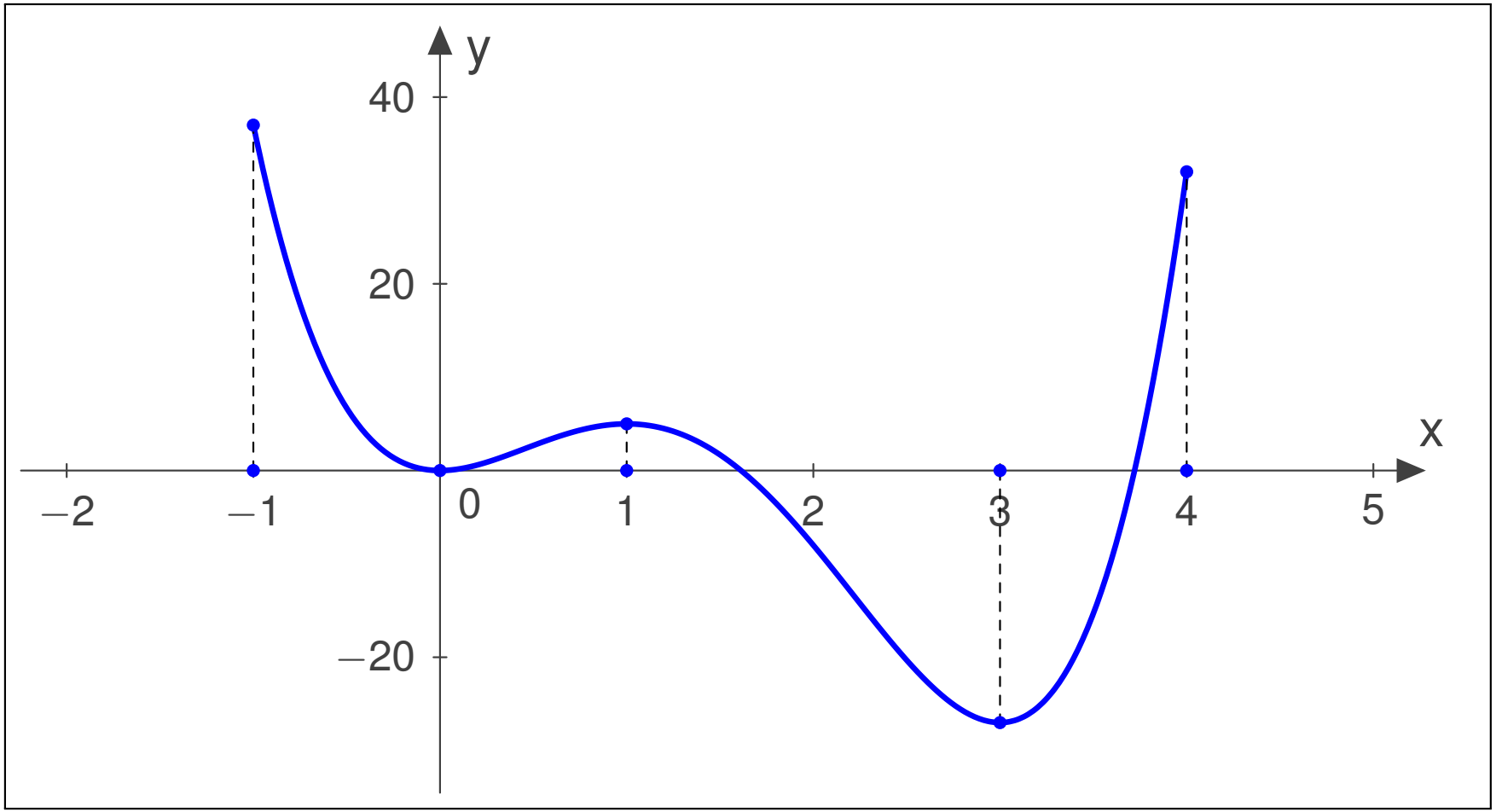
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$



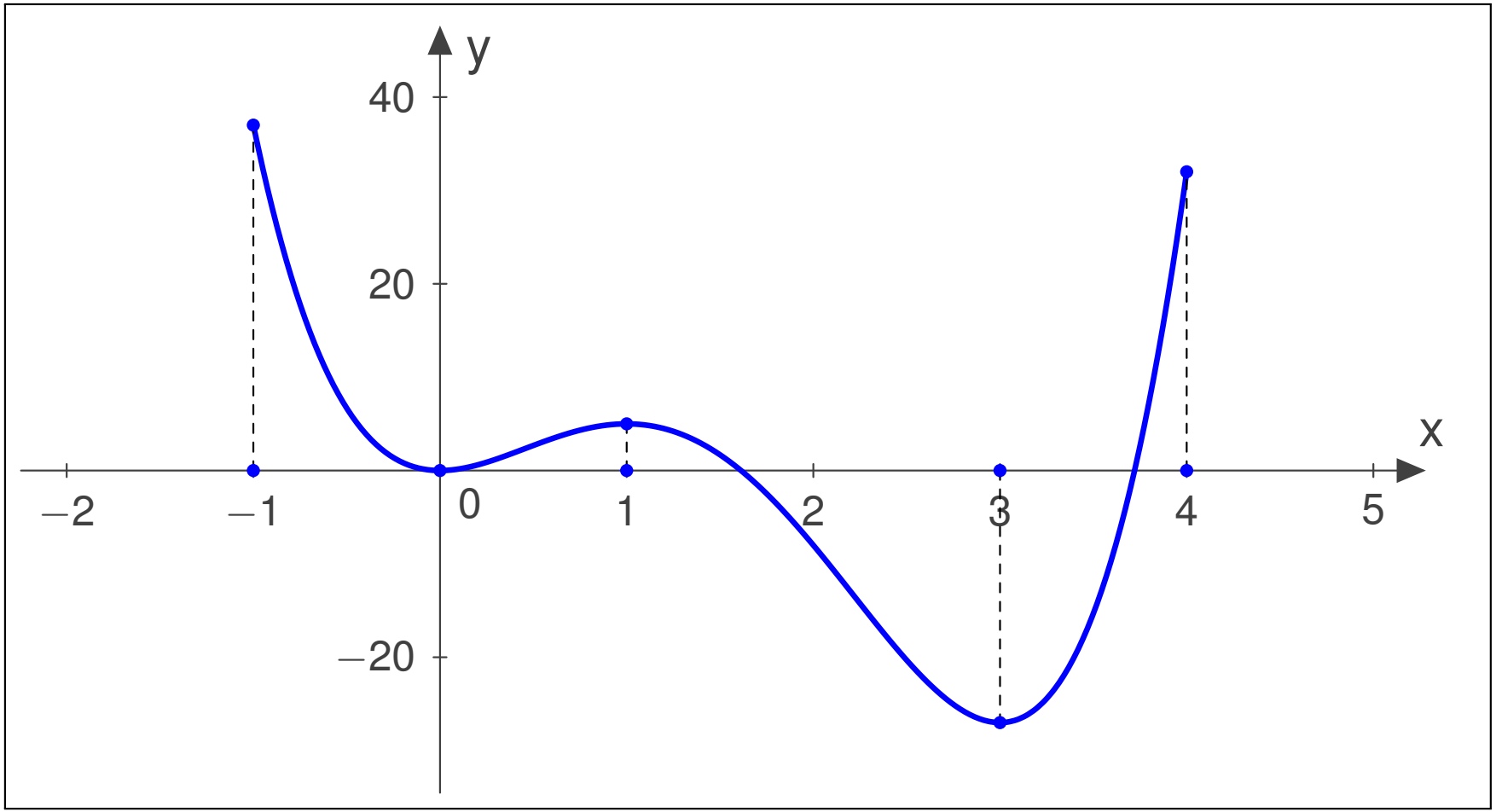
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

Os pontos de máximo local de f em A que não são globais são $p = 1$ e $q = 4$.



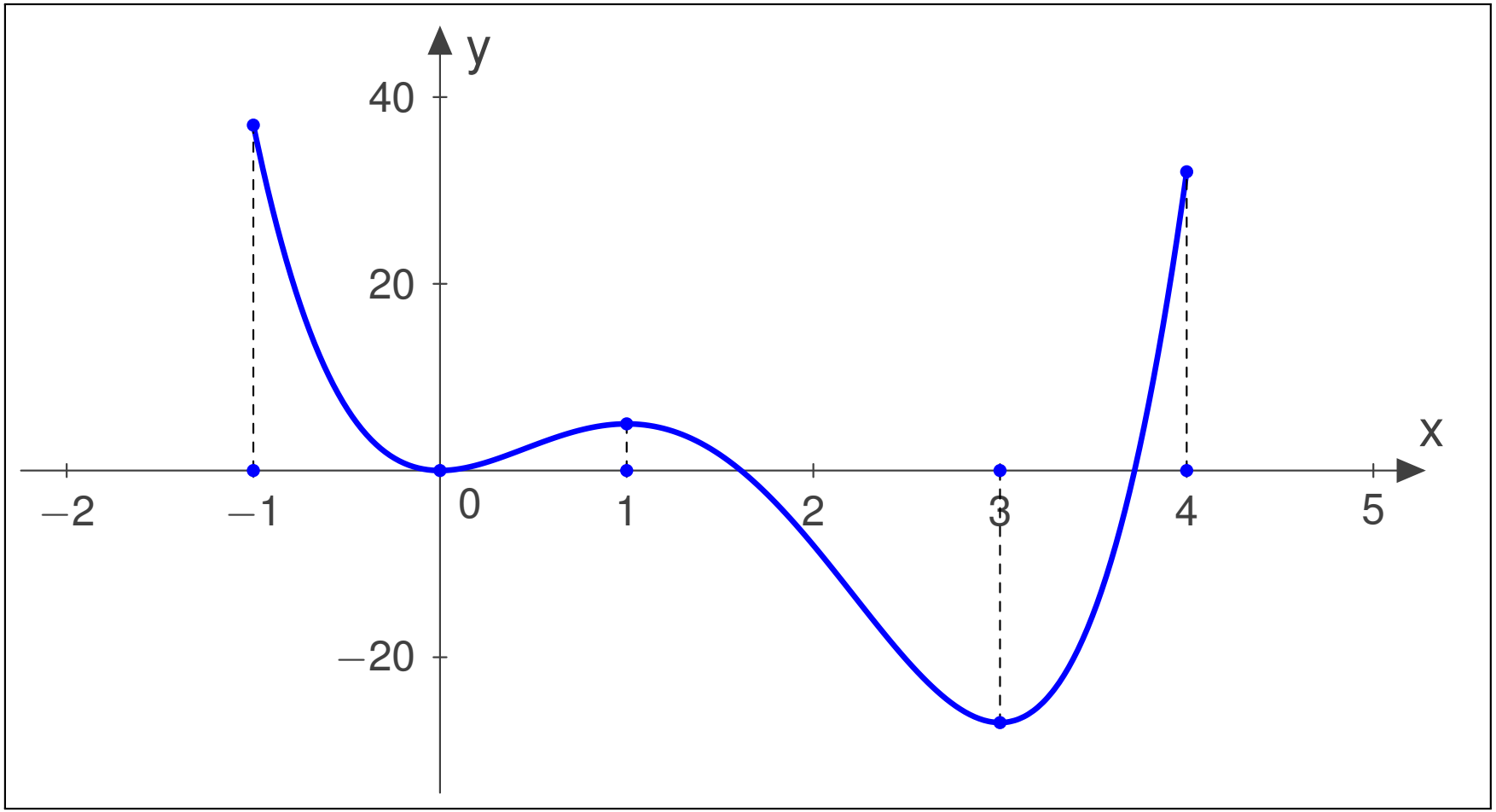
Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p =$

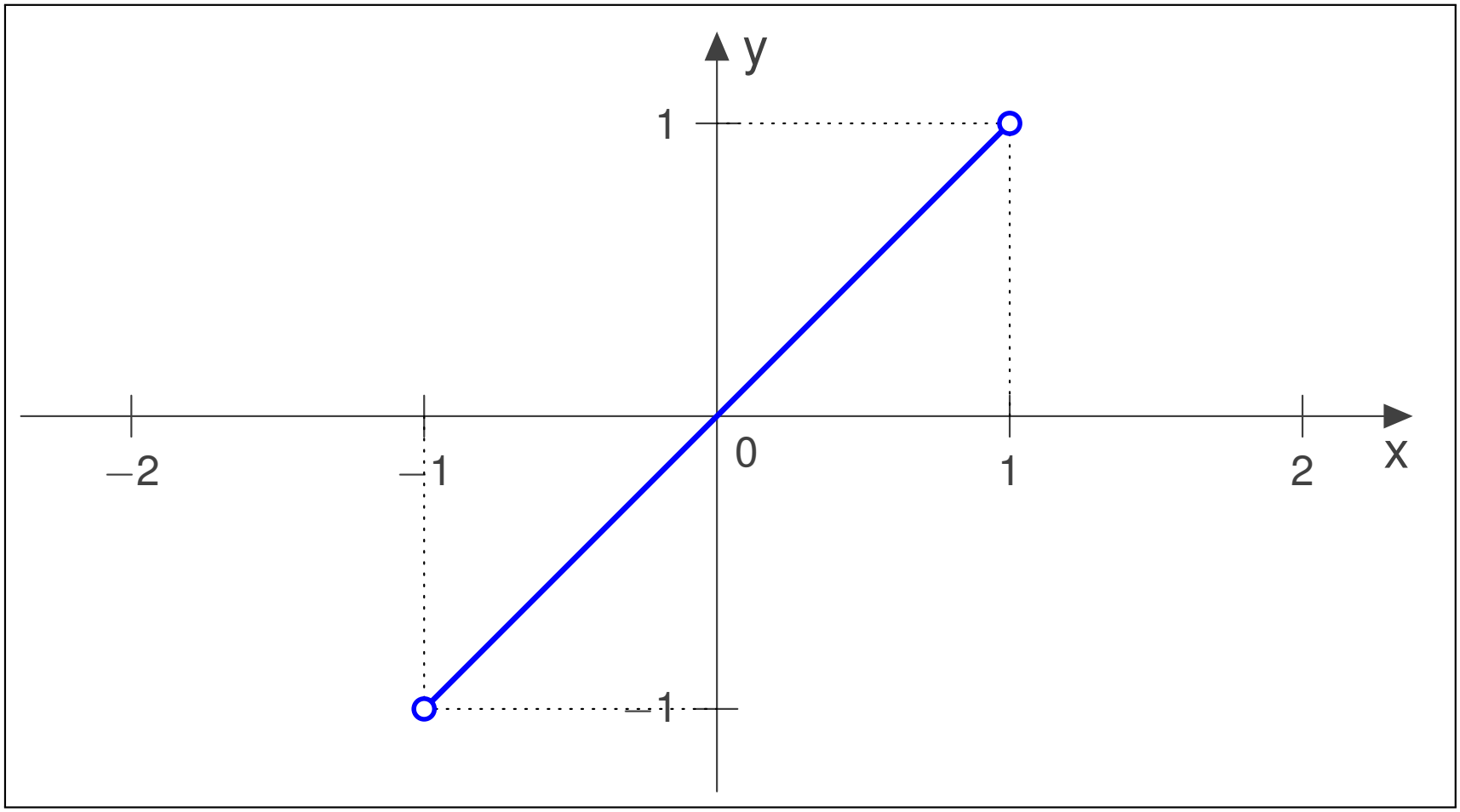


Exemplo: $y = f(x) = 3\,x^4 - 16\,x^3 + 18\,x^2$, $A = [-1, 4]$

O ponto de mínimo local de f em A que não é global é $p = 0$.

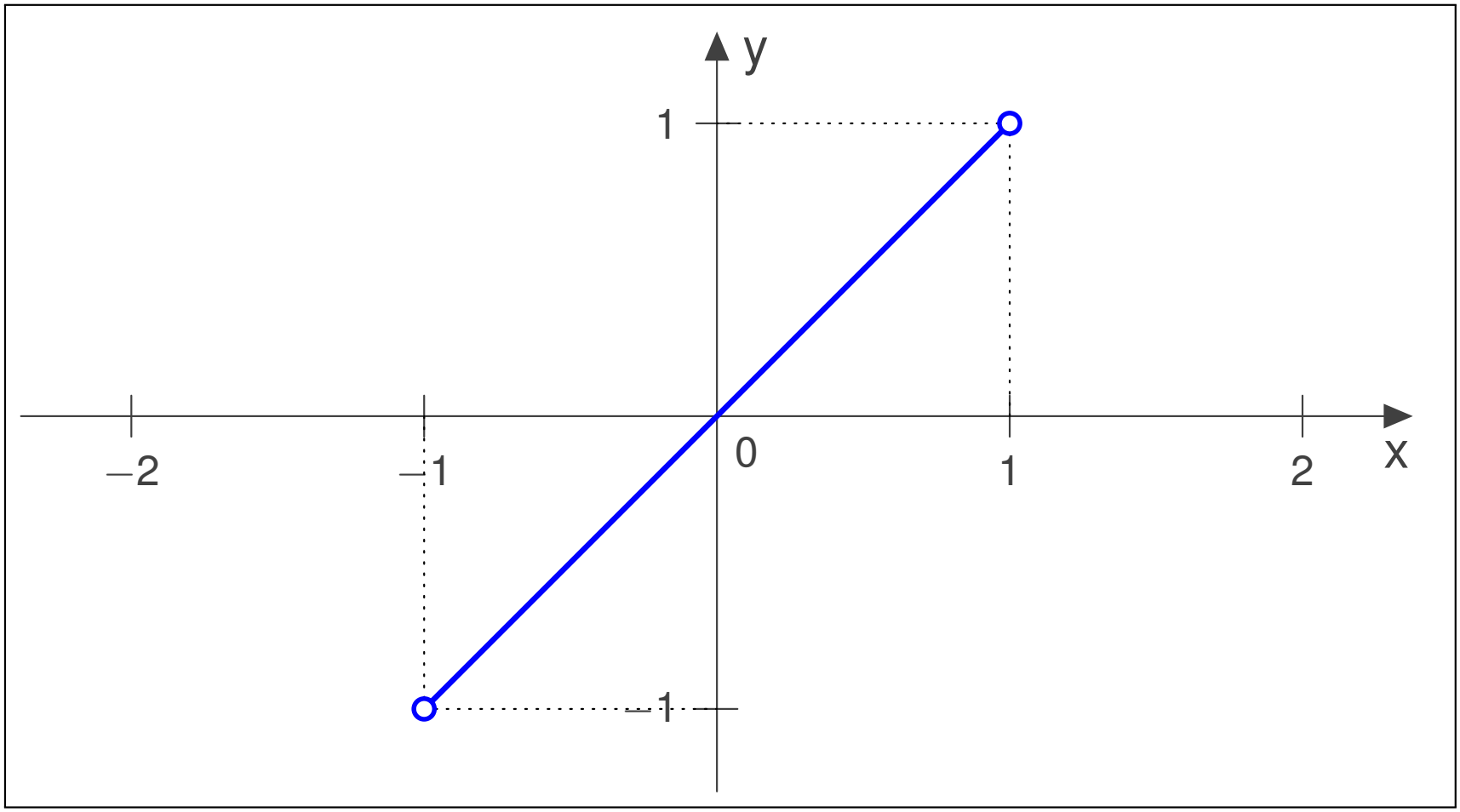


Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$



Exemplo: $y = f(x) = x$, $A = (-1, +1)$

A função f não possui extremos locais nem extremos globais em A.



Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

Quais são os extremos da função f abaixo?

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

Quais são os extremos da função f abaixo?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt[3]{(135 + 60\sqrt{6})^2} - 3\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}}{12\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}} = -0.605829\ldots$$ é ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}$.

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

Quais são os extremos da função f abaixo?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

$x = \dfrac{15 - \sqrt[3]{(135 + 60\sqrt{6})^2} - 3\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}}{12\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}} = -0.605829\ldots$ é ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}$.

A função f não possui outros extremos globais em $\mathbb{R}$.

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

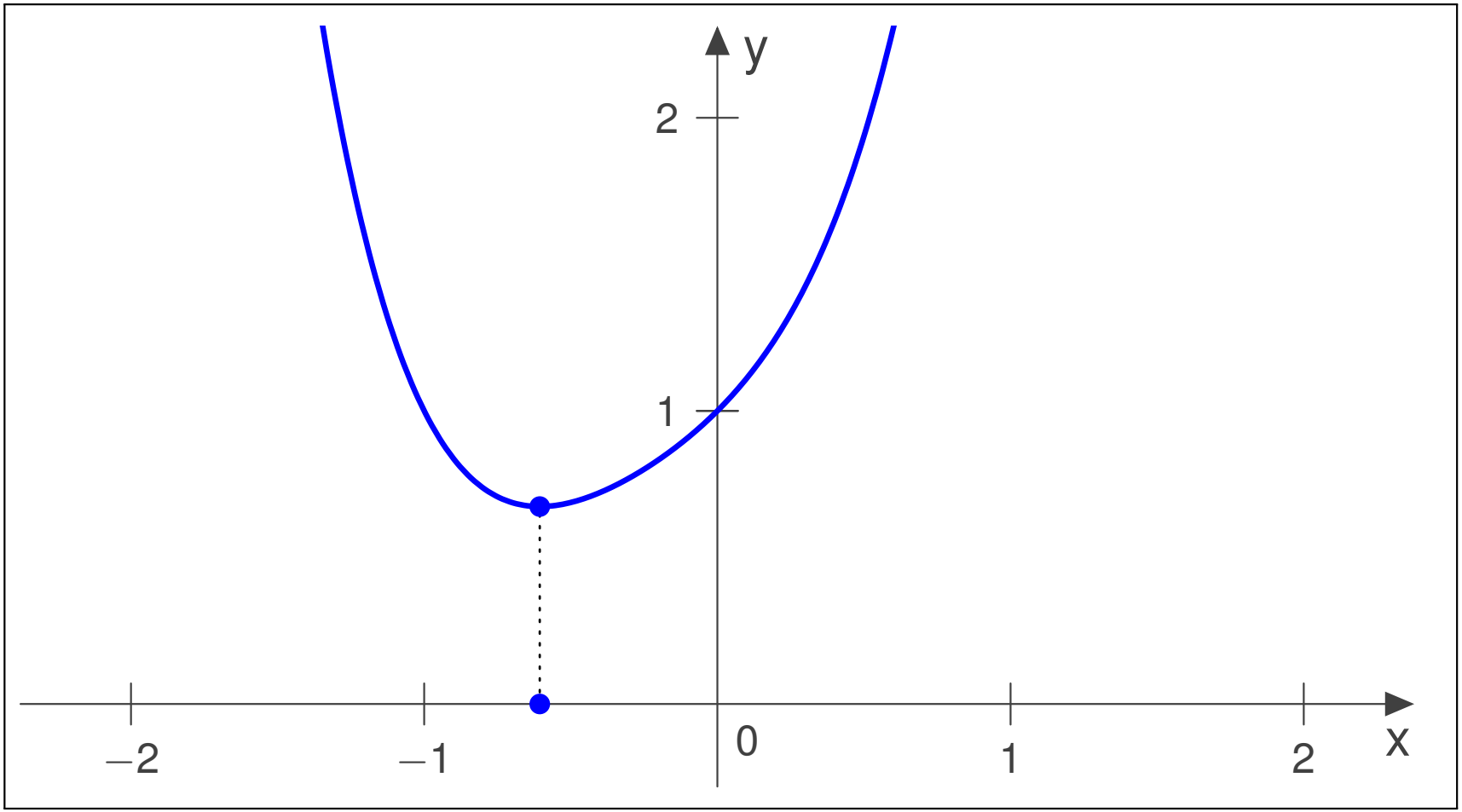
Quais são os extremos da função f abaixo?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt[3]{(135 + 60\sqrt{6})^2} - 3\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}}{12\sqrt[3]{135 + 60\sqrt{6}}} = -0.605829\ldots$$ é ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}$.

A função f não possui outros extremos globais em $\mathbb{R}$.

Aprenderemos mais adiante novas ferramentas para se resolver questões deste tipo!

Calcular os extremos de uma função pode ser difícil!

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$