Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

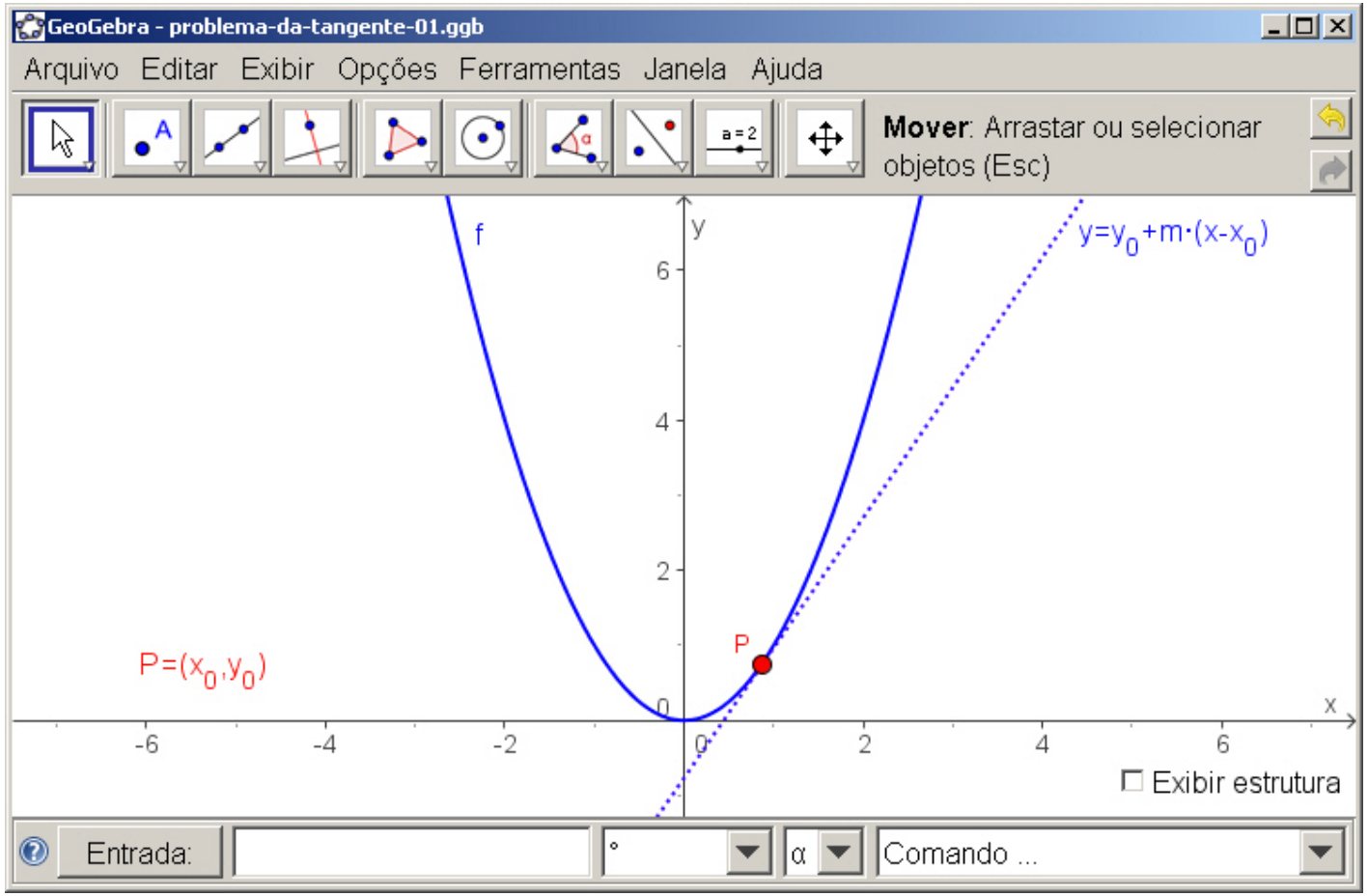
Parte 6

Versão 0.9

Limites

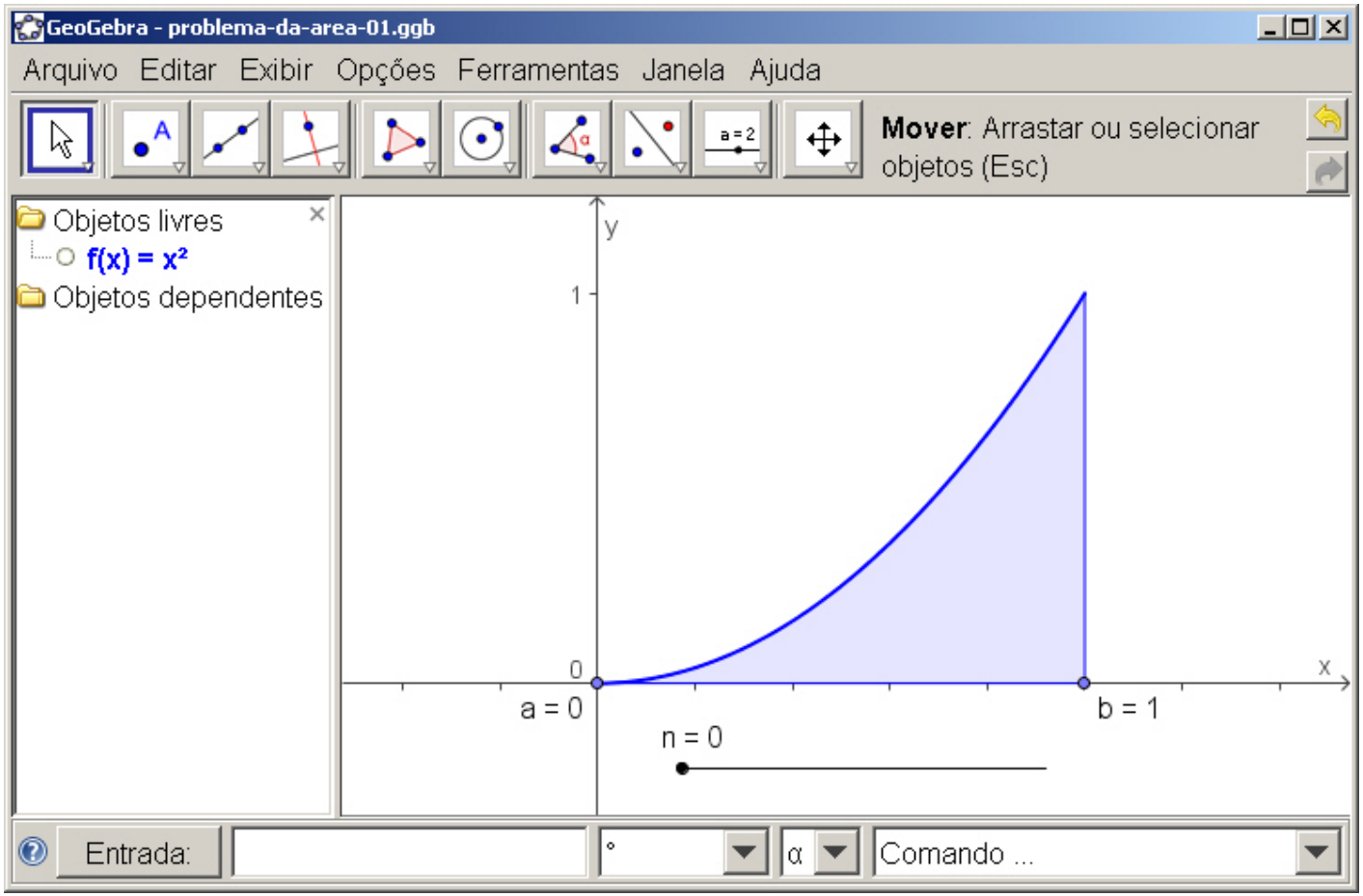
Motivação: o problema da tangente

Dada uma função f e um ponto P no seu gráfico, ache uma equação da reta que é tangente ao gráfico de f em P.



Motivação: o problema da área

Dada uma função f, ache a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x.



Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

não está definida em $p = 1$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

não está definida em $p = 1$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 1$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	$q(x)$
0.9000	1.9000
0.9900	1.9900
0.9990	1.9990
0.9999	1.9999
1.0000	não está definida
1.0001	2.0001
1.0010	2.0010
1.0100	2.0100
1.1000	2.1000

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Exemplo

$$q(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{para } x \neq 1.$$

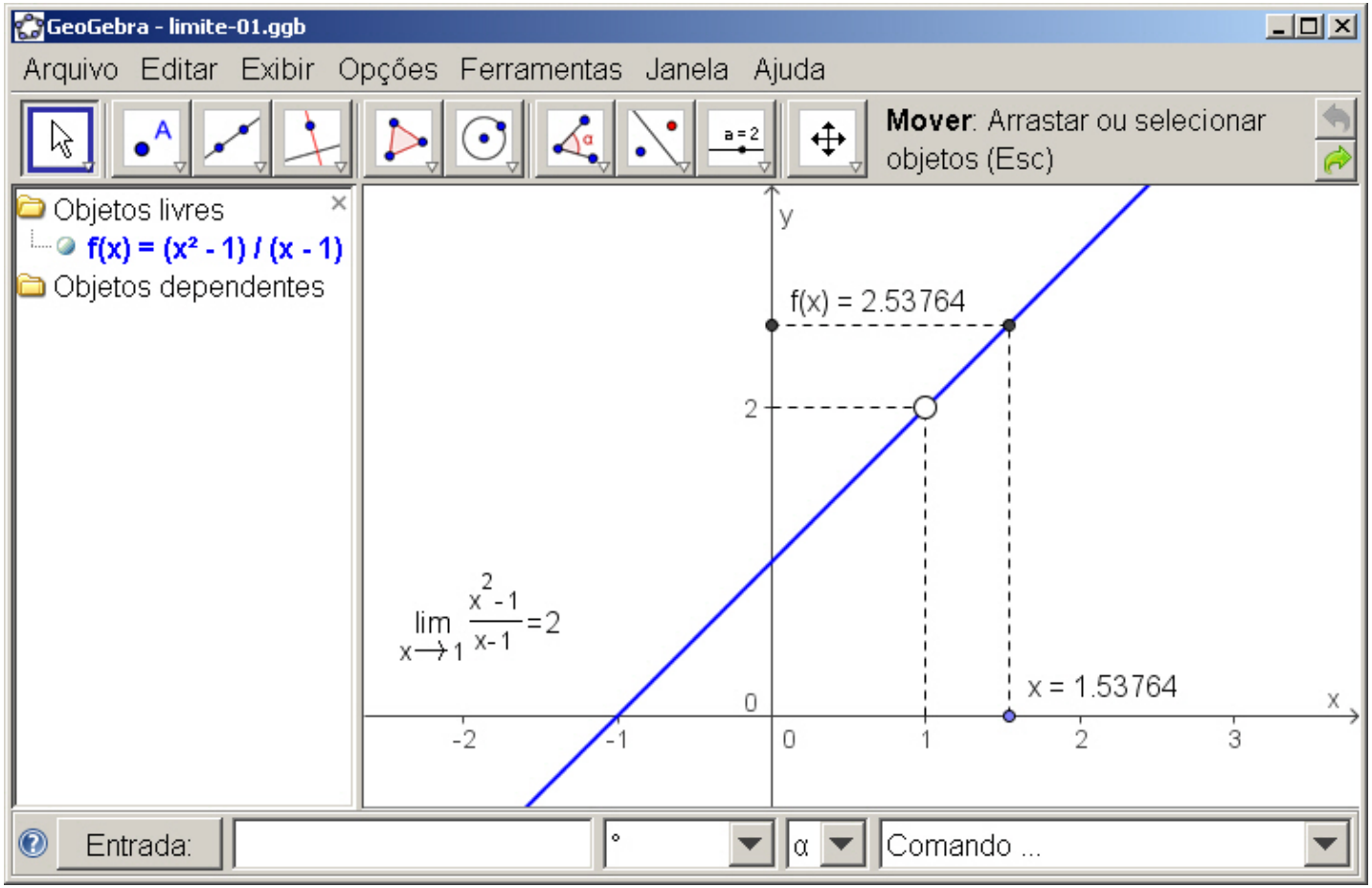
Se x está cada vez mais próximo de $p = 1$,
então $q(x)$ está cada vez mais próximo de $L = 2$.

Notação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

O que está acontecendo geometricamente?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$



Definição

Se os valores de $q(x)$ podem ser tomados tão próximos quanto quisermos do número L, fazendo x suficientemente próximo de p (mas não igual a p), então escrevemos

$$\lim_{x \to p} q(x) = L,$$

o qual deve ser lido como

"o limite de $q(x)$ quando x tende a p é igual a L".

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

não está definida em $p = 0$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

não está definida em $p = 0$,

mas o que acontece com o valor de $q(x)$
quando x está próximo de $p = 0$?

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

x	$q(x)$
-0.1000	$1.9486832\ldots$
-0.0100	$1.9949874\ldots$
-0.0010	$1.9994998\ldots$
-0.0001	$1.9999499\ldots$
0.0000	não está definida
0.0001	$2.0000499\ldots$
0.0010	$2.0004998\ldots$
0.0100	$2.0049875\ldots$
0.1000	$2.0488088\ldots$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

Exemplo

$$q(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

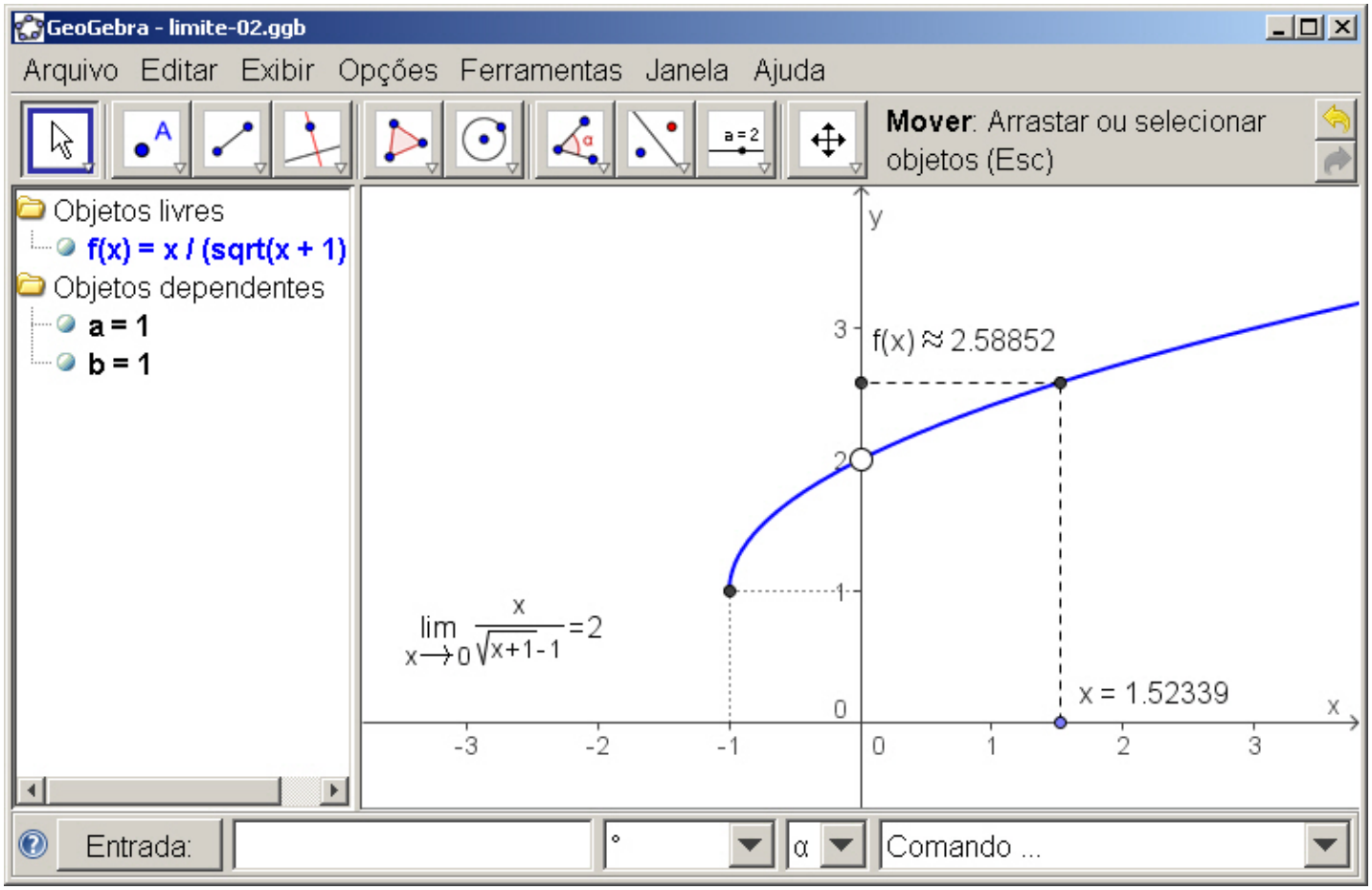
Exemplo

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x} \\
&= \sqrt{x+1}+1, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = 2.$$



Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000		
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

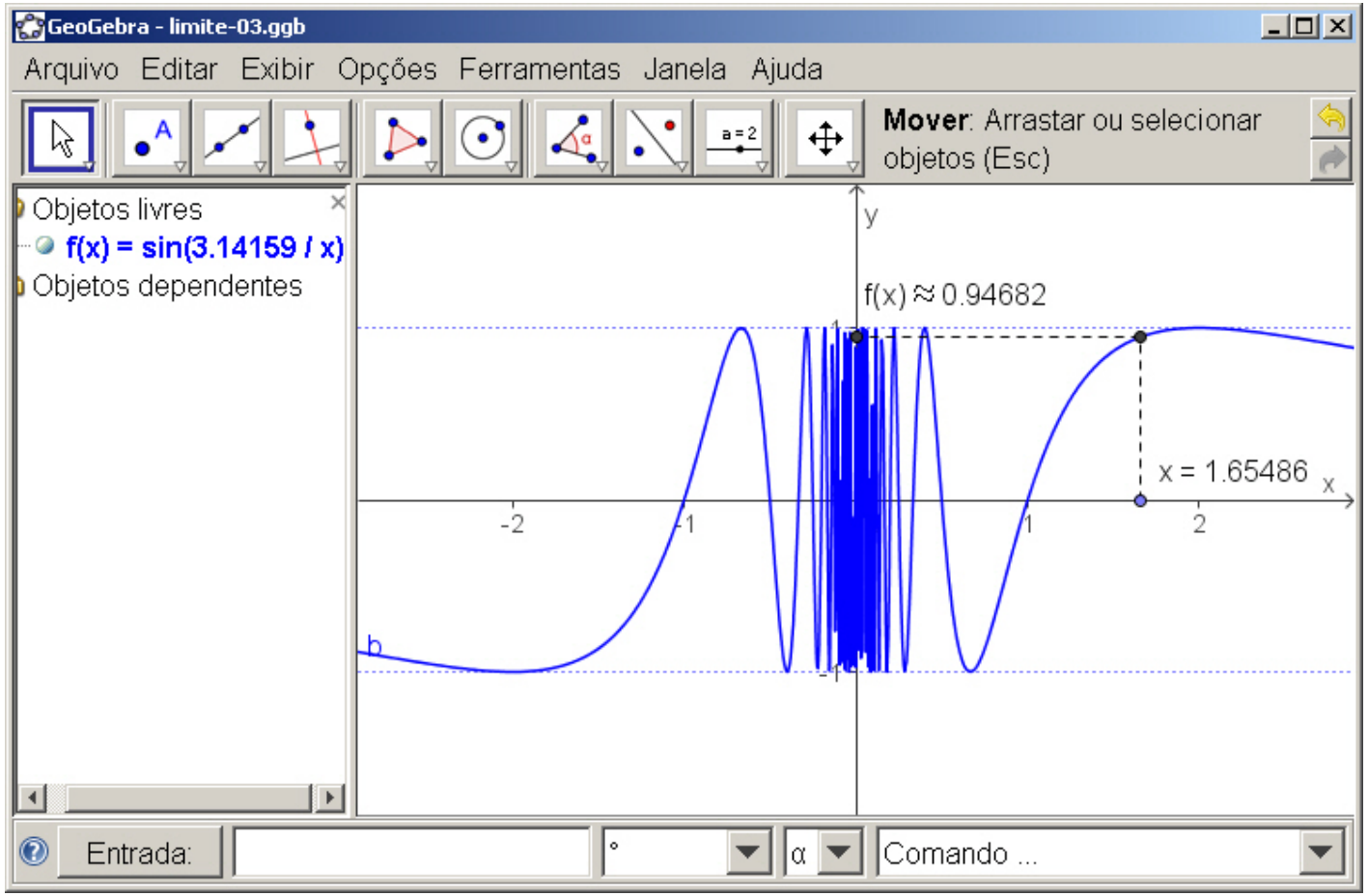
Cuidado!

$$q(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

x	π/x	$q(x)$
-1.0000	$-\pi$	0
-0.1000	$-10 \cdot \pi$	0
-0.0100	$-100 \cdot \pi$	0
-0.0010	$-1000 \cdot \pi$	0
-0.0001	$-10000 \cdot \pi$	0
0.0000	não está definida	não está definida
0.0001	$10000 \cdot \pi$	0
0.0010	$1000 \cdot \pi$	0
0.0100	$100 \cdot \pi$	0
0.1000	$10 \cdot \pi$	0
1.0000	π	0

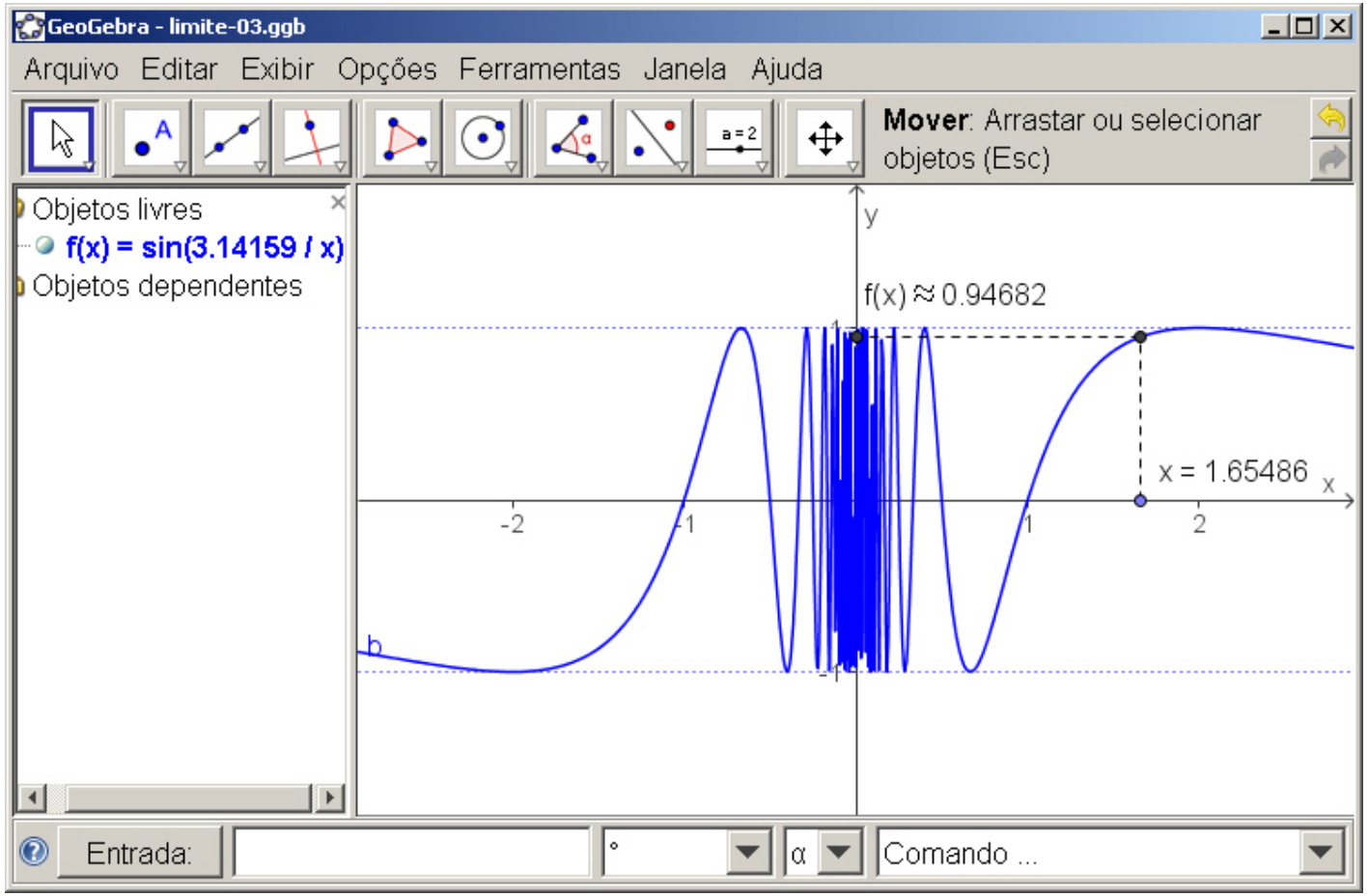
Cuidado!

Não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$!



Cuidado!

Moral: tabelas podem não ser suficientes para estudar limites!



Exercícios

Exercício 1

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{2\,x^2 + 5\,x - 3}{2\,x^2 - 5\,x + 2}$$

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2}$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2\,x^2+5\,x-3}{2\,x^2-5\,x+2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1/2} \frac{2\,(x-1/2)(x+3)}{2\,(x-1/2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{1/2+3}{1/2-2} = -\frac{7}{3}.$$

$(*)$ pois $2\,x^2+5\,x-3 = 2\,(x-1/2)(x+3)$ e
$2\,x^2-5\,x+2 = 2\,(x-1/2)(x-2)$.

Exercício 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{6})^2}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} + \frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} \right)$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)
\end{aligned}$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Exercício 2

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}+\frac{x}{x\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Limites laterais

Limites laterais

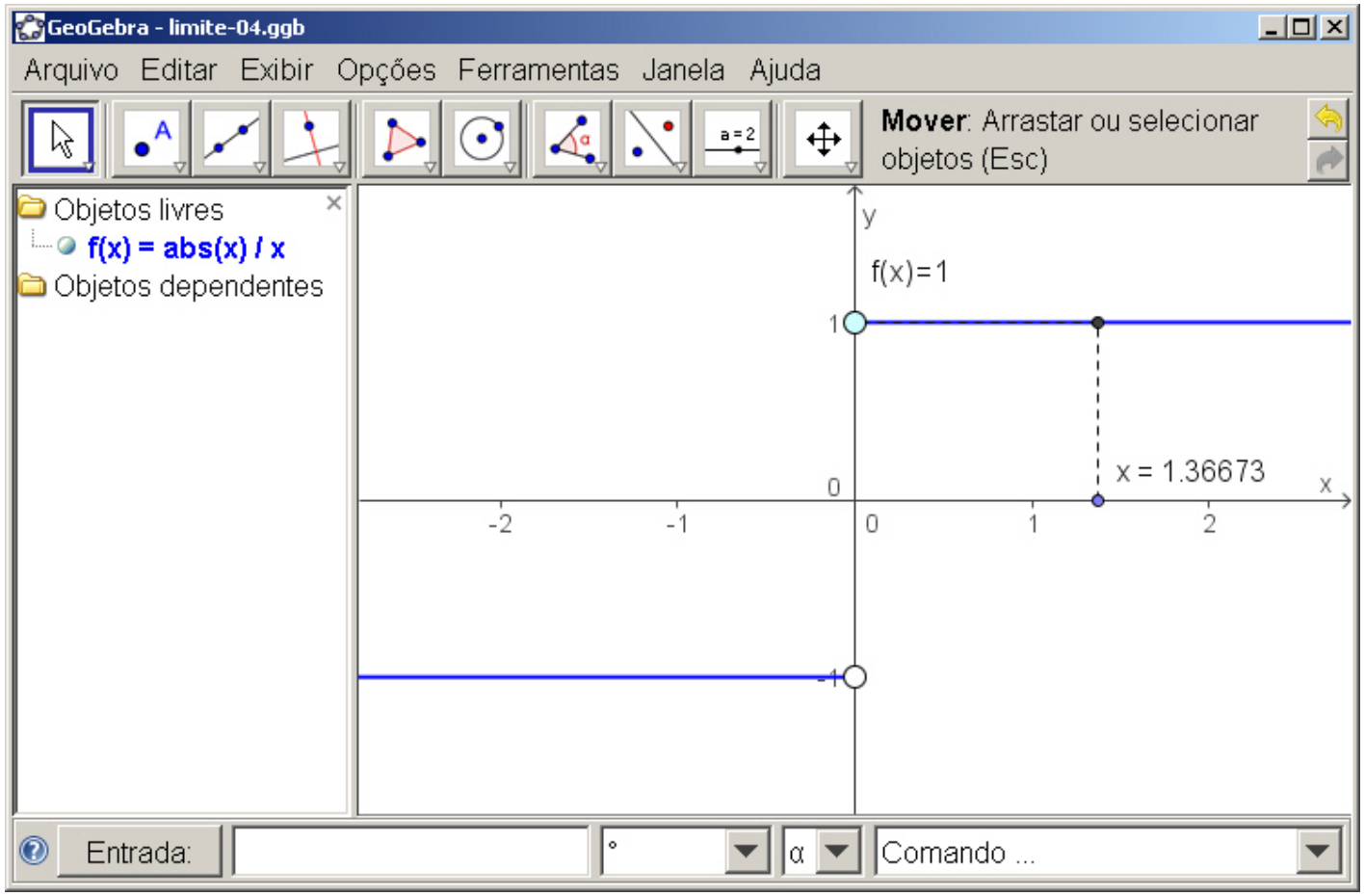
$$f(x) = \frac{|x|}{x} =$$

Limites laterais

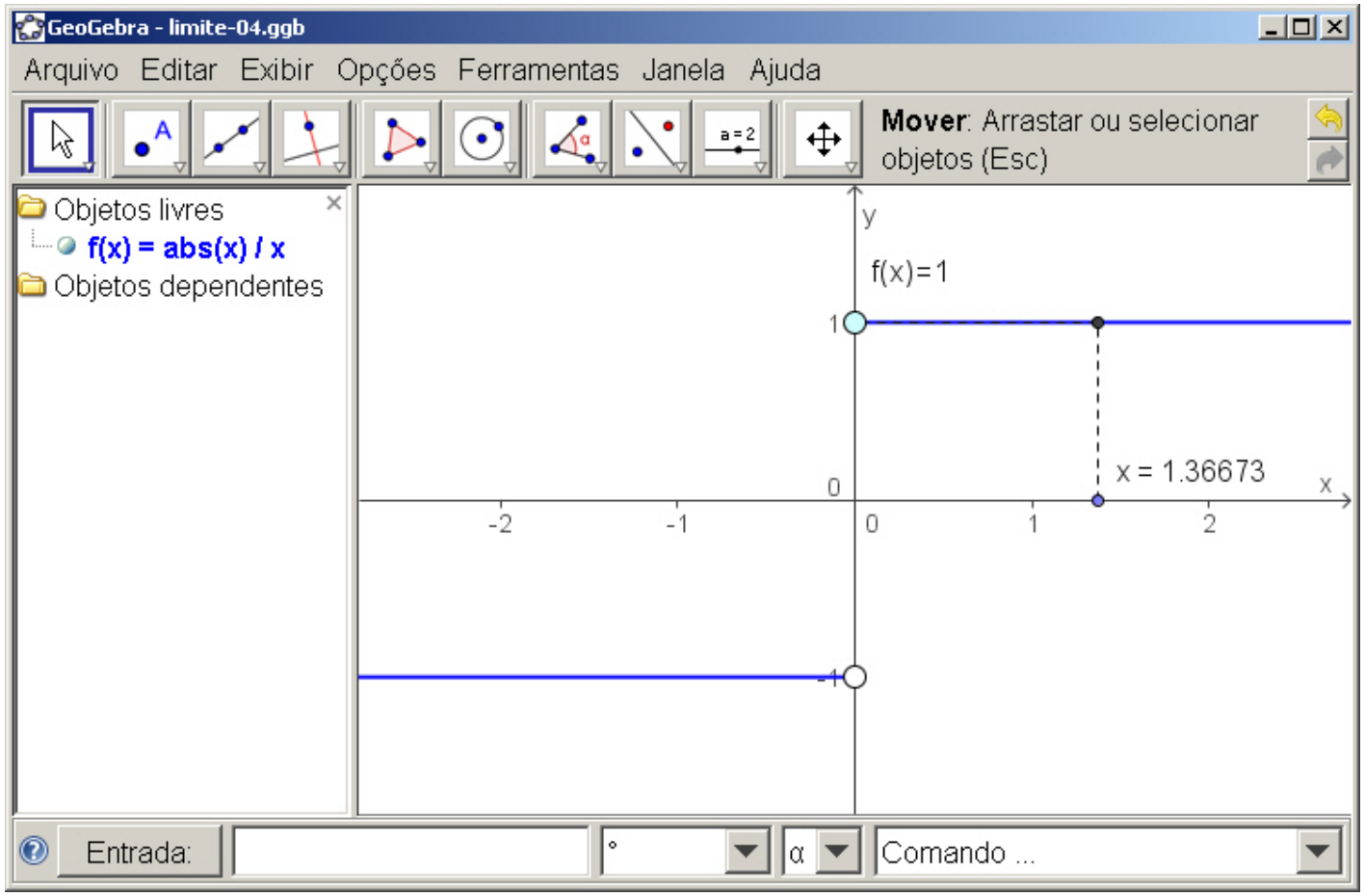
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Limites laterais

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

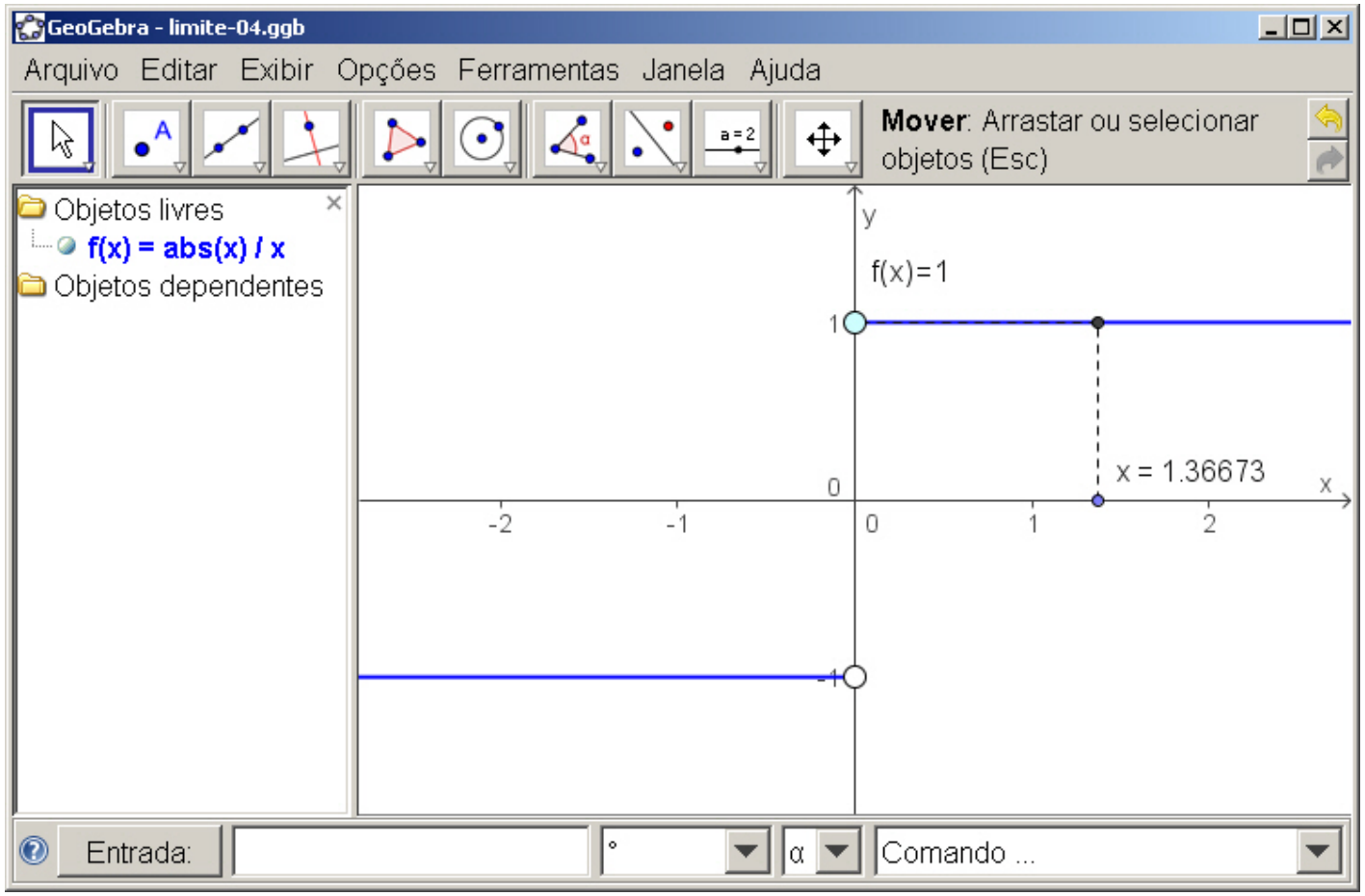


Não existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \ldots$



Limites laterais

mas existem os limites laterais $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.



Limite lateral à direita (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém maior do que p), então escreveremos

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela direita é igual a L".

Limite lateral à esquerda (de um ponto de vista informal)

Definição

Se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de um número L, fazendo x suficientemente próximo de p (porém menor do que p), então escreveremos

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L,$$

o qual deve ser lido

"o limite de $f(x)$ quando x tente a p pela esquerda é igual a L".

Relação entre limites laterais e bilaterais

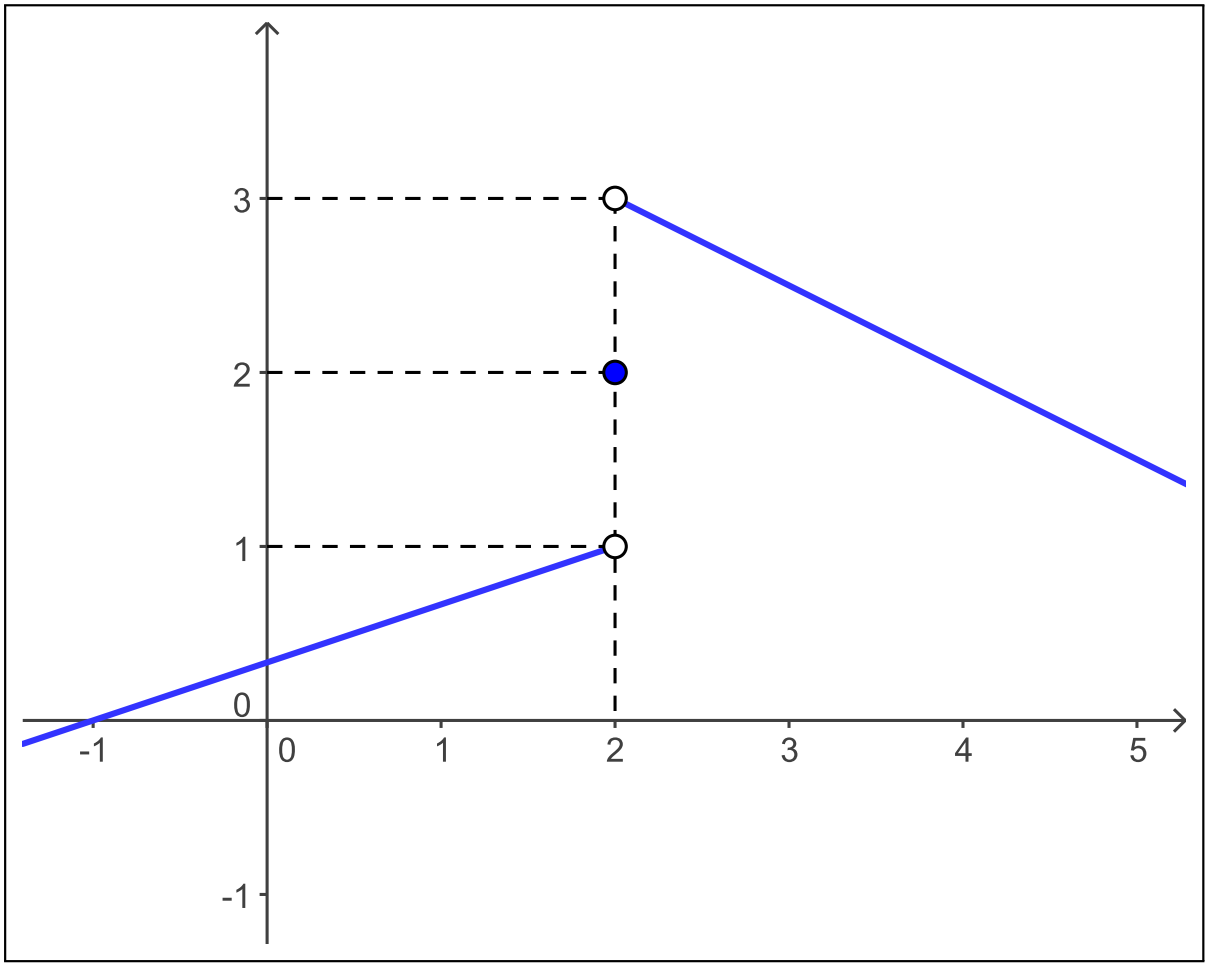
Proposição

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

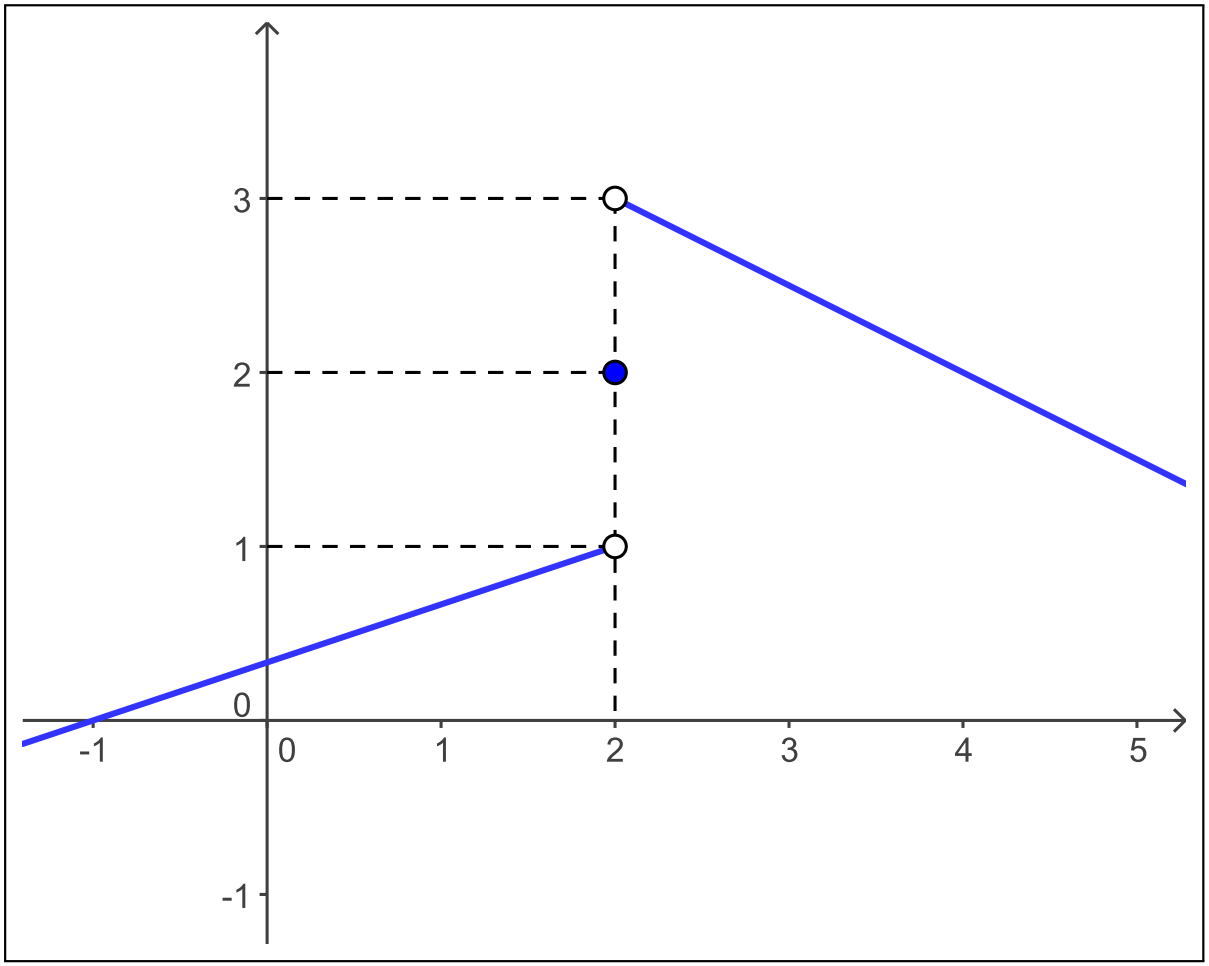
$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = L.$$

Exemplo



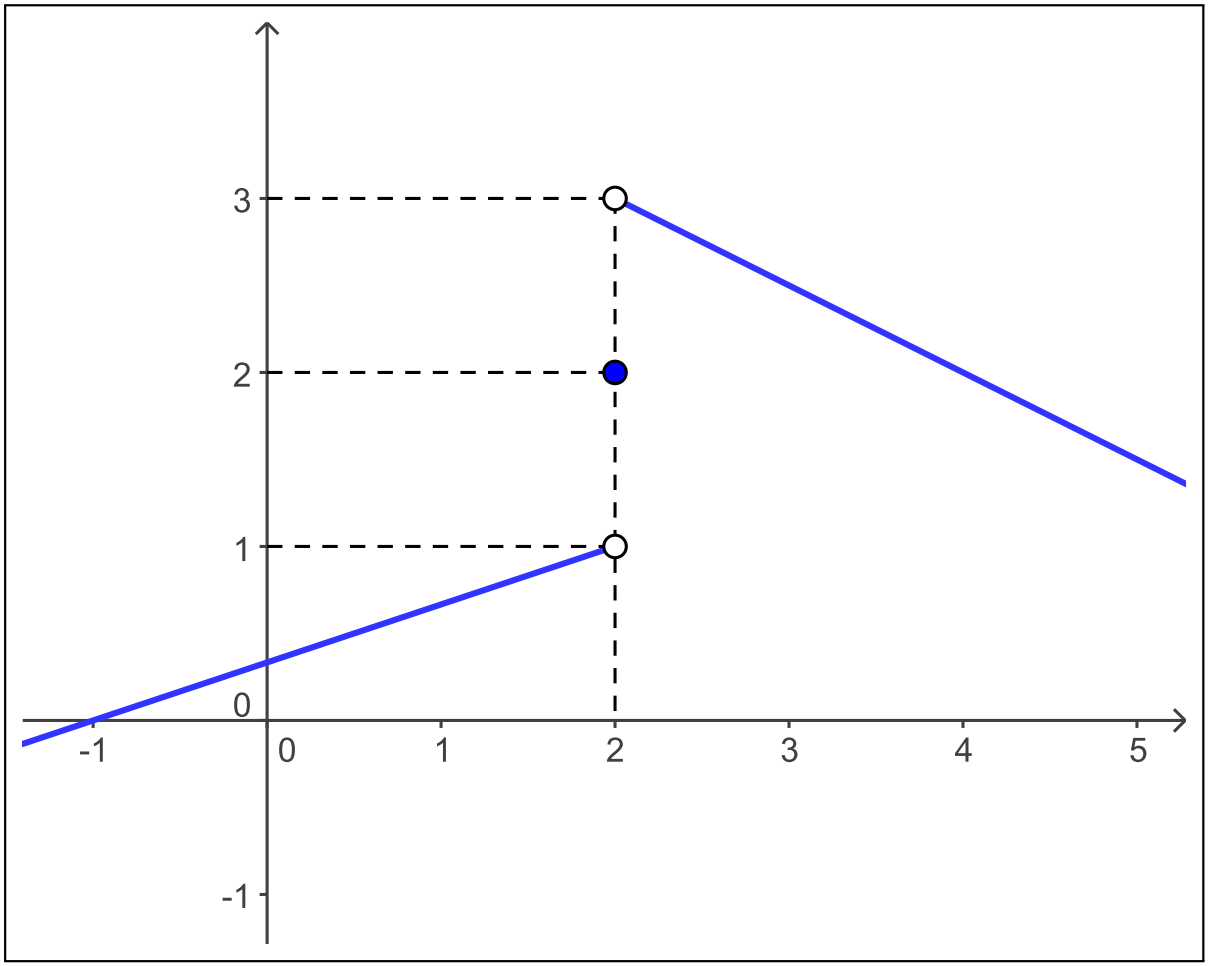
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



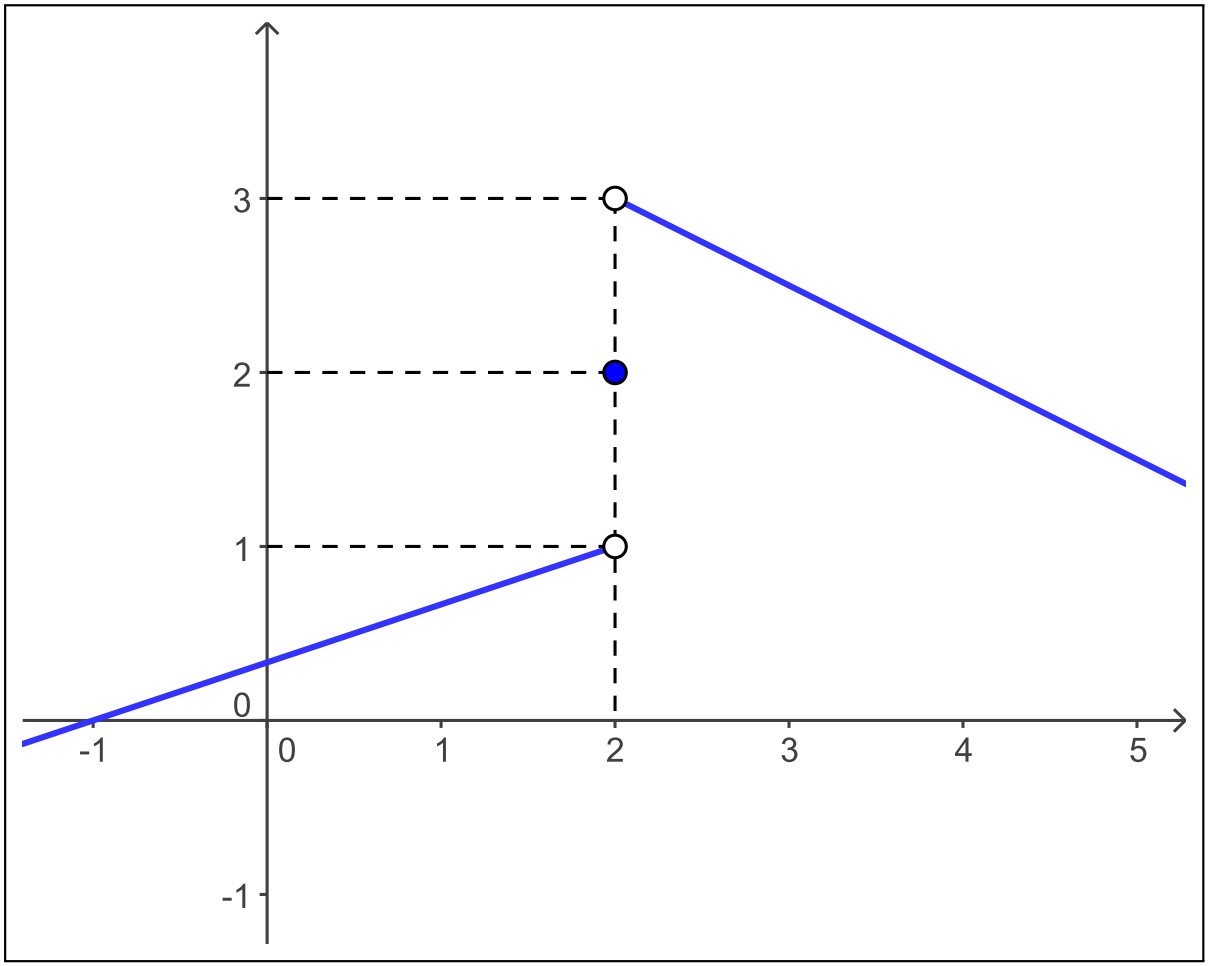
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



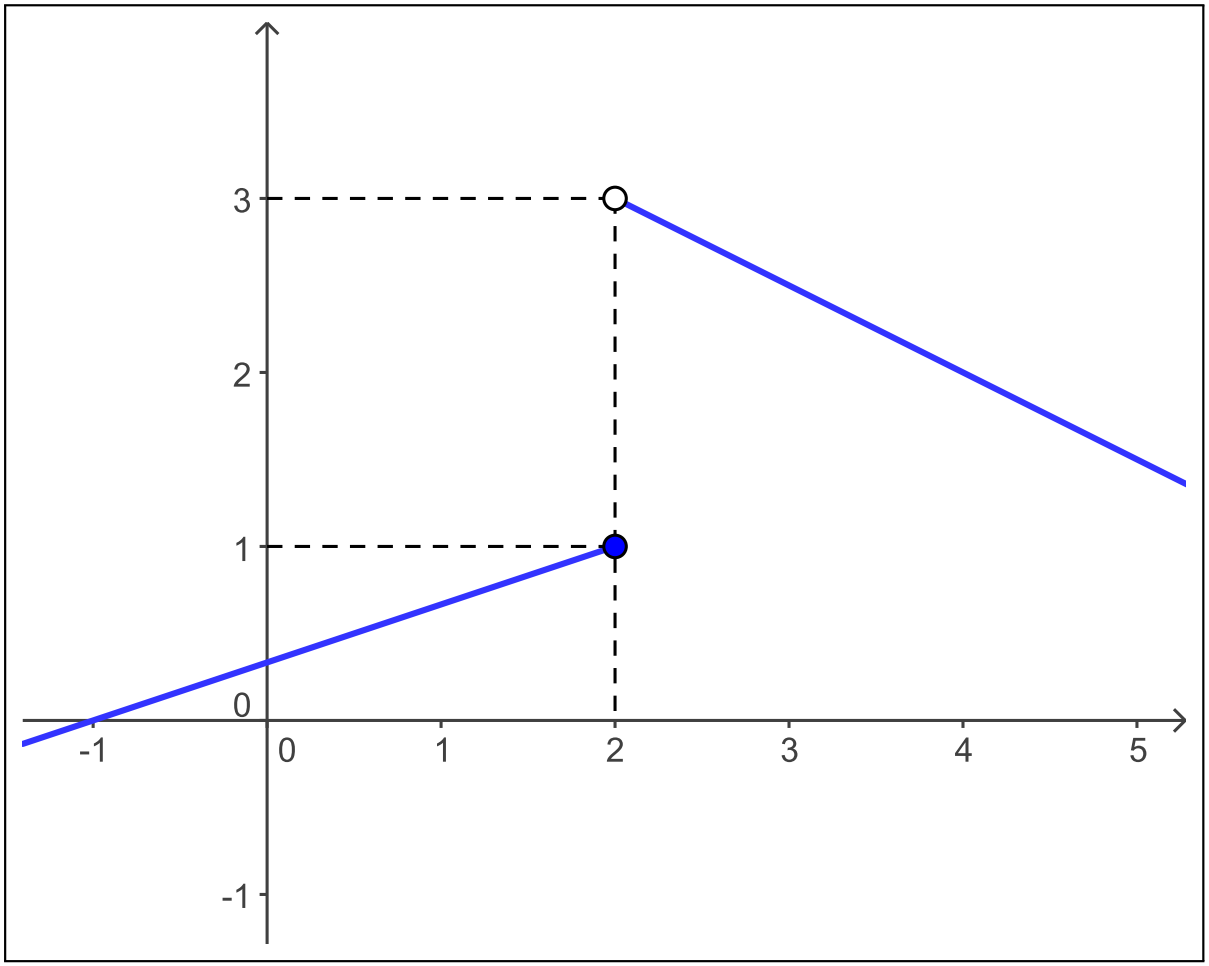
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



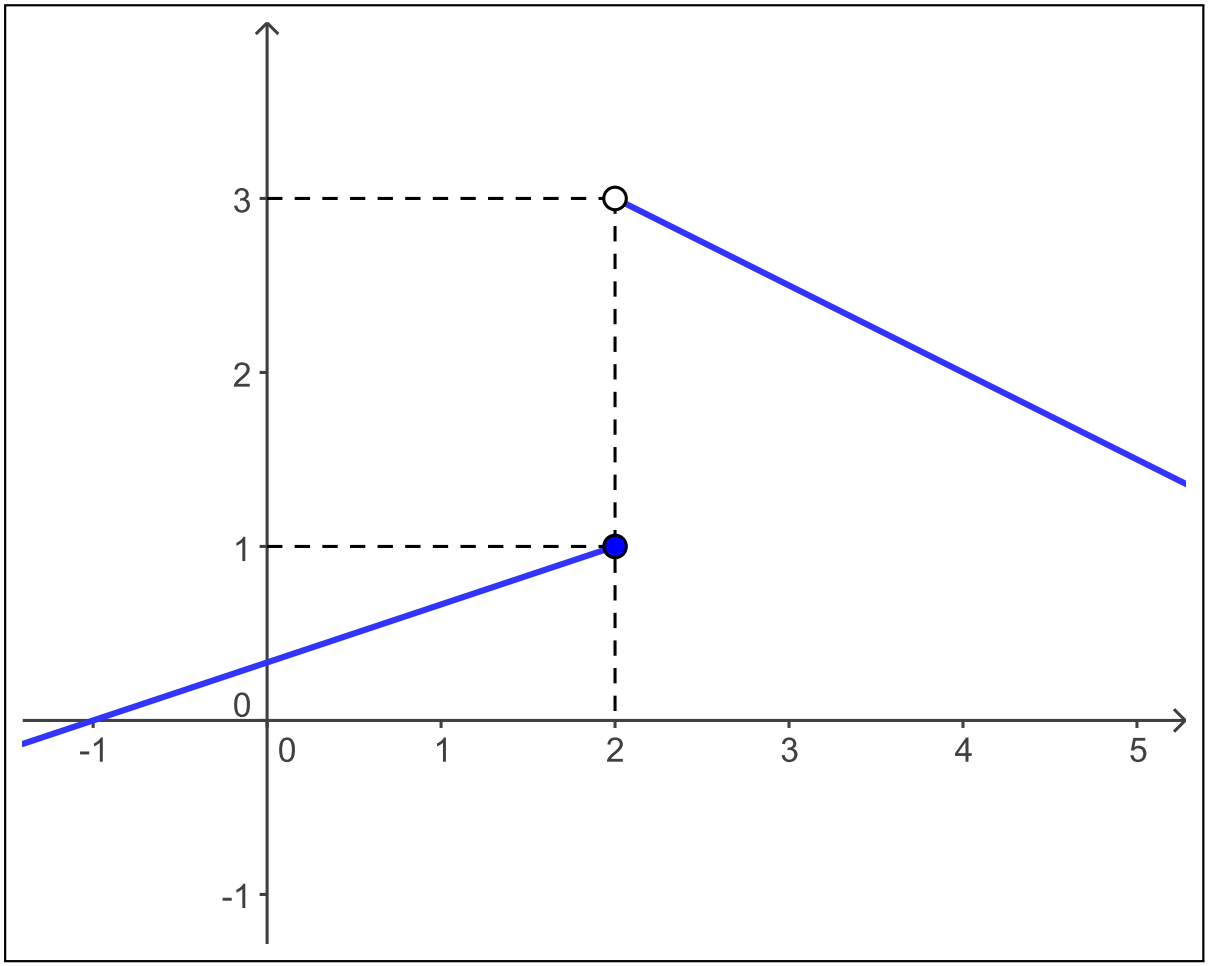
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



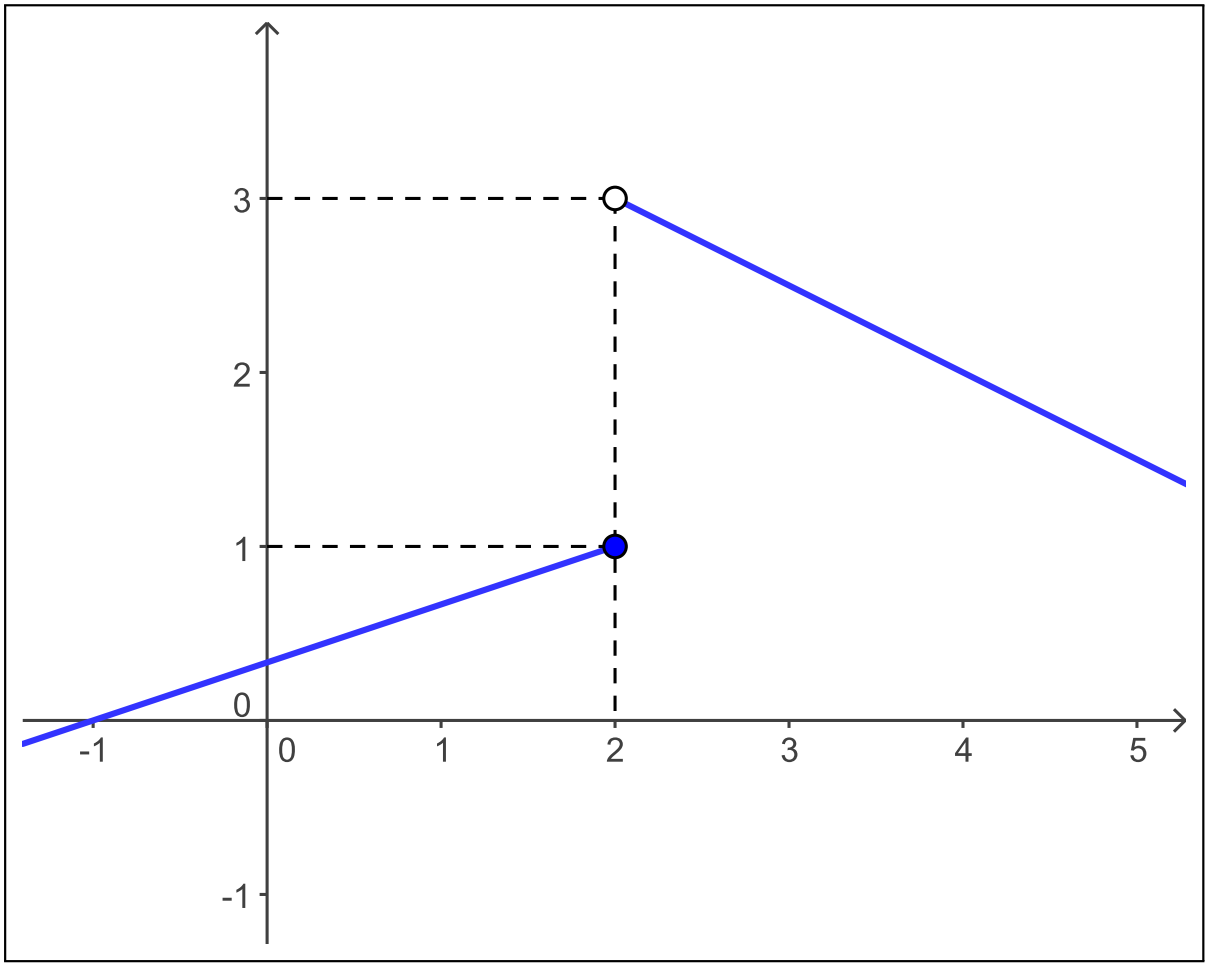
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



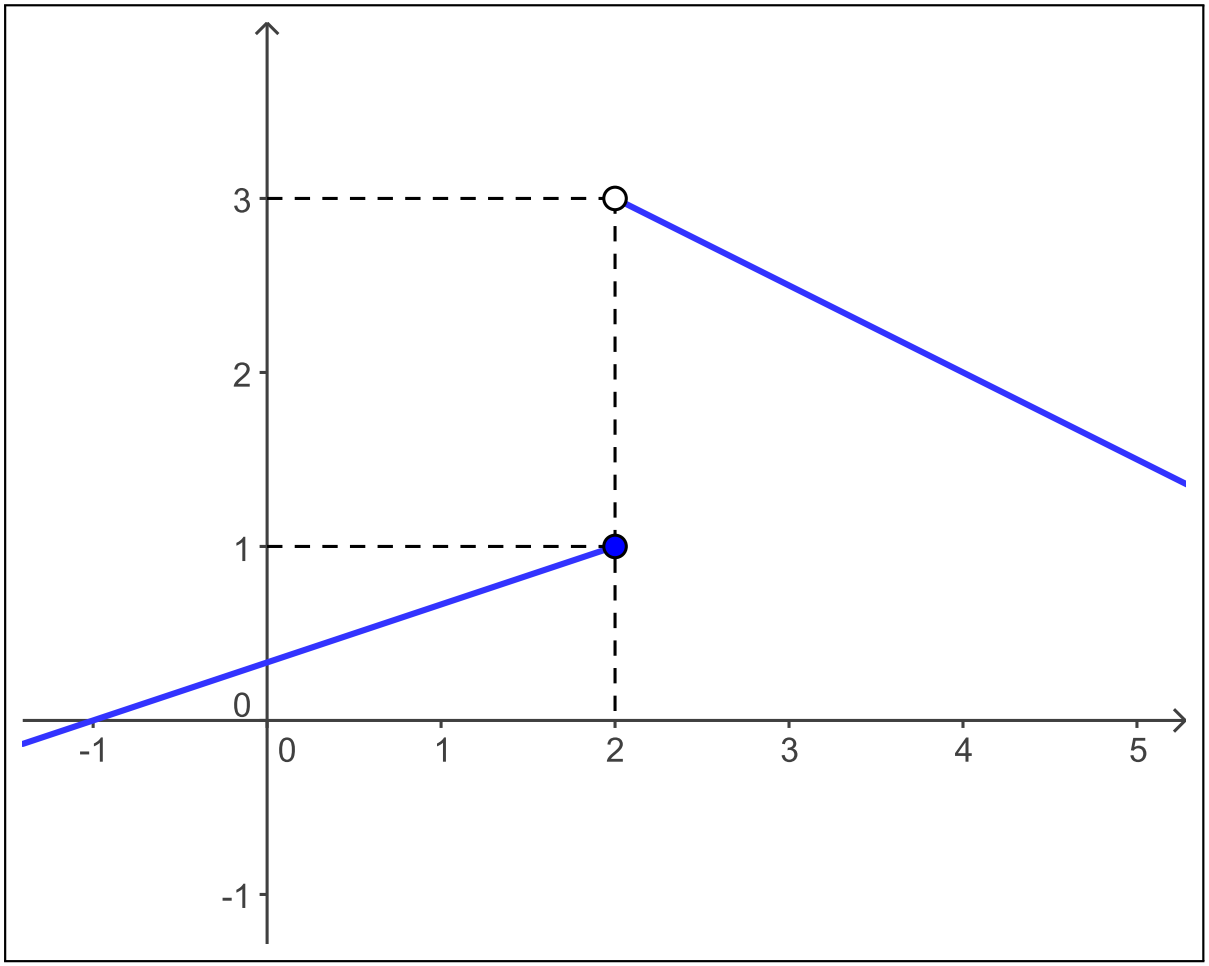
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



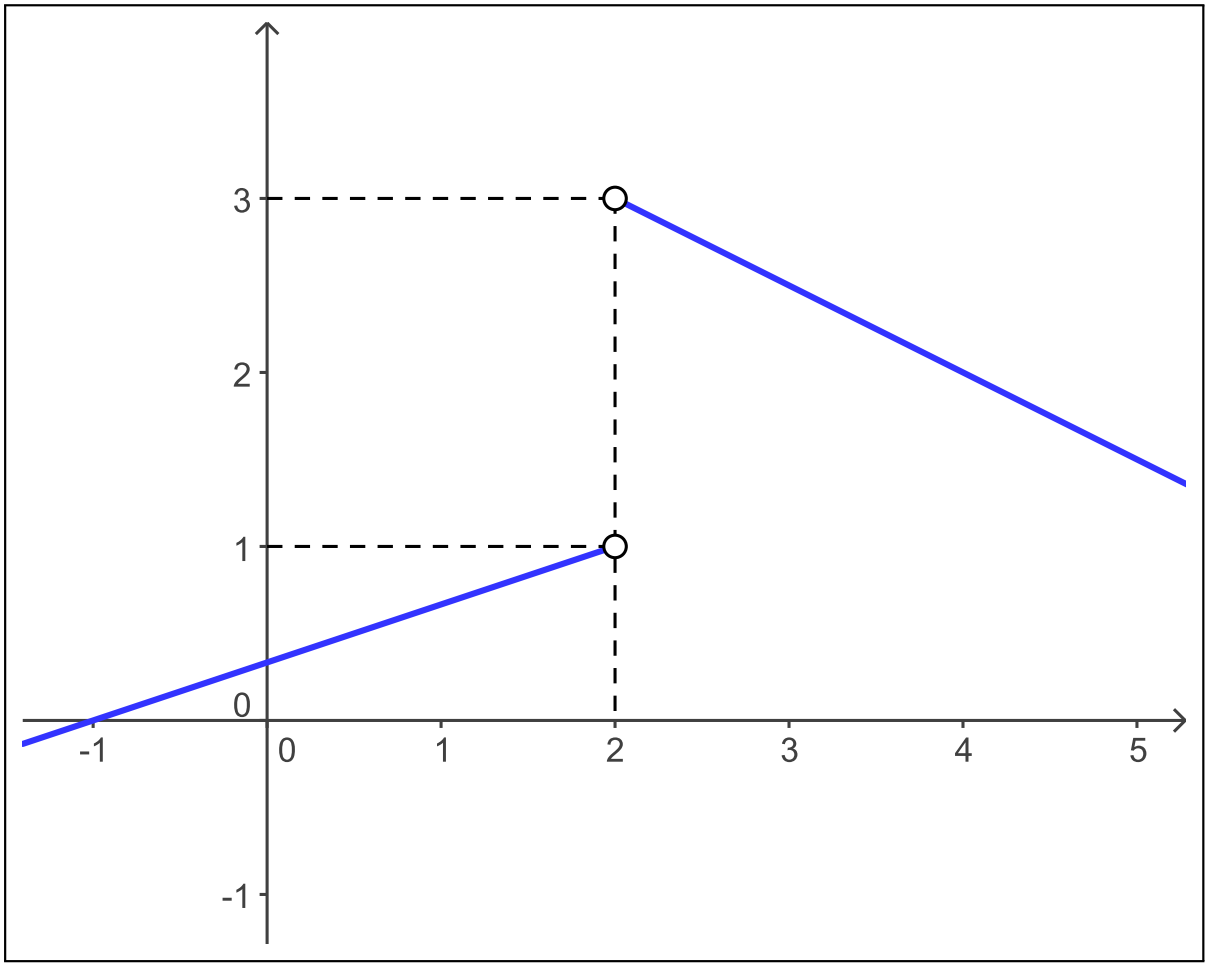
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



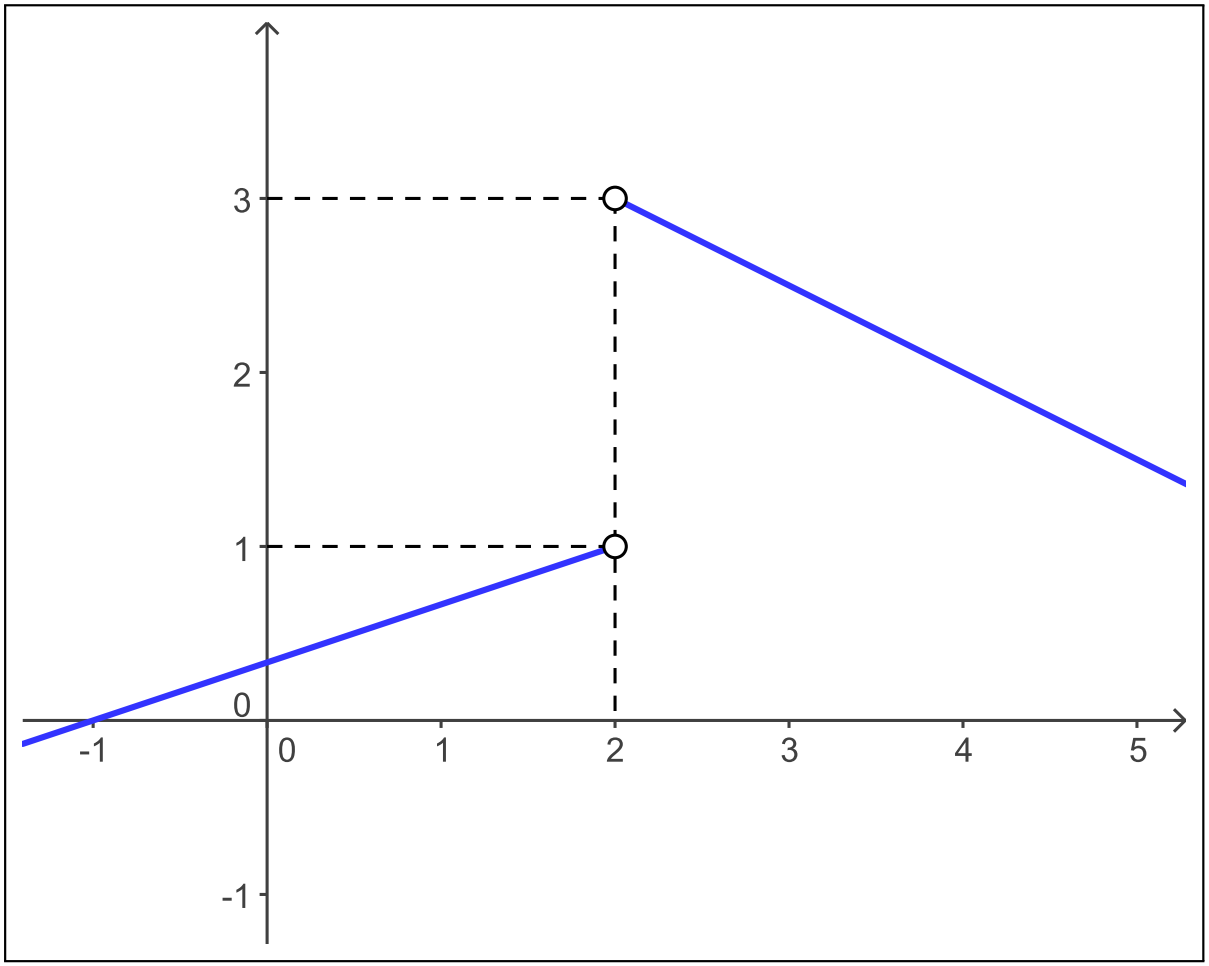
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



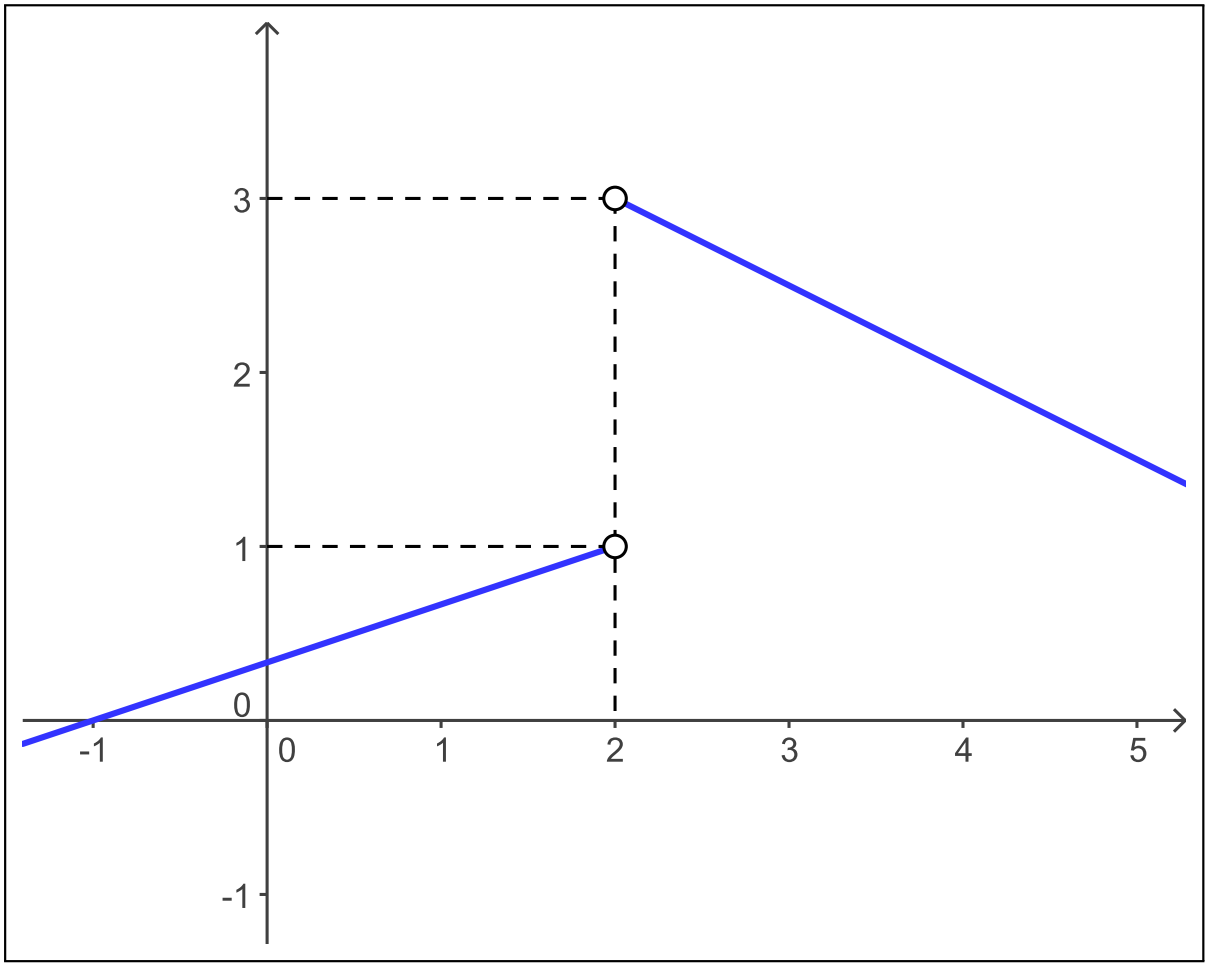
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



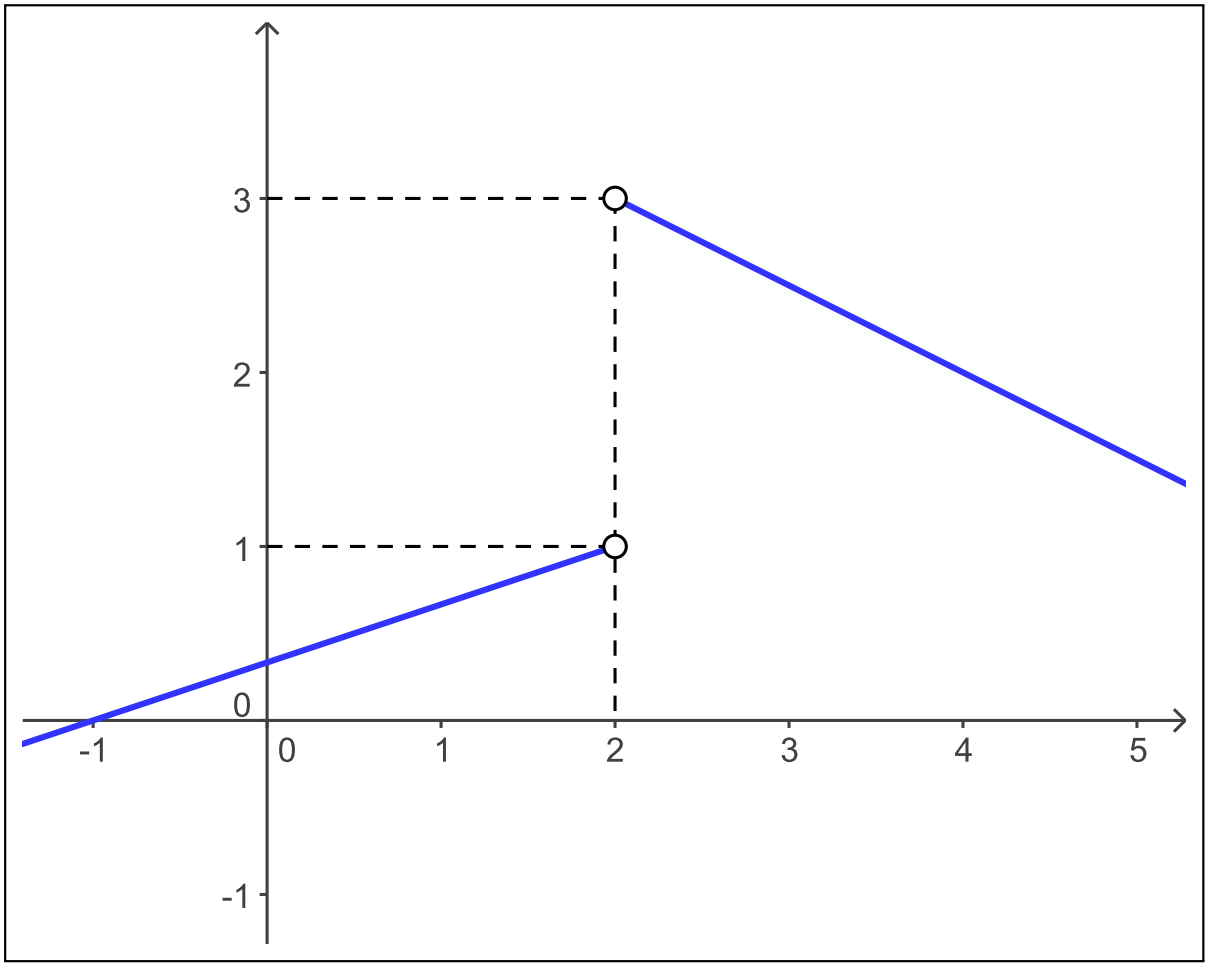
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

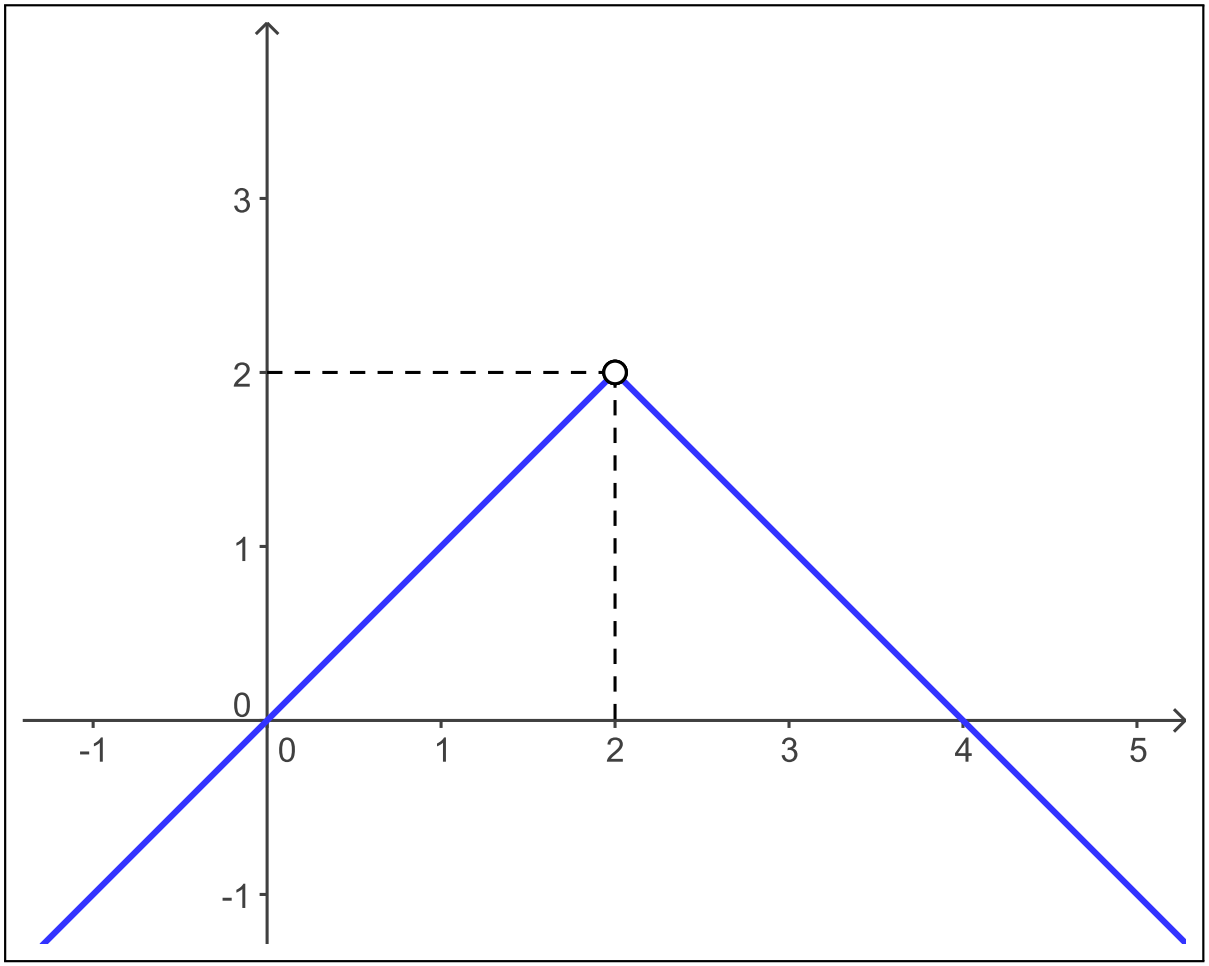
Exemplo

Moral:

o valor $f(2)$ da função f no ponto $p = 2$ pouco importa para o cálculo dos valores dos limites $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$!

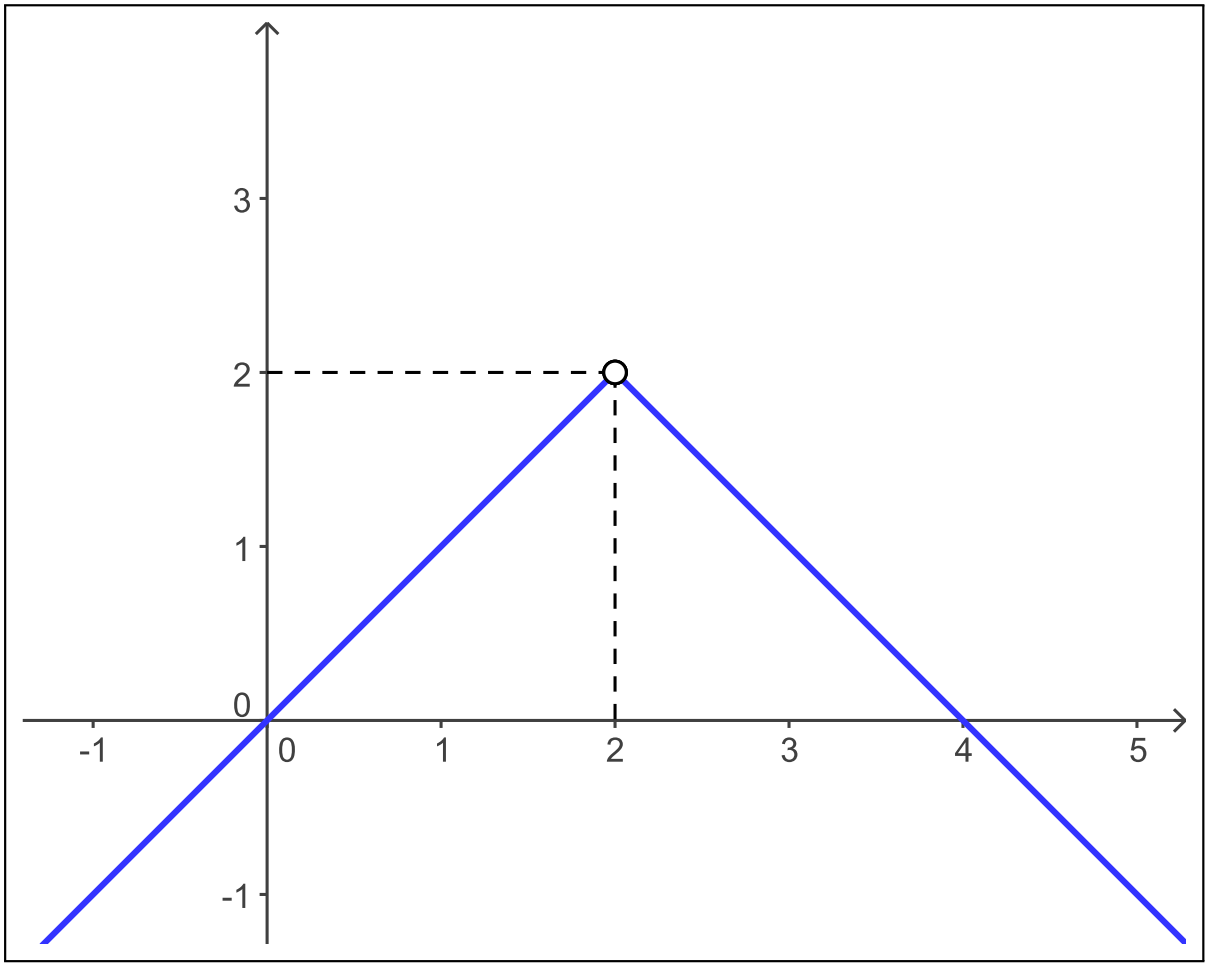
O que determina $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ é o que acontece com f em torno de $p = 2$!

Exemplo



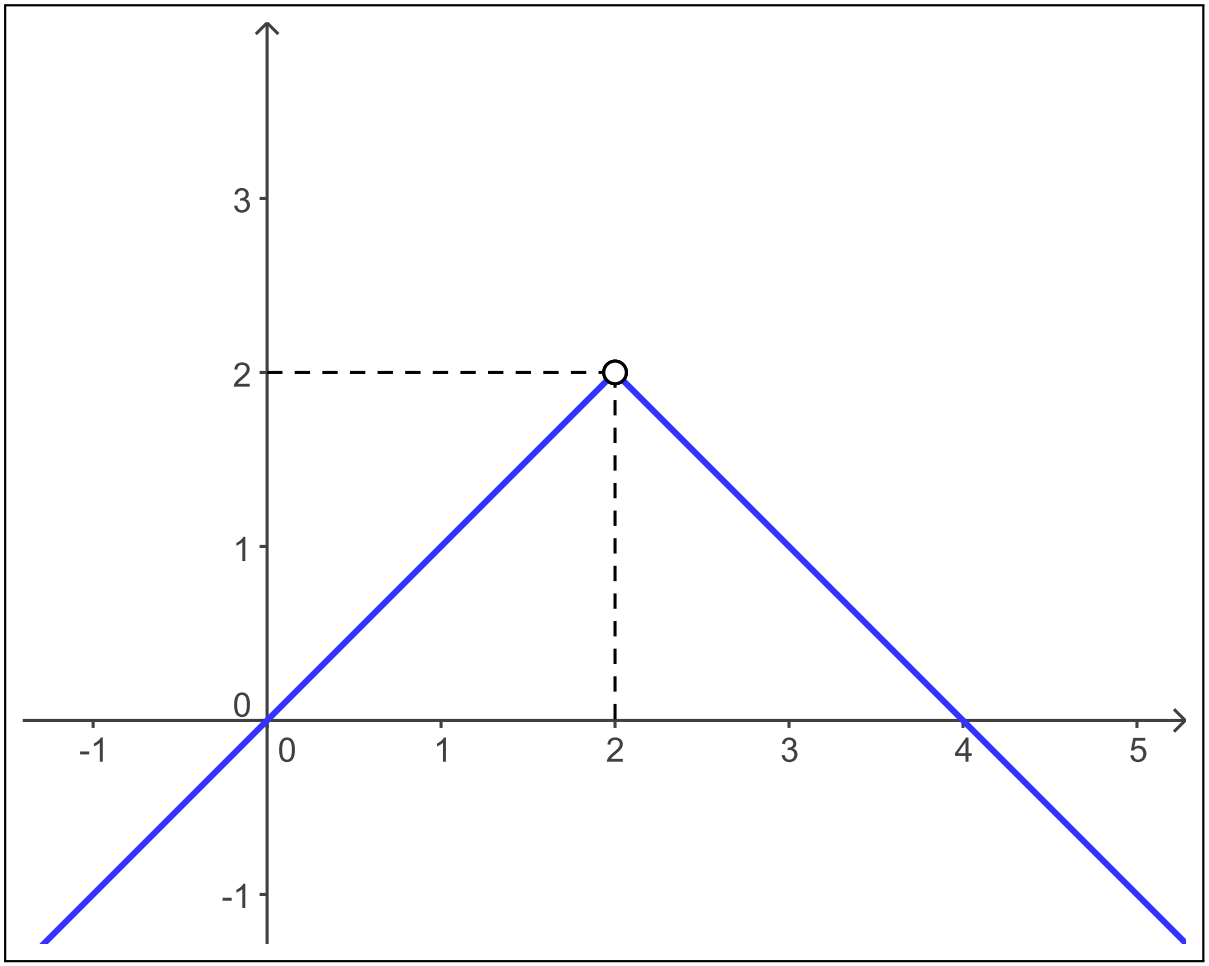
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



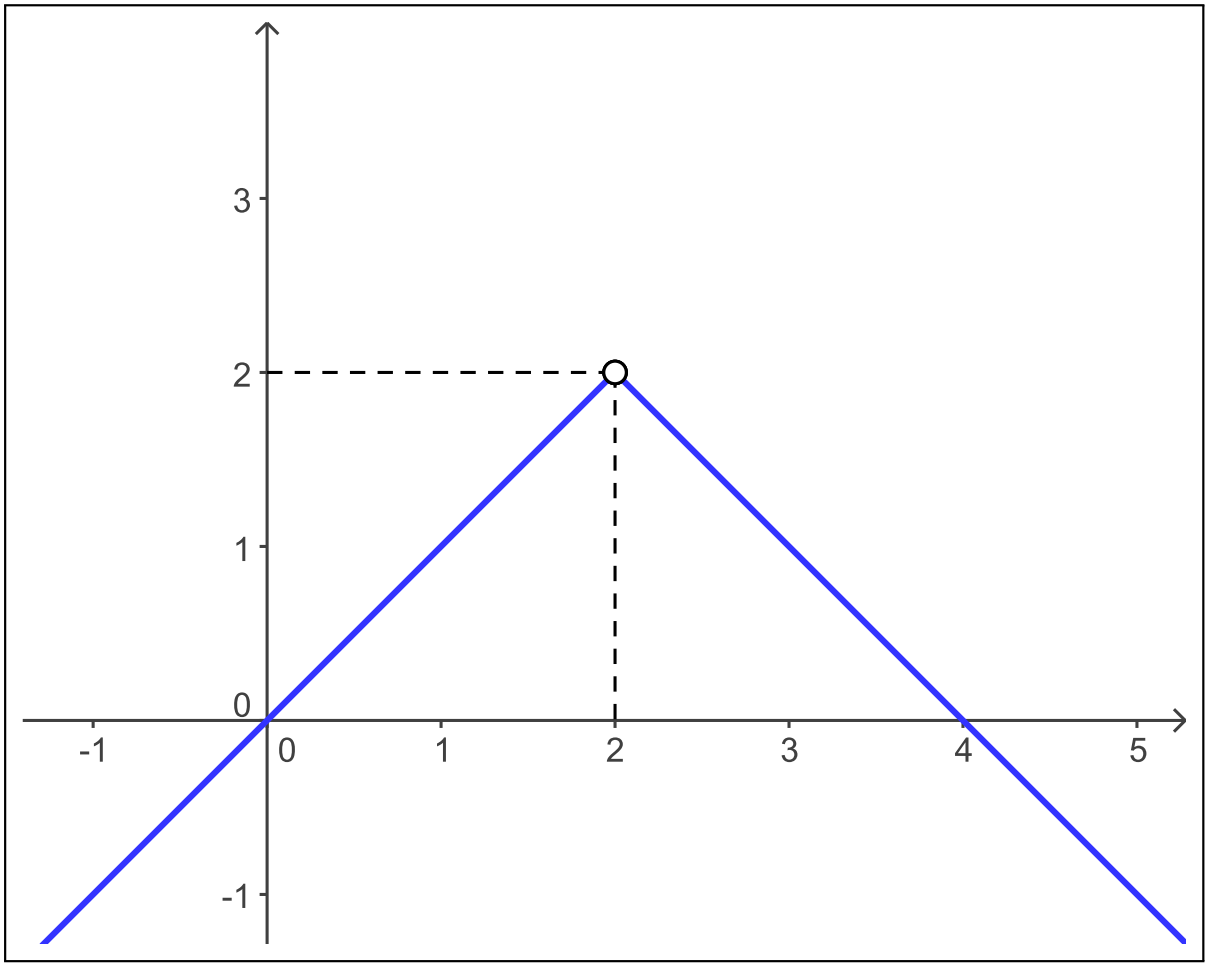
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



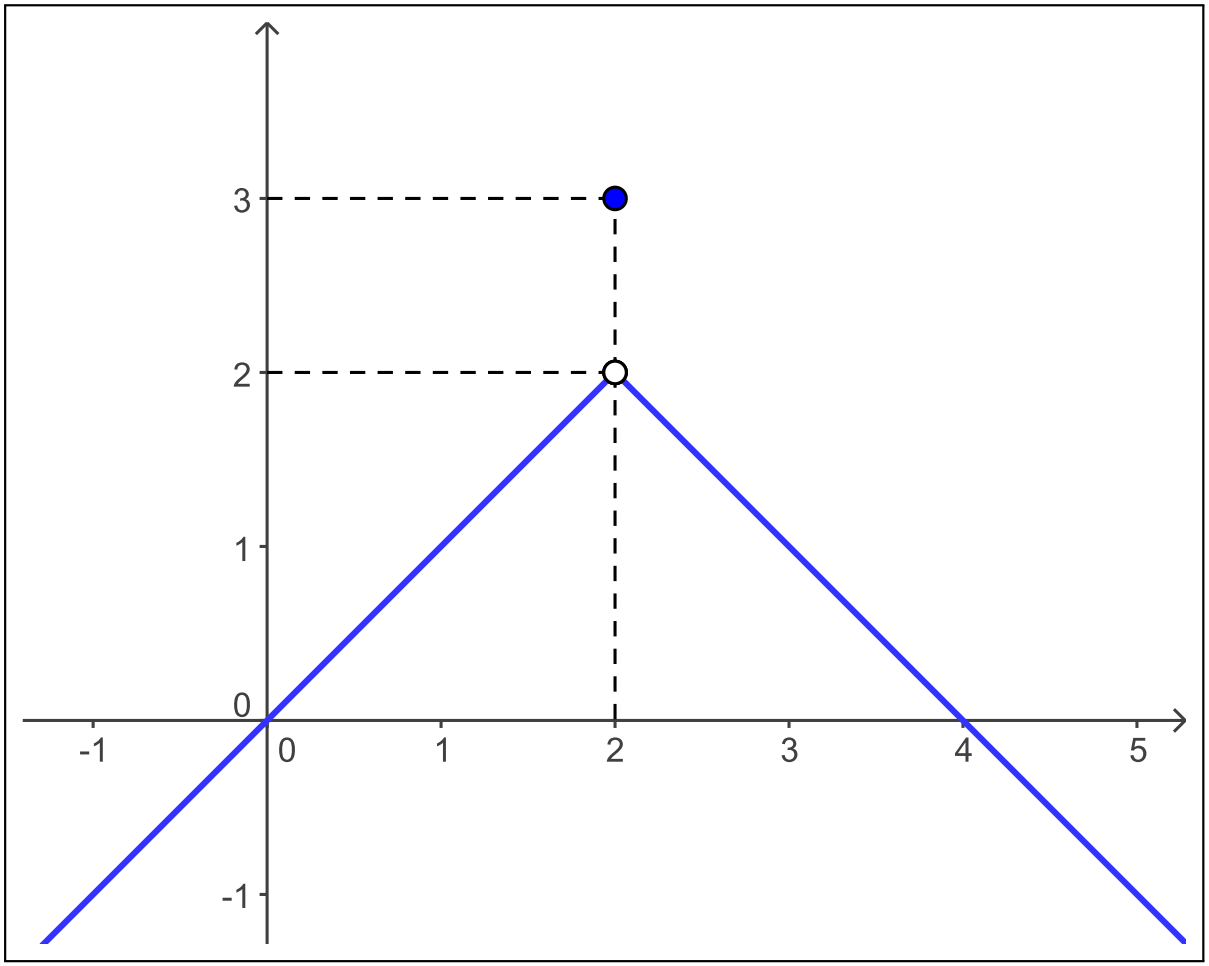
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



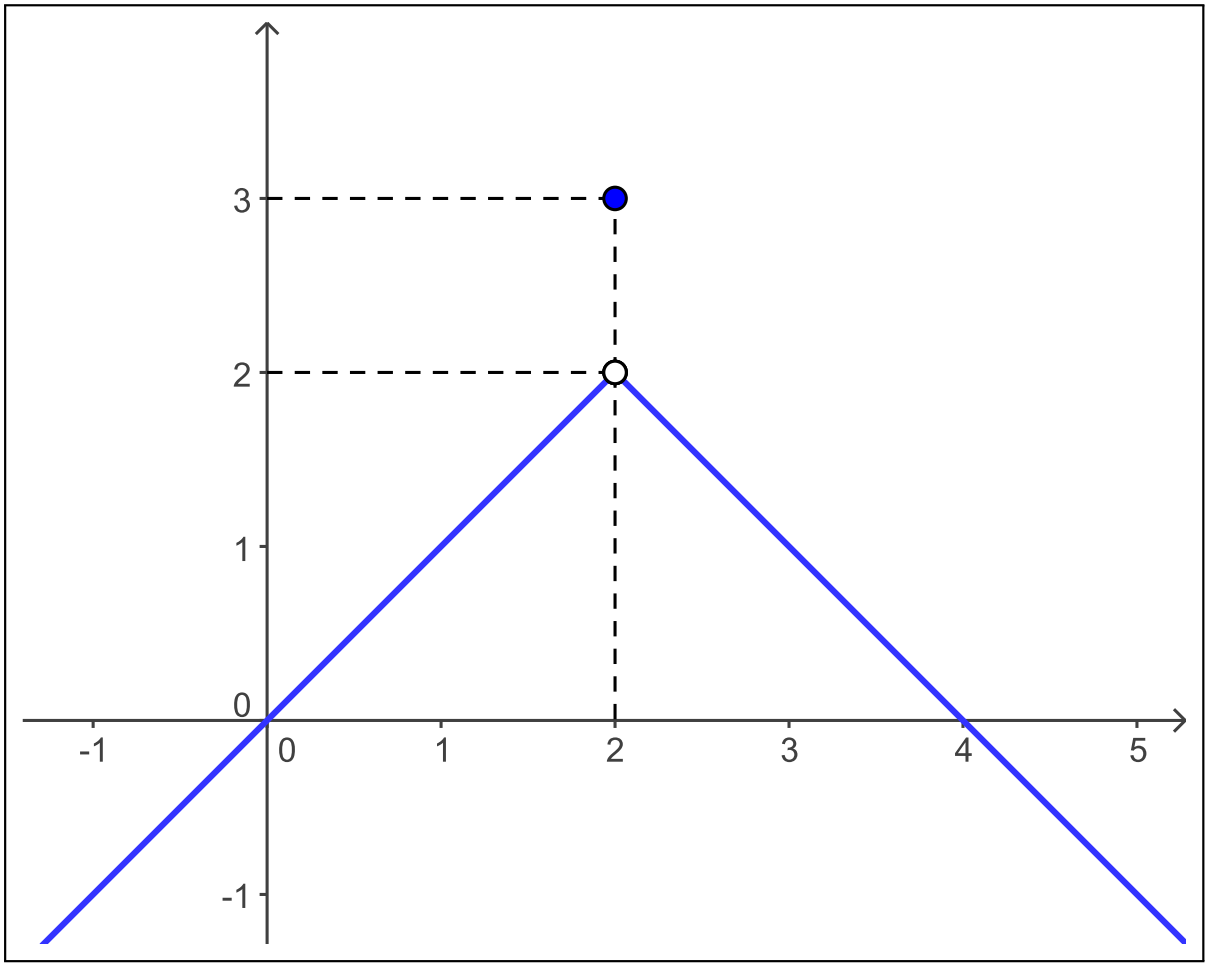
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



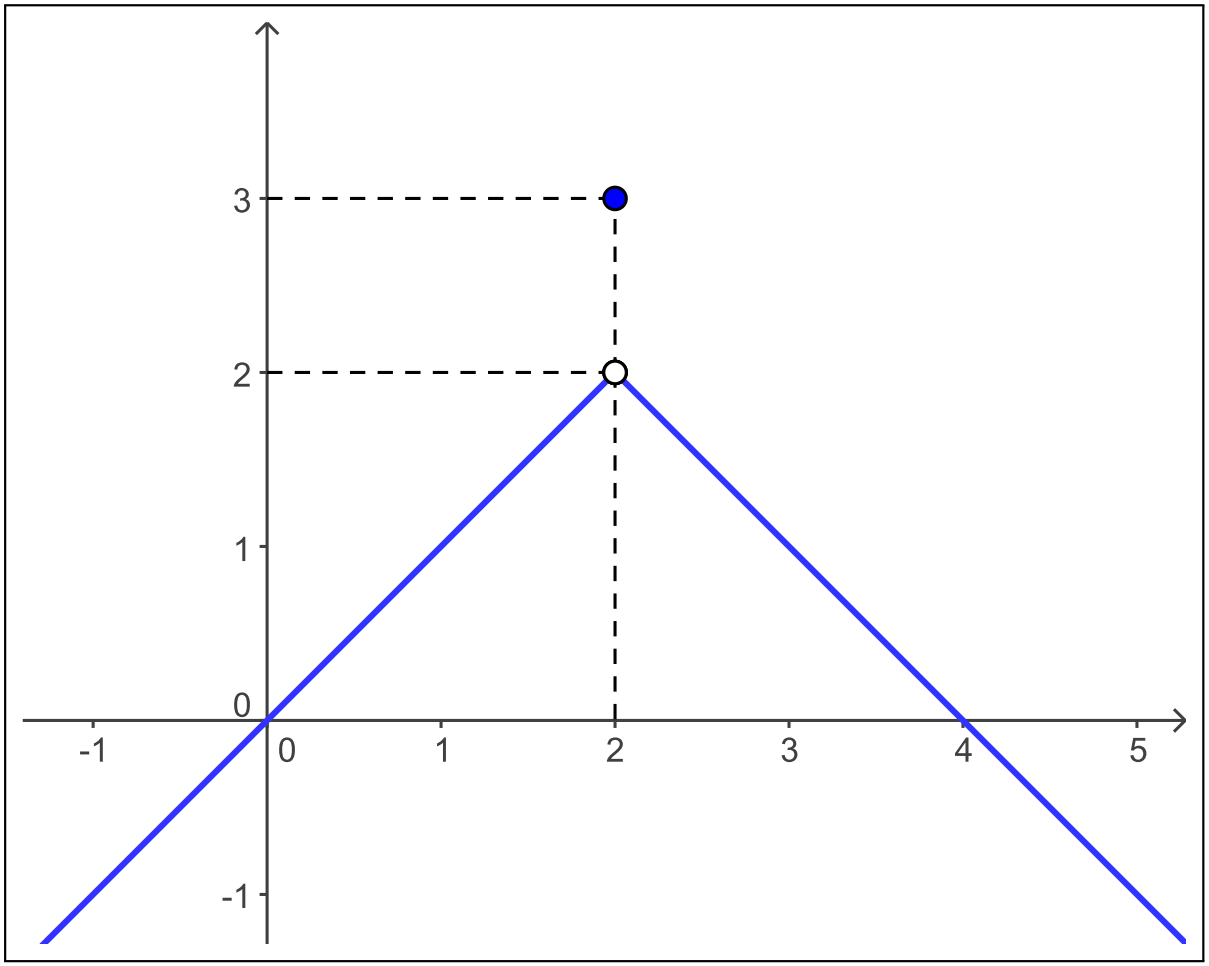
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



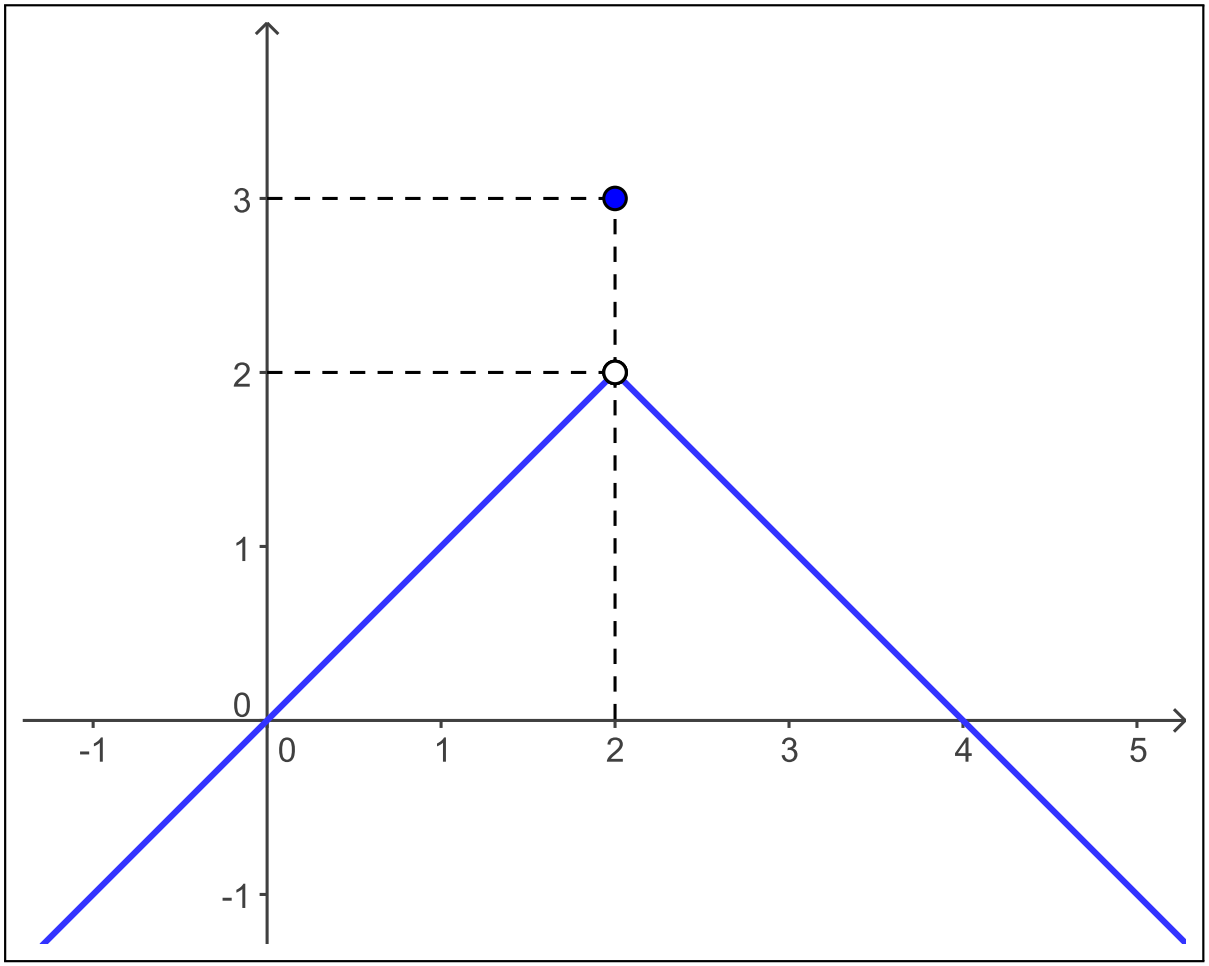
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



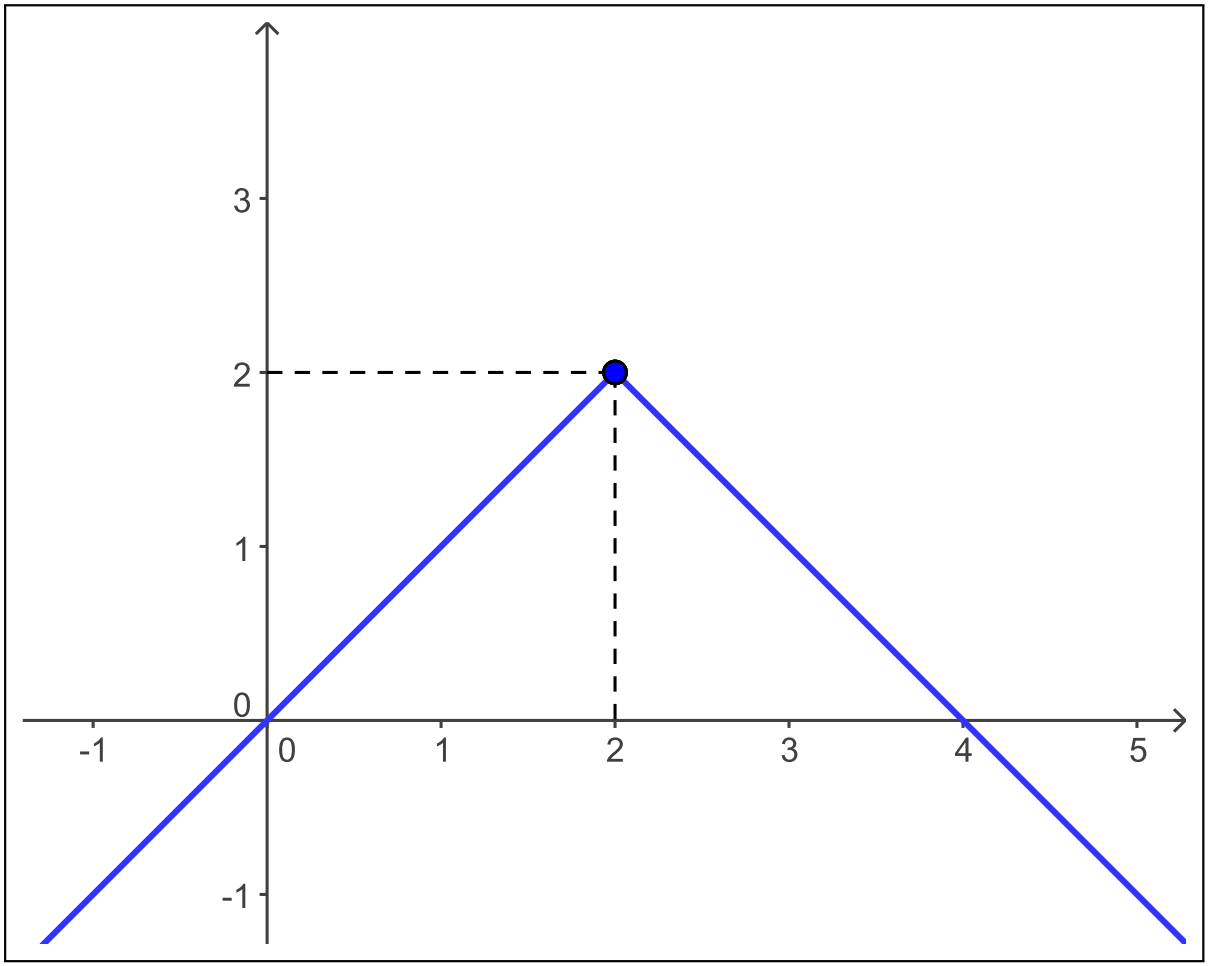
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



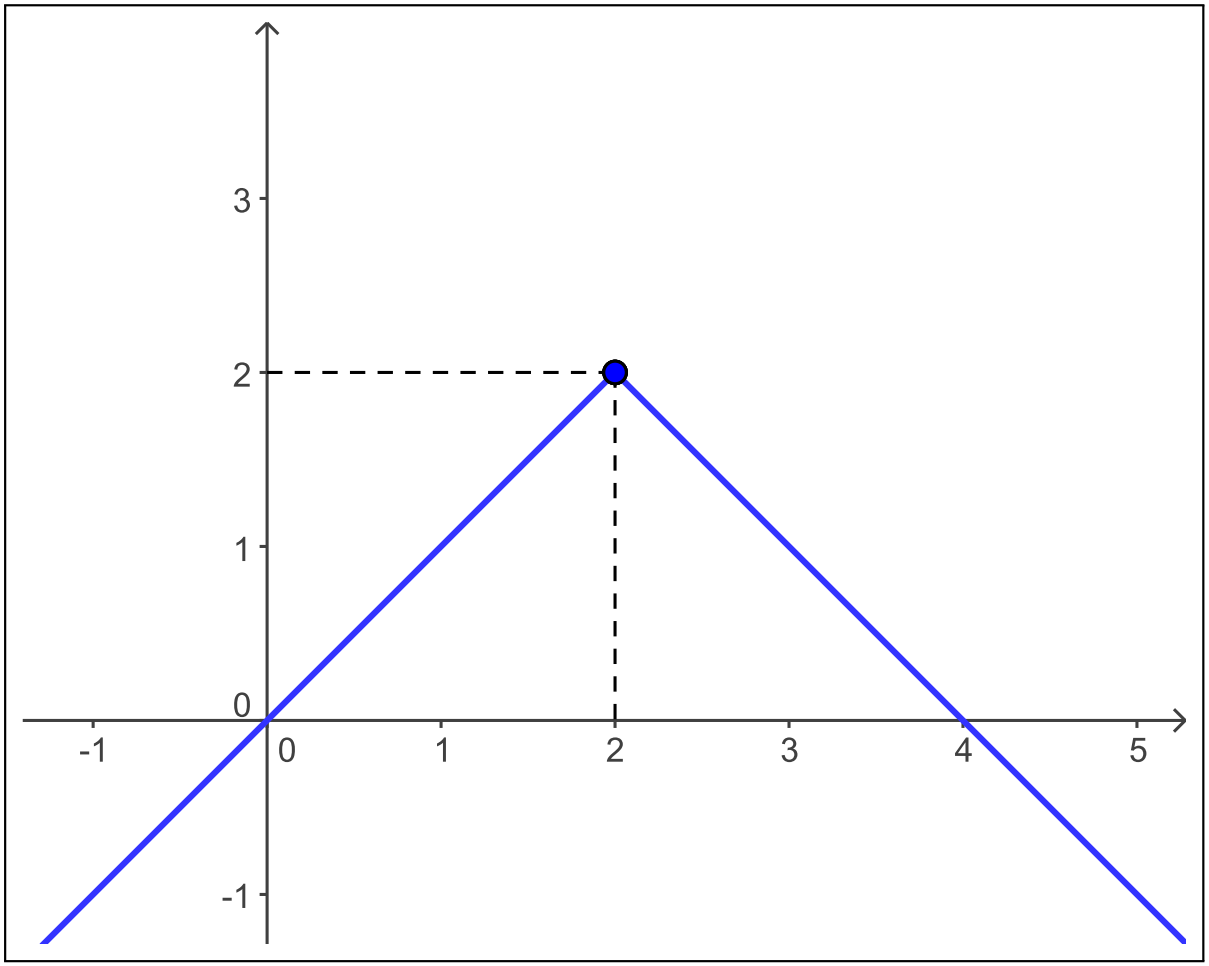
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

Exemplo



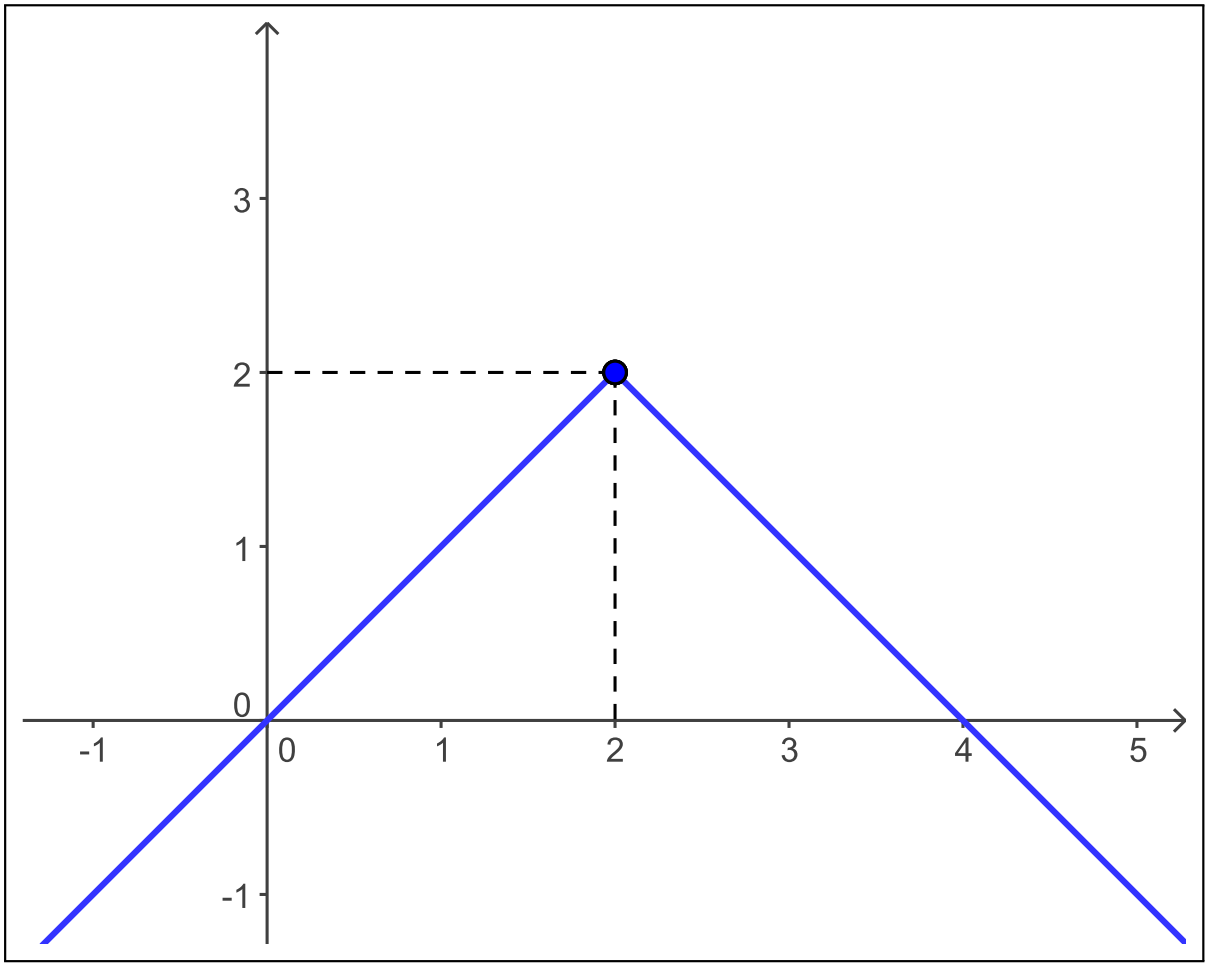
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x \to 2} f(x)$$

Exemplo



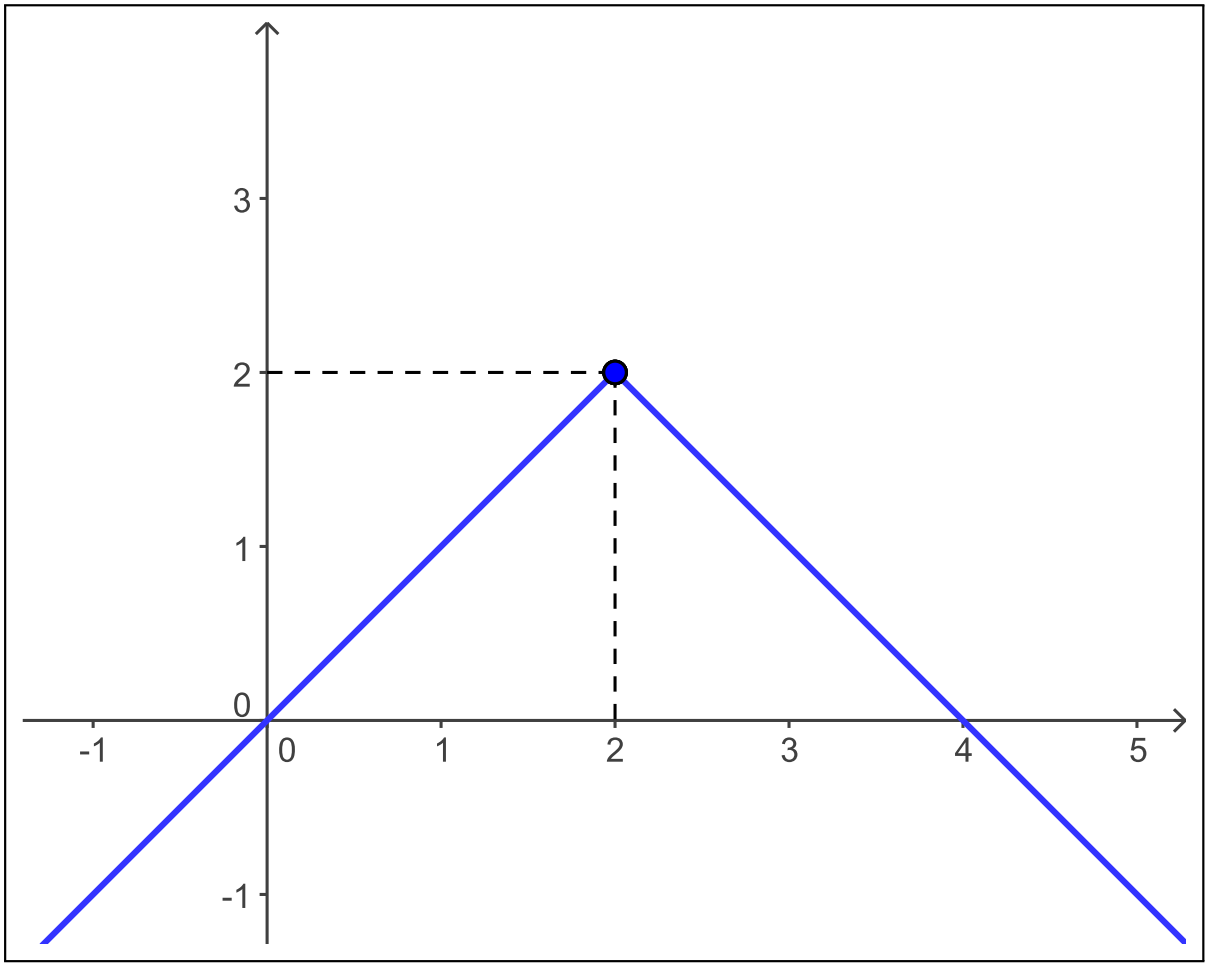
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 2.$$

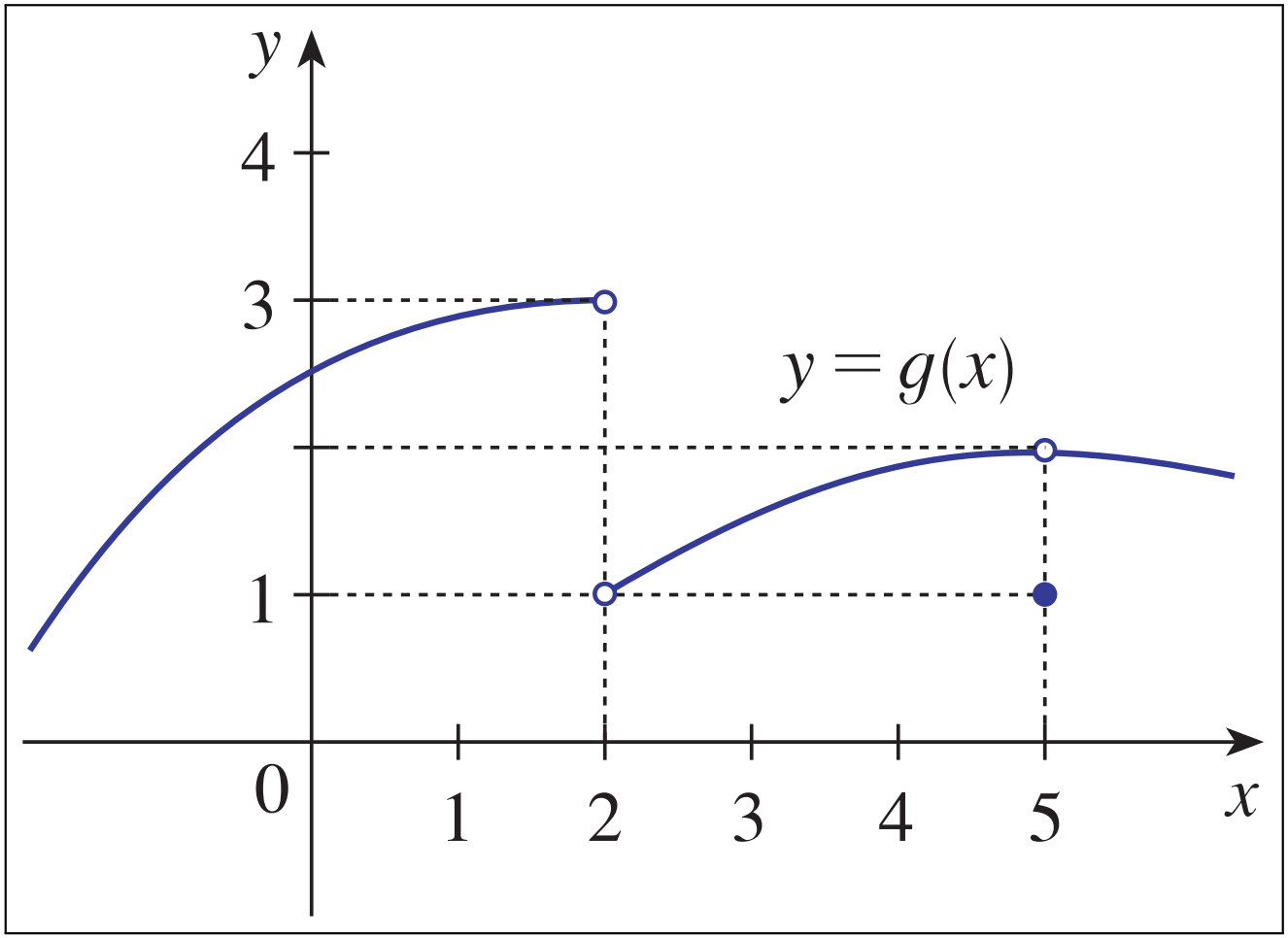
Exemplo

Moral:

o valor $g(2)$ da função g no ponto $p = 2$ pouco importa para o cálculo dos valores dos limites $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} g(x)$!

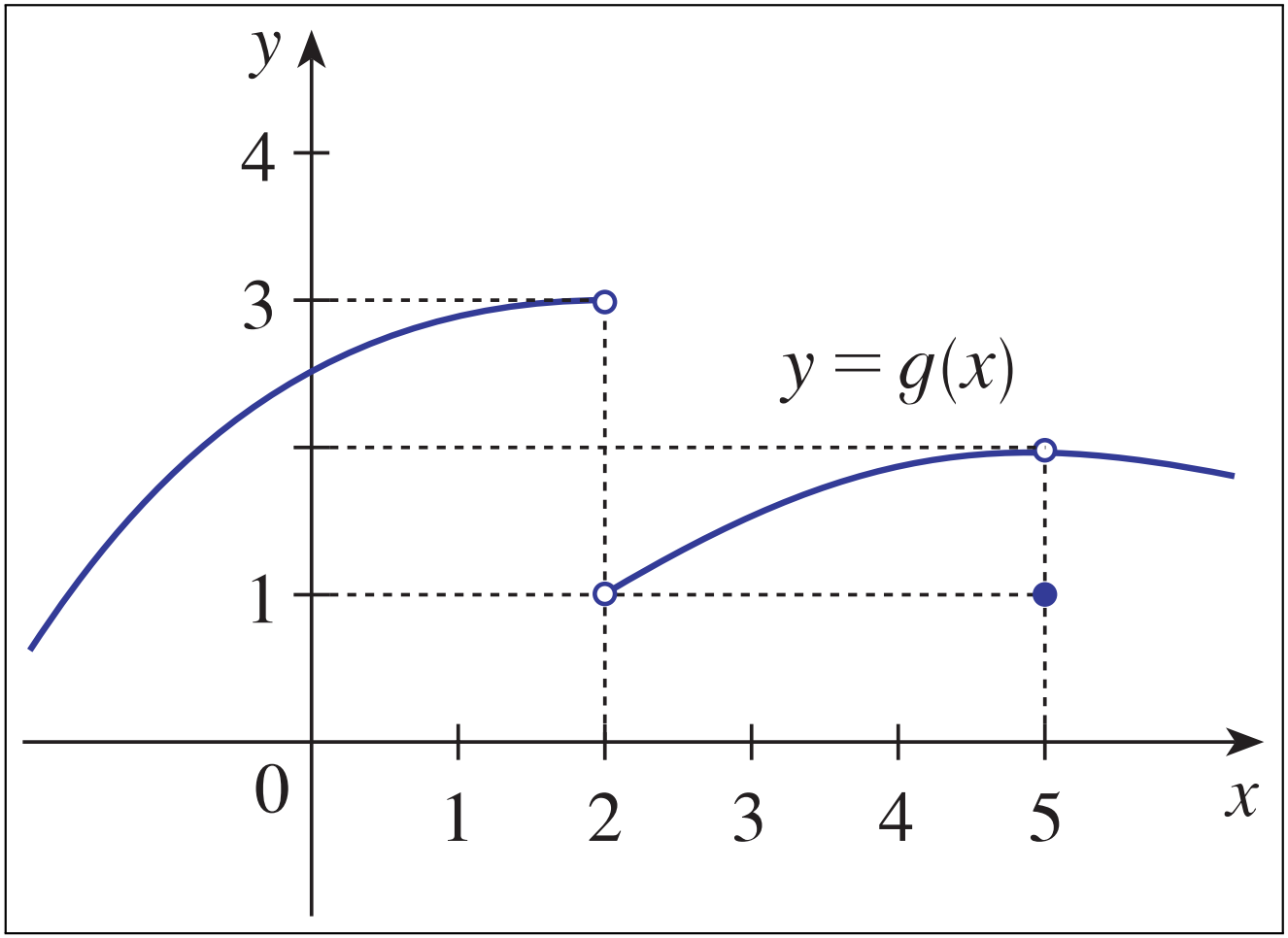
O que determina $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ é o que acontece com g em torno de $p = 2$!

Exemplo



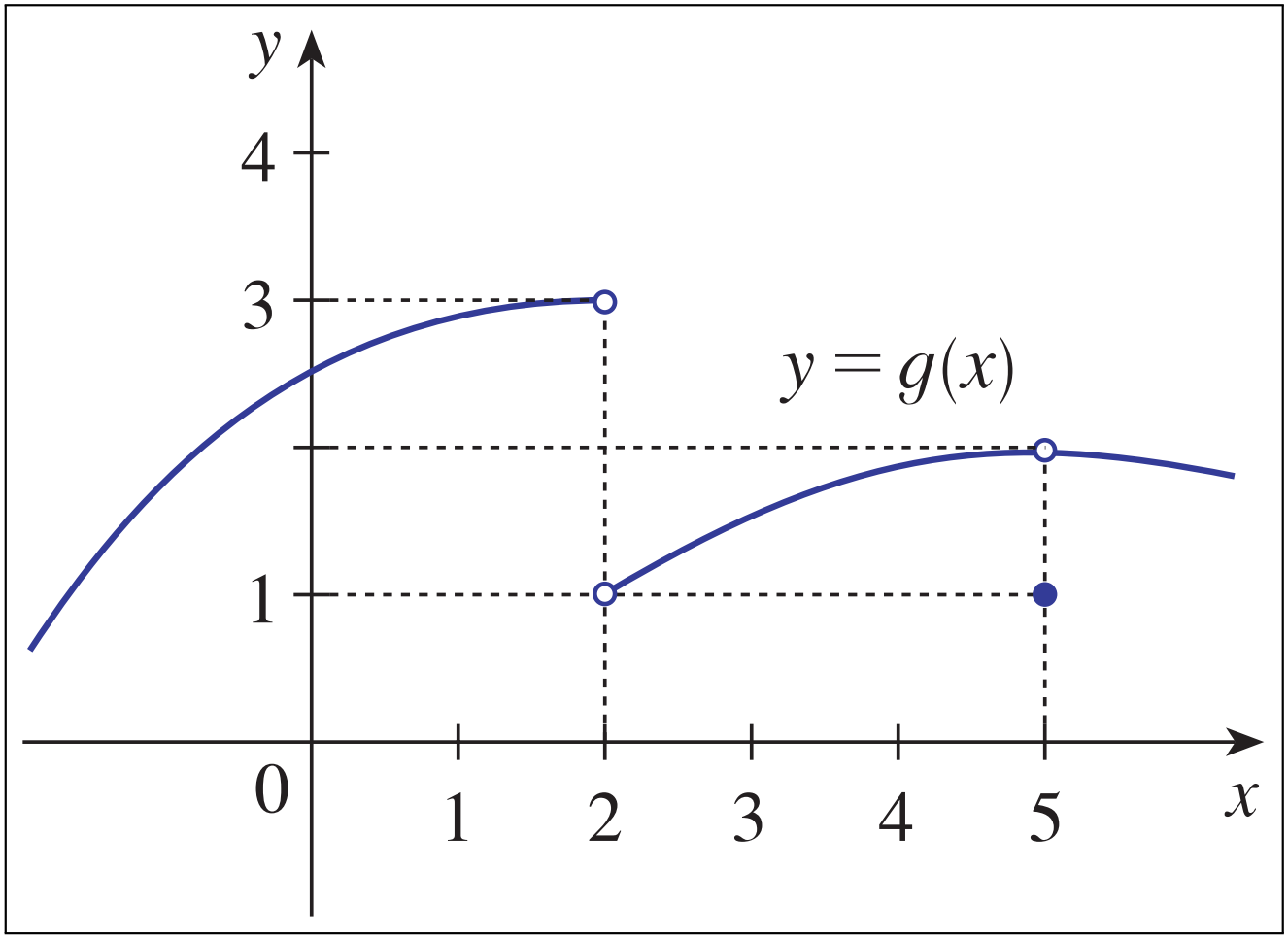
$\lim_{x \to 2^-} g(x)$ $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ $\lim_{x \to 2} g(x)$

Exemplo



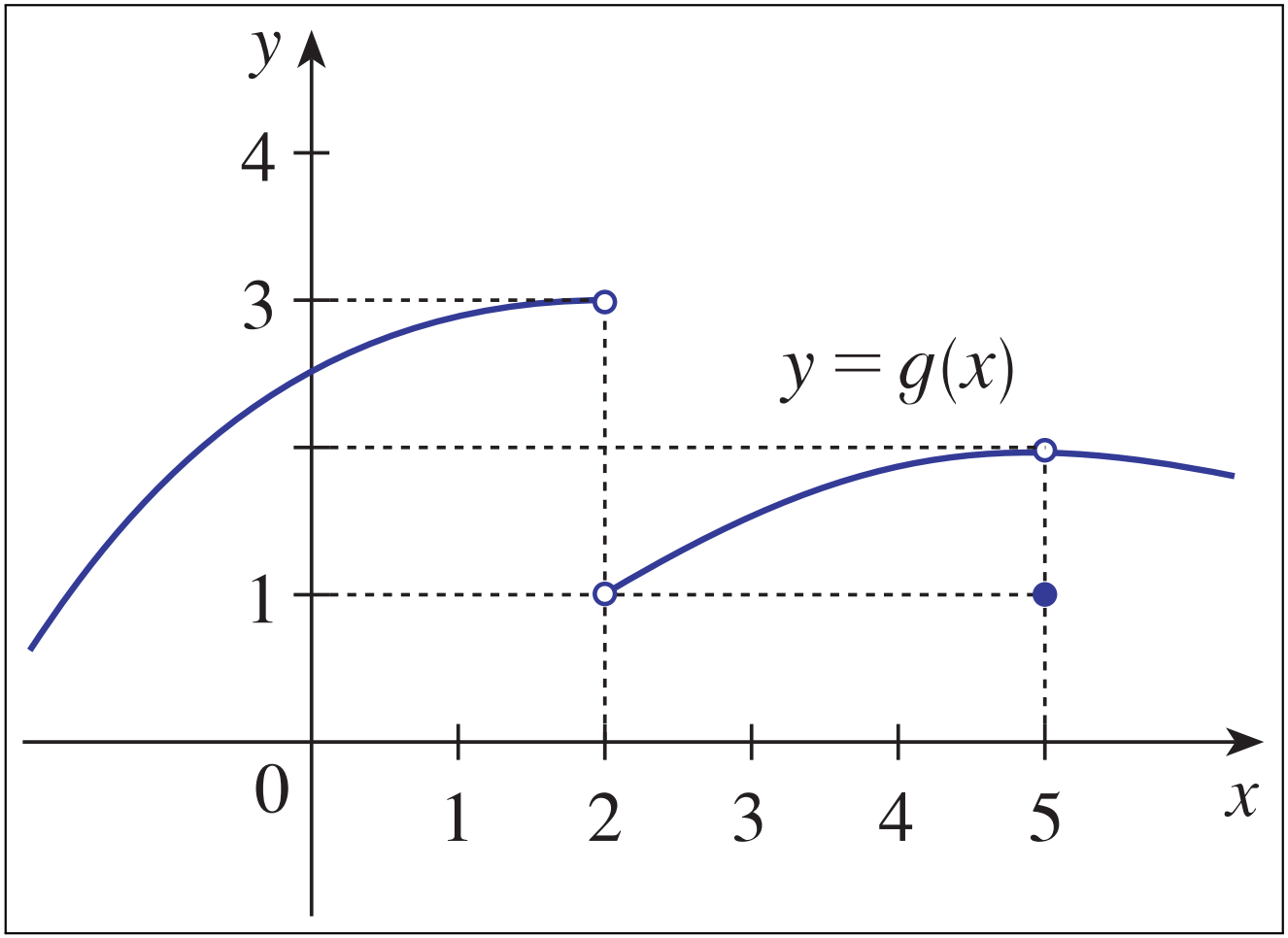
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) \qquad \lim_{x\to 2} g(x)$$

Exemplo



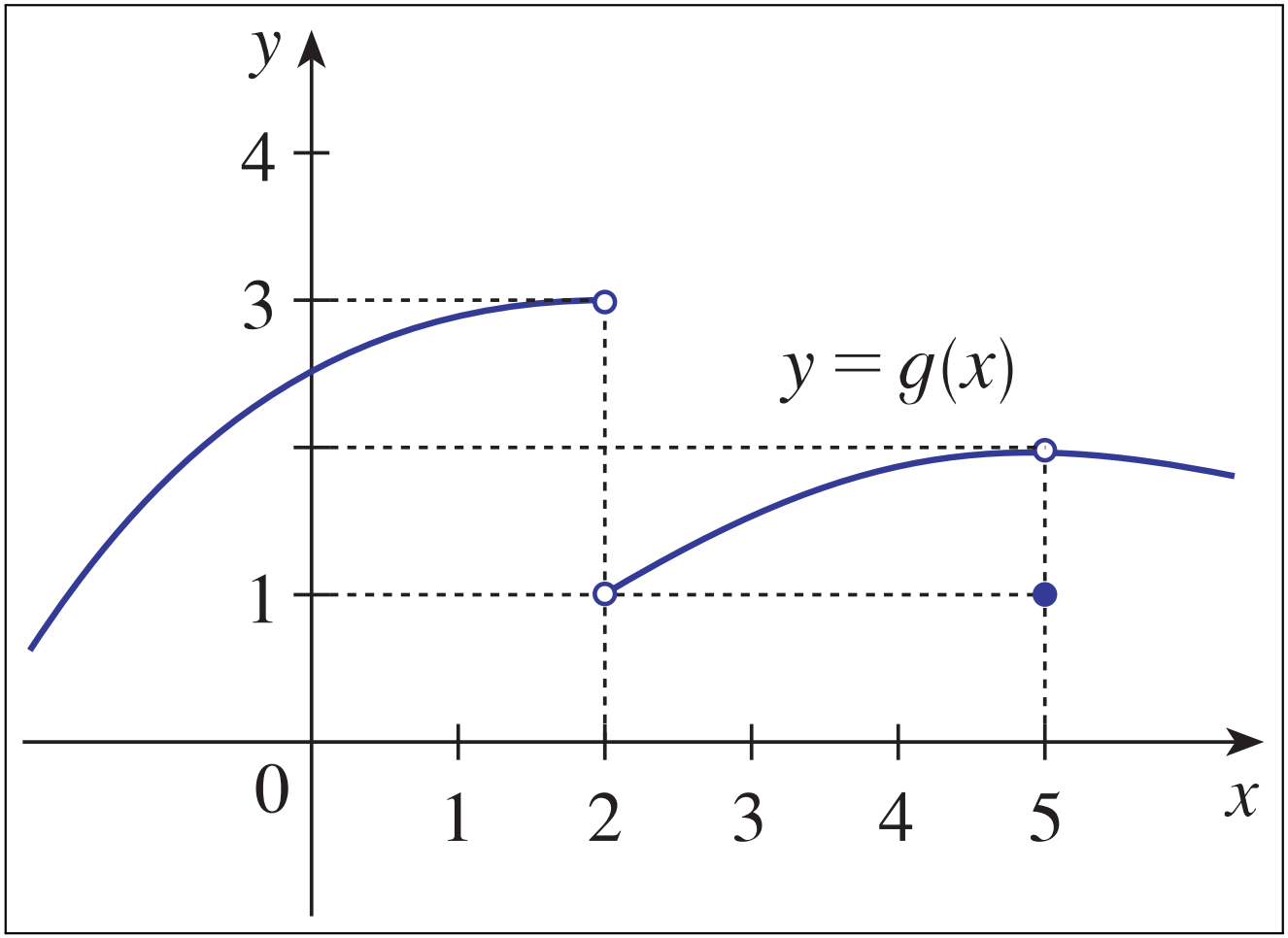
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} g(x)$$

Exemplo



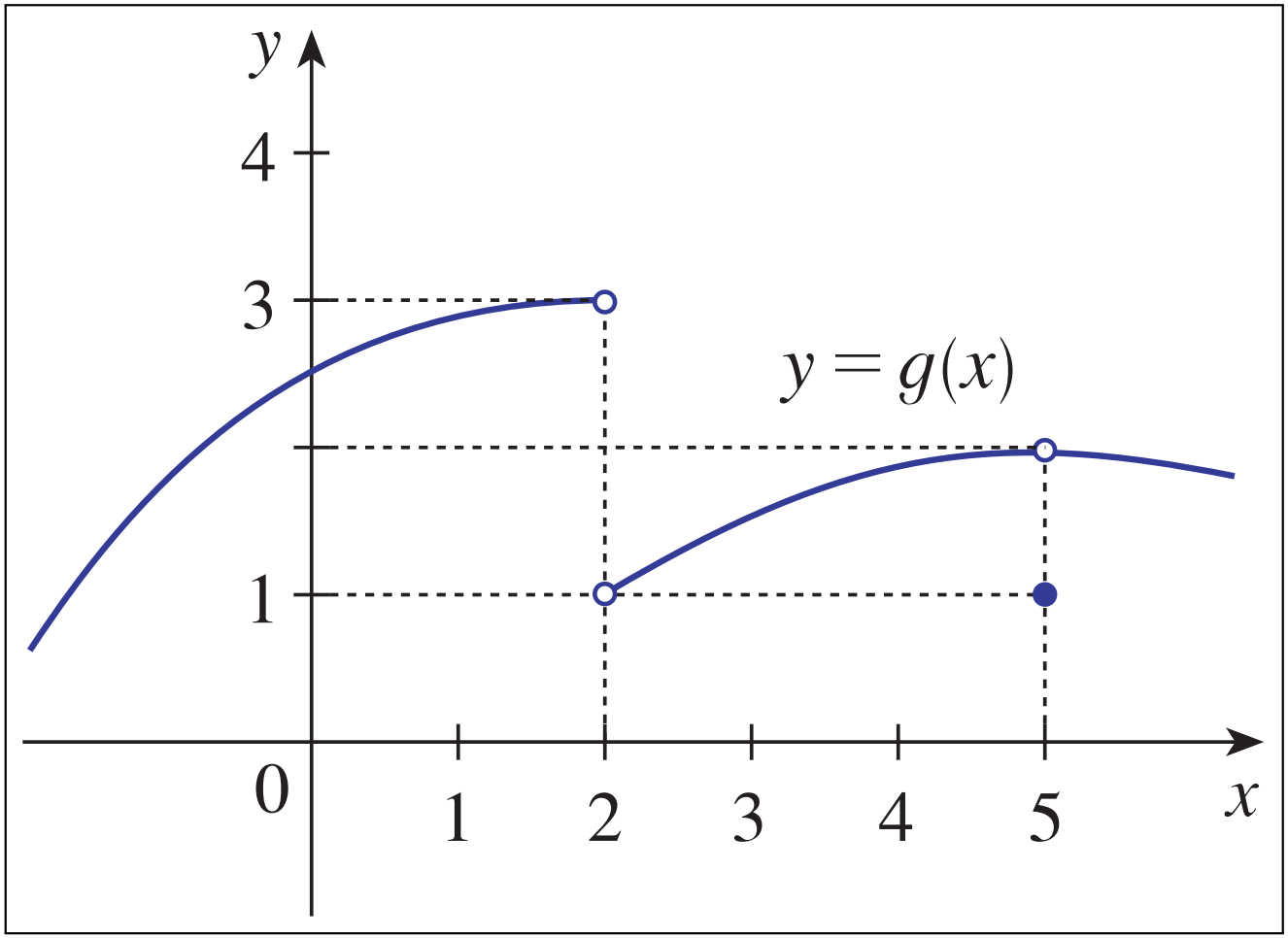
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3, \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} g(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo



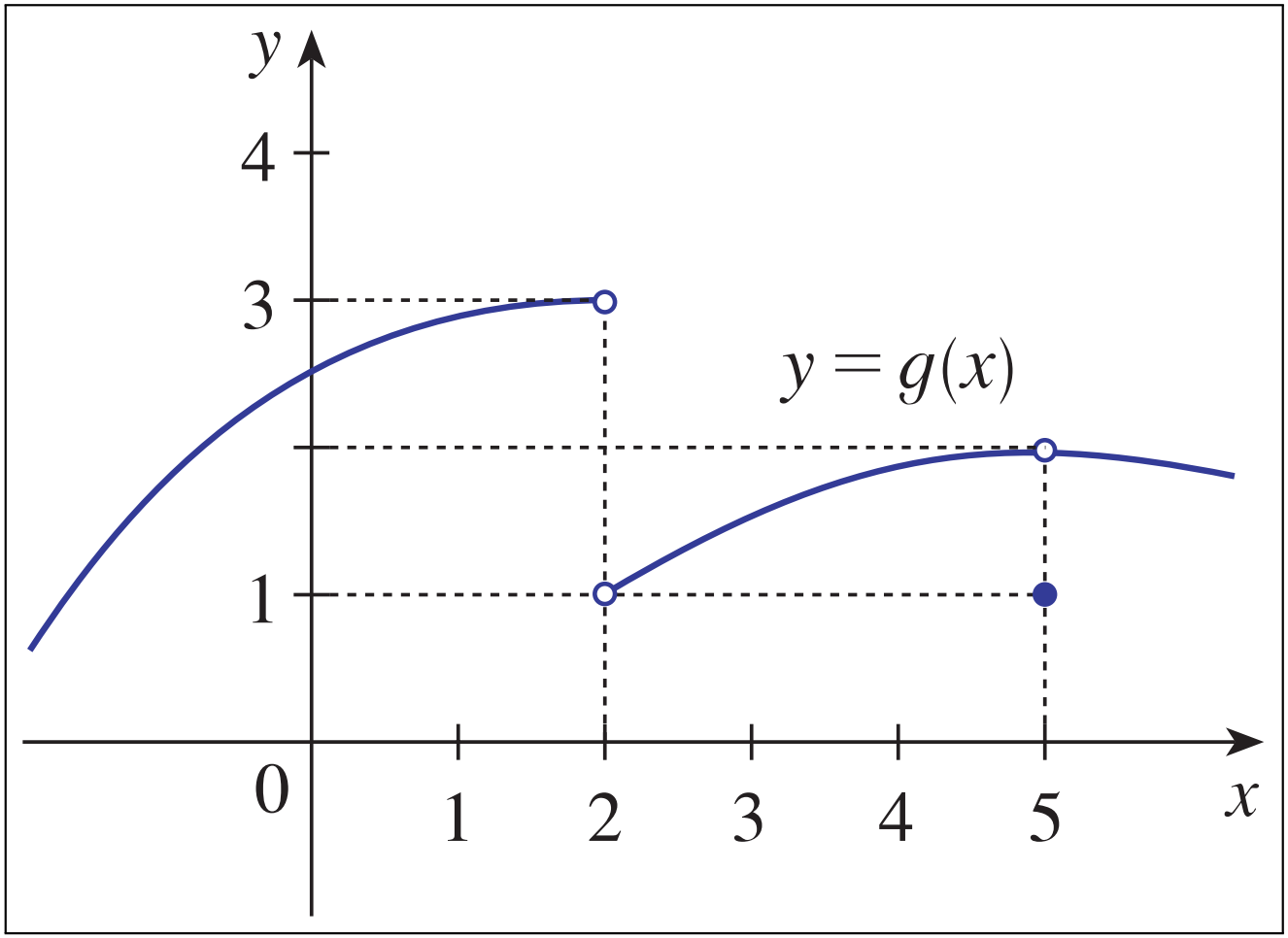
$\lim_{x \to 5^-} g(x)$ $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ $\lim_{x \to 5} g(x)$

Exemplo



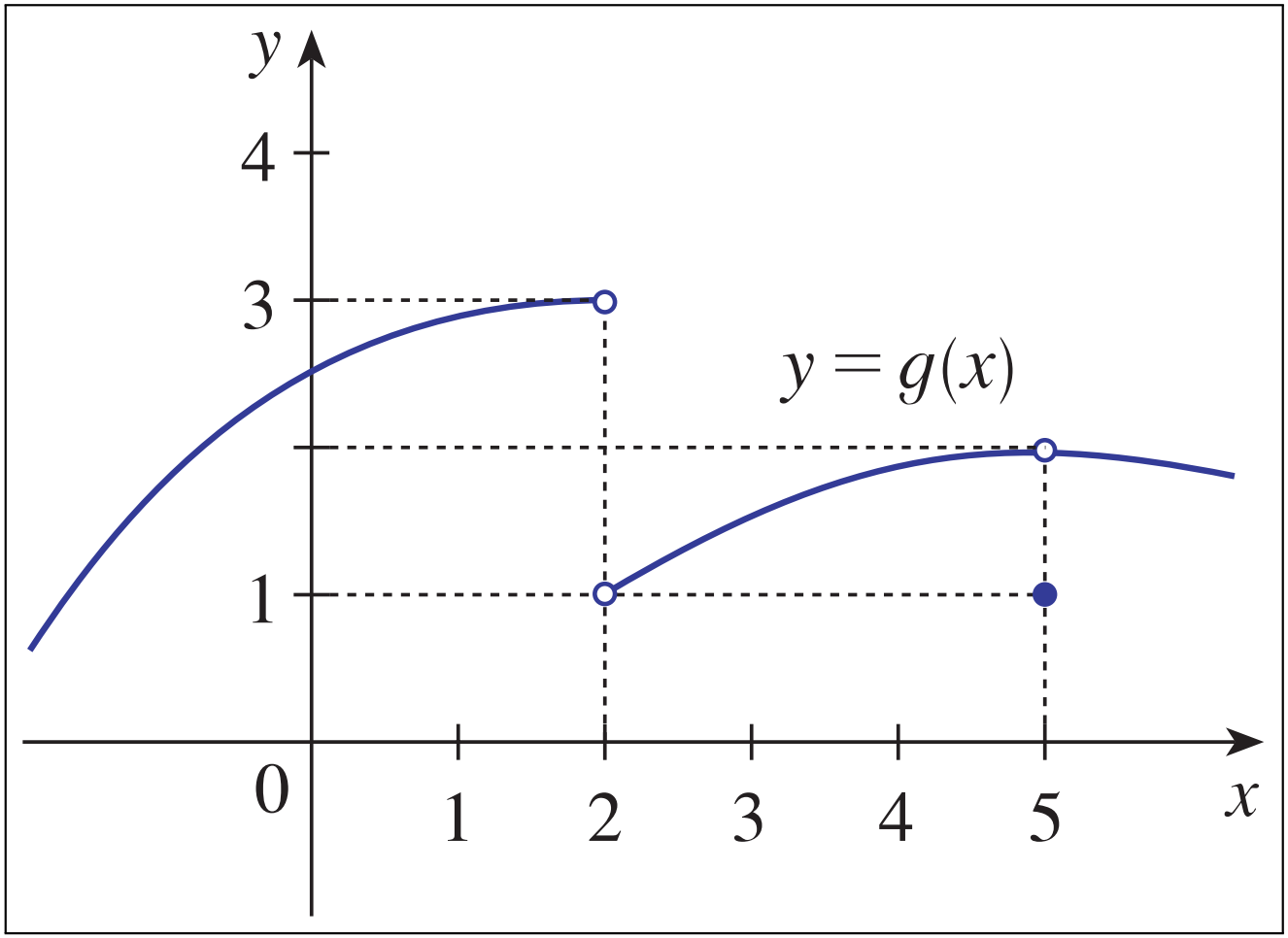
$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) \qquad \lim_{x\to 5} g(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5} g(x)$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 2.$$

Novo exercício!

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5\,x + 4}{|x - 1|}$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5\,x + 4 = (x-1)(x-4)$, segue-se que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5\,x + 4}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Novo exercício!

Como $x^2 - 5\,x + 4 = (x-1)(x-4)$, segue-se que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5\,x + 4}{|x-1|} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Assim, precisamos estudar os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}.$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1}$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4)$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|}$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)}$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4)$$

Novo exercício!

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x-4) = -3$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x-4) = +3.$$

Novo exercício!

Como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = -3 \neq +3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|},$$

Novo exercício!

Como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|} = -3 \neq +3 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-4)}{|x-1|},$$

segue-se que

não existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5\,x+4}{|x-1|}$!

Propriedades de limites

Proposição

Suponha que existam os limites $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$. Então:

(1) O limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

(2) O limite de uma diferença é a diferença dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} g(x).$$

(3) O limite de um produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot \text{ g(x)}) = \lim_{x\to p} f(x)\cdot \lim_{x\to p} g(x).$$

Proposição

(4) O limite de um quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to p} f(x)}{\lim\limits_{x \to p} g(x)}.$$

(5) O limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função:

$$\lim_{x \to p} (c \cdot \text{ f(x)}) = c \cdot \lim_{x \to p} f(x).$$

Corolário

Suponha que exista o limite $\lim_{x \to p} f(x)$. Então, para todo numero inteiro $n > 0$, vale que

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n.$$

Corolário

Suponha que exista o limite $\lim_{x \to p} f(x)$. Então, para todo numero inteiro $n > 0$, vale que

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} [f(x)]^n &= \lim_{x \to p} (f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)) \qquad \text{(por (3))} \\
&= \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \cdots \left(\lim_{x \to p} f(x)\right) \\
&= \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n.
\end{aligned}$$

Os resultados anteriores
continuam válidos para limites laterais!

Exemplo

$$\lim_{x \to 5} (2\,x^2 - 3\,x + 4)$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) \;=\; \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(2\,x^2-3\,x+4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2)-\lim_{x\to 5}(3\,x)+\lim_{x\to 5}4\\ &= 2\lim_{x\to 5}x^2-3\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}4\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}(2\,x^2 - 3\,x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2\,x^2) - \lim_{x\to 5}(3\,x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2\,(5)^2 - 3\,(5) + 4 \;=\; 39.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} \quad =$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3\,x) =$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} =$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3\,x) = \lim\limits_{x \to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x \to -2} x$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} =$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3\,x) = \lim\limits_{x \to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x \to -2} x = 5 - 3\,(-2)$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} =$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x \to -2} (5 - 3\,x) = \lim\limits_{x \to -2} 5 - 3 \lim\limits_{x \to -2} x = 5 - 3\,(-2) = 11 \neq 0$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2\,x^2 - 1}{5 - 3\,x} =$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x) = \lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2} x = 5-3\,(-2) = 11 \neq 0$, então

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2\,x^2-1}{5-3\,x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2\,x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x)}$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x) = \lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2} x = 5-3\,(-2) = 11 \neq 0$, então

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2\,x^2-1}{5-3\,x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2\,x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 + 2\lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{11}$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x) = \lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2} x = 5-3\,(-2) = 11 \neq 0$, então

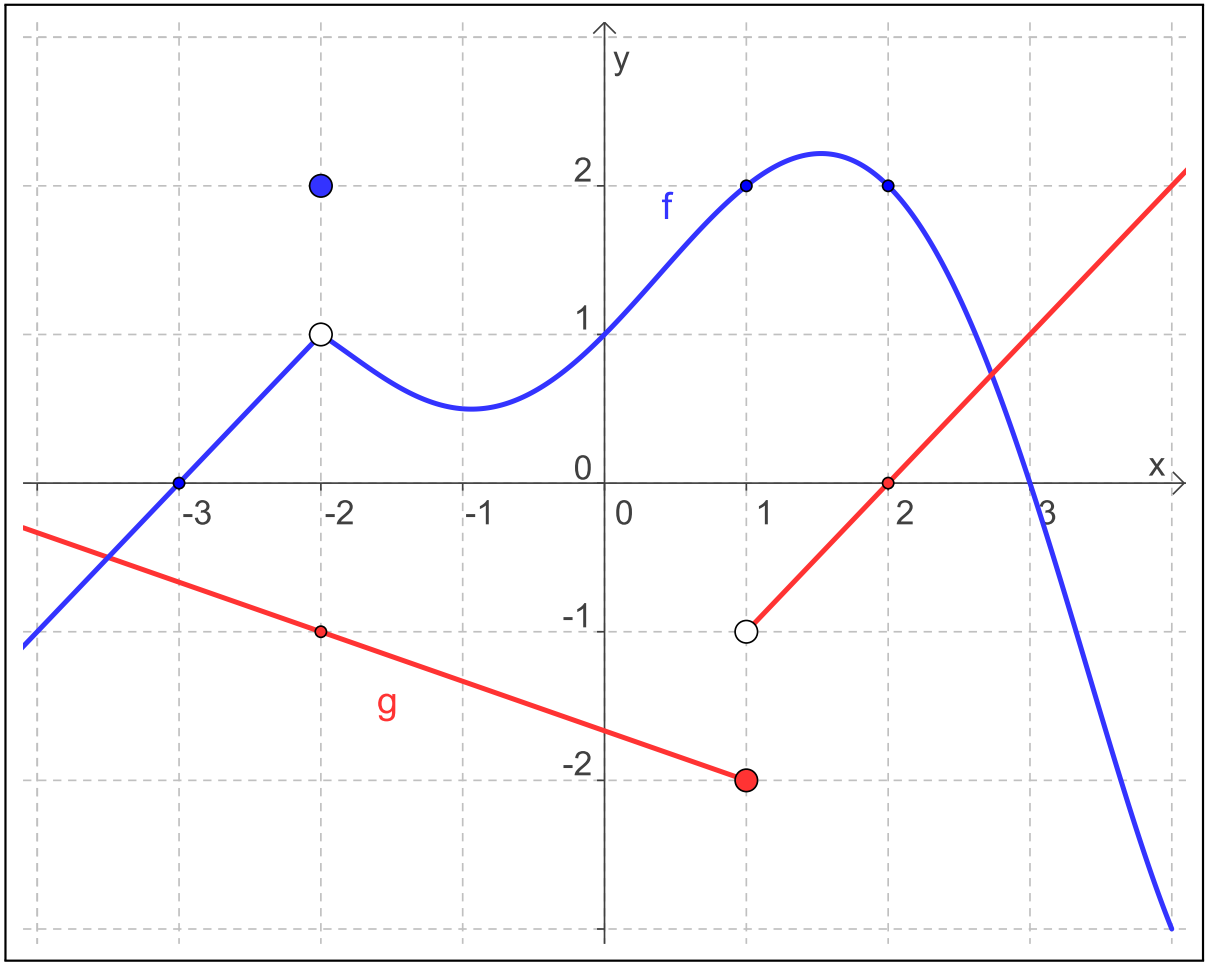
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2\,x^2-1}{5-3\,x} &= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2\,x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 + 2\lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{11} \\
&= \frac{(-2)^3+2\,(-2)^2-1}{11}
\end{aligned}$$

Exemplo

Como $\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x) = \lim\limits_{x\to -2} 5 - 3\lim\limits_{x\to -2} x = 5-3\,(-2) = 11 \neq 0$, então

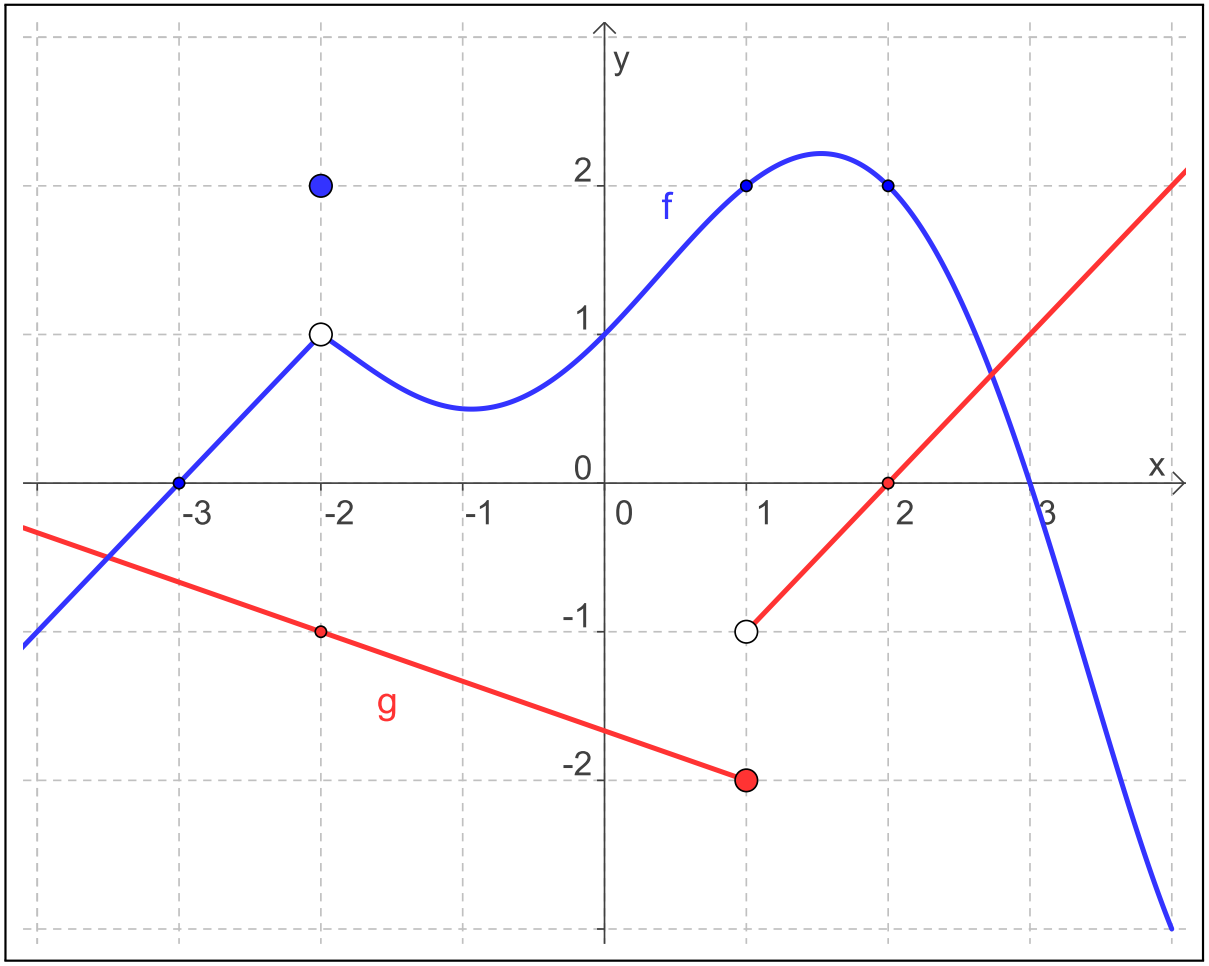
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2\,x^2-1}{5-3\,x} &= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2\,x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3\,x)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 + 2\lim\limits_{x\to -2} x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 1}{11} \\
&= \frac{(-2)^3+2\,(-2)^2-1}{11} = -\frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

Exemplo



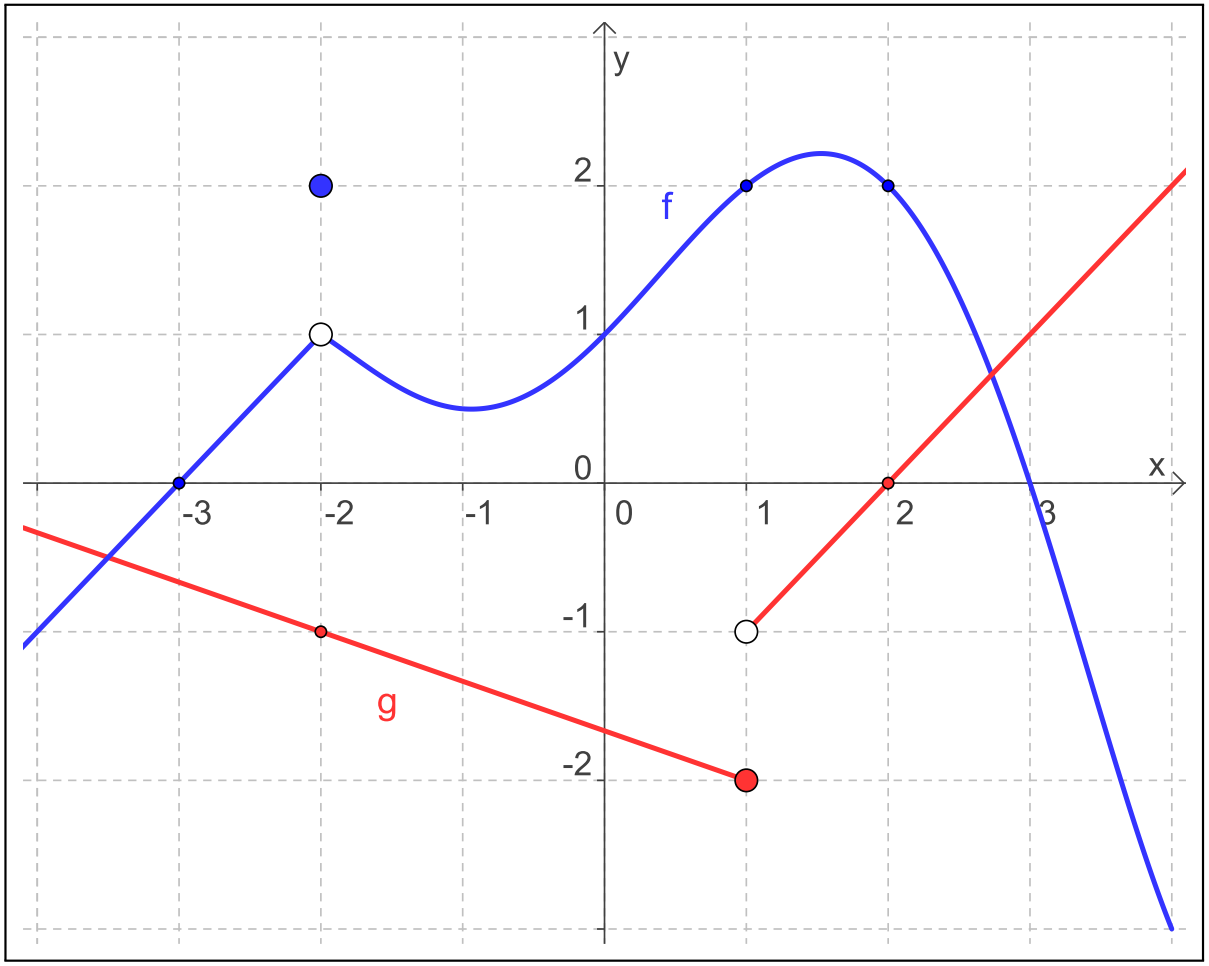
$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5\, g(x)] =$$

Exemplo



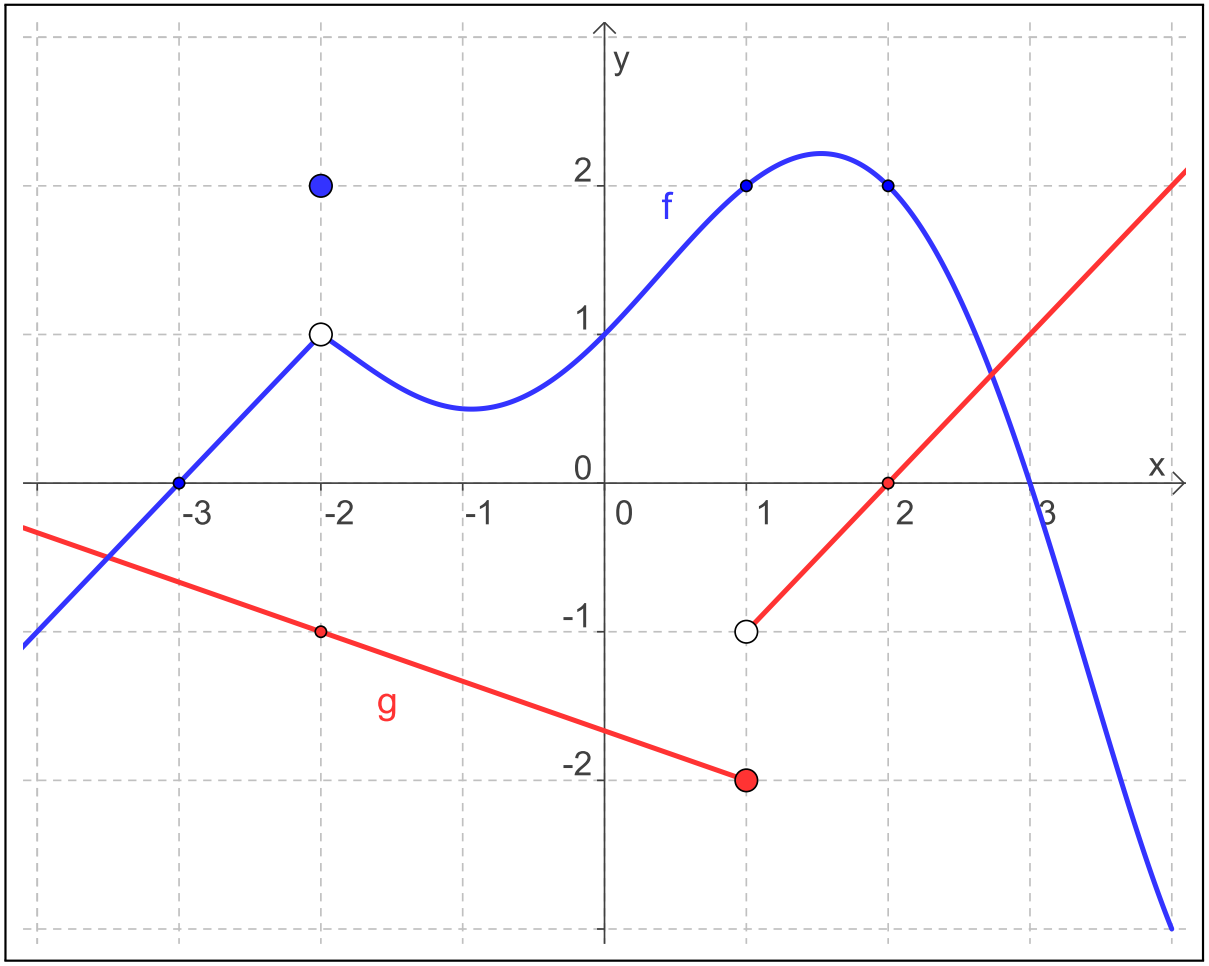
$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5\,g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) =$$

Exemplo



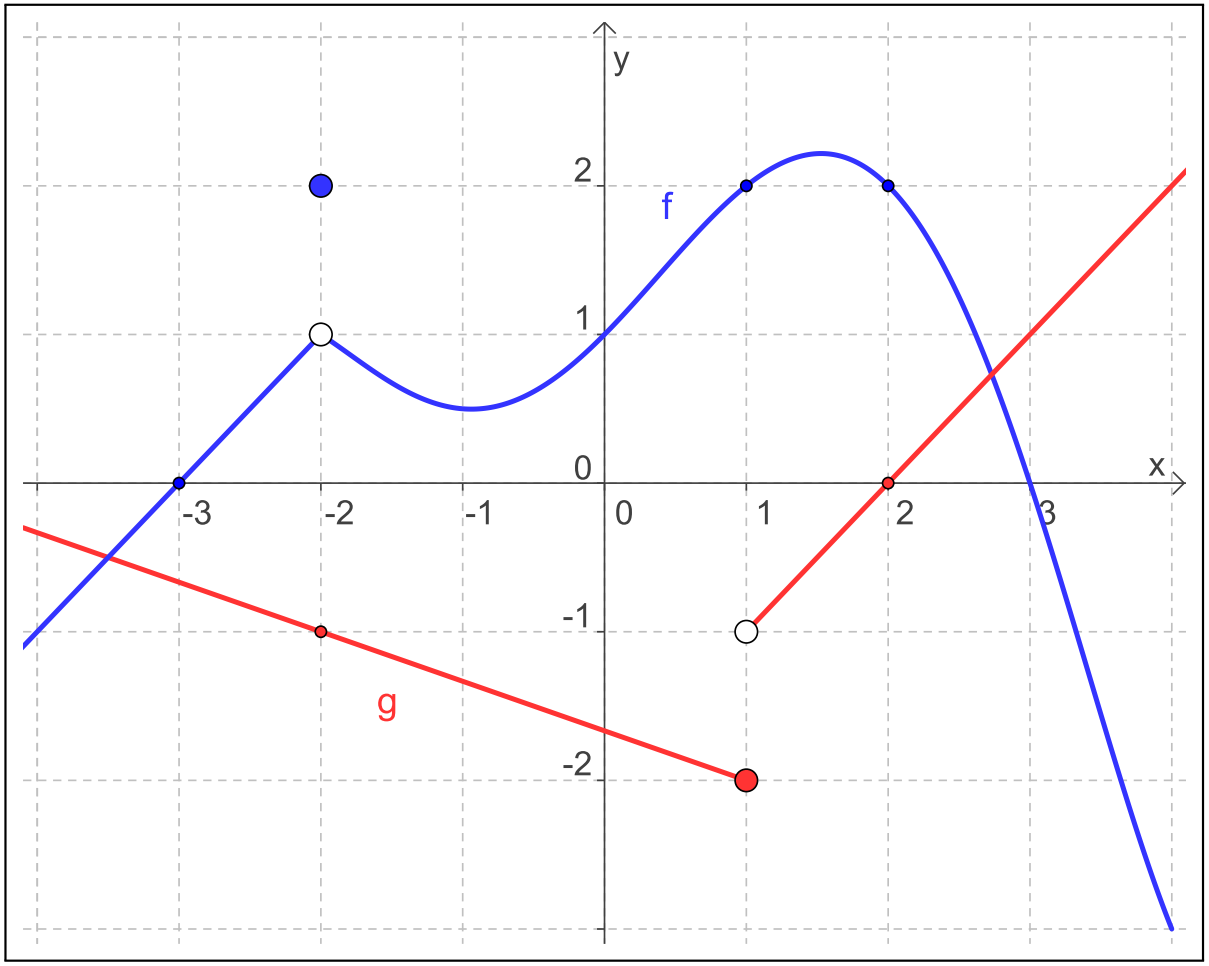
$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5\,g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) = 1+5\,(-1) = -4.$$

Exemplo



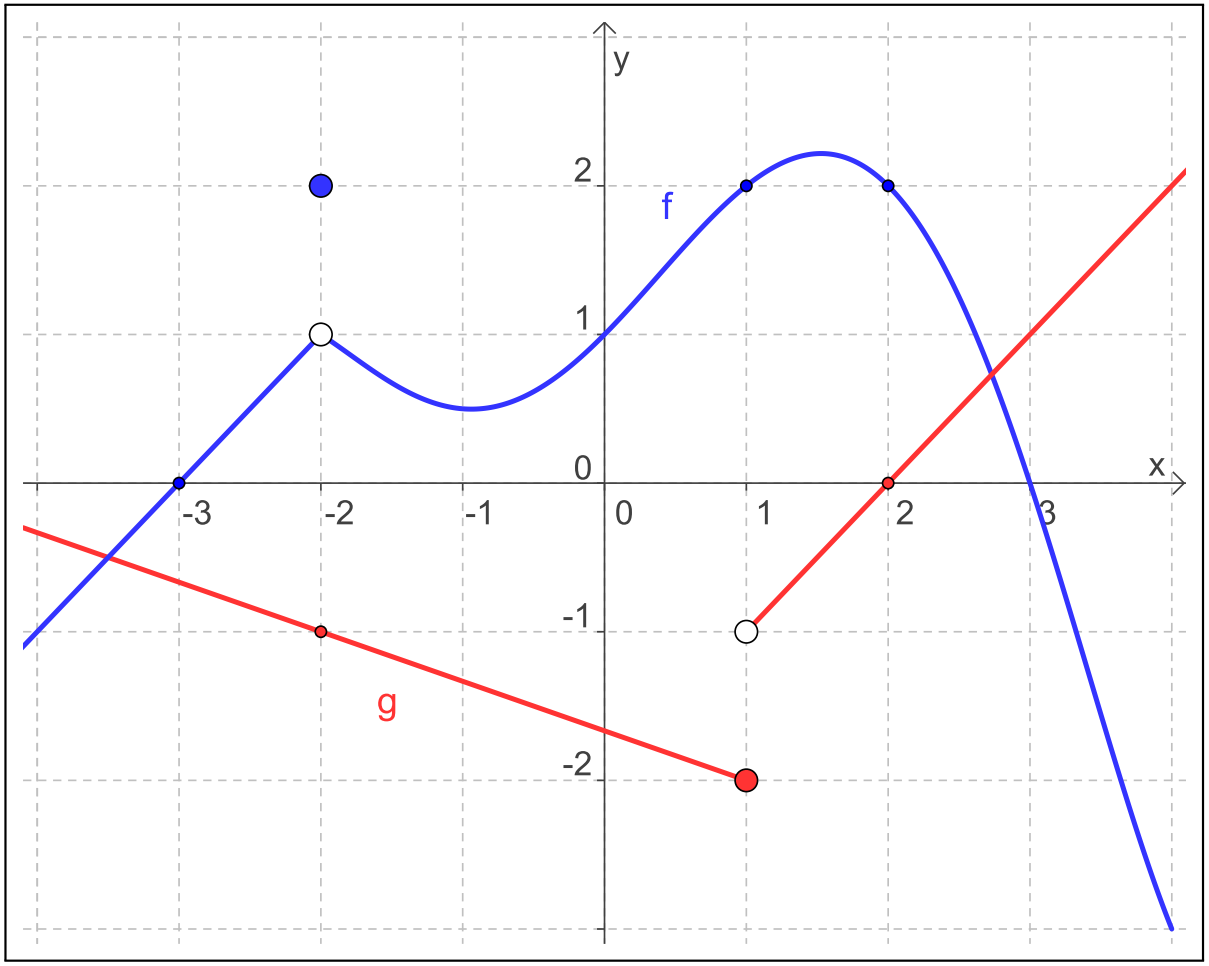
$$\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$$

Exemplo



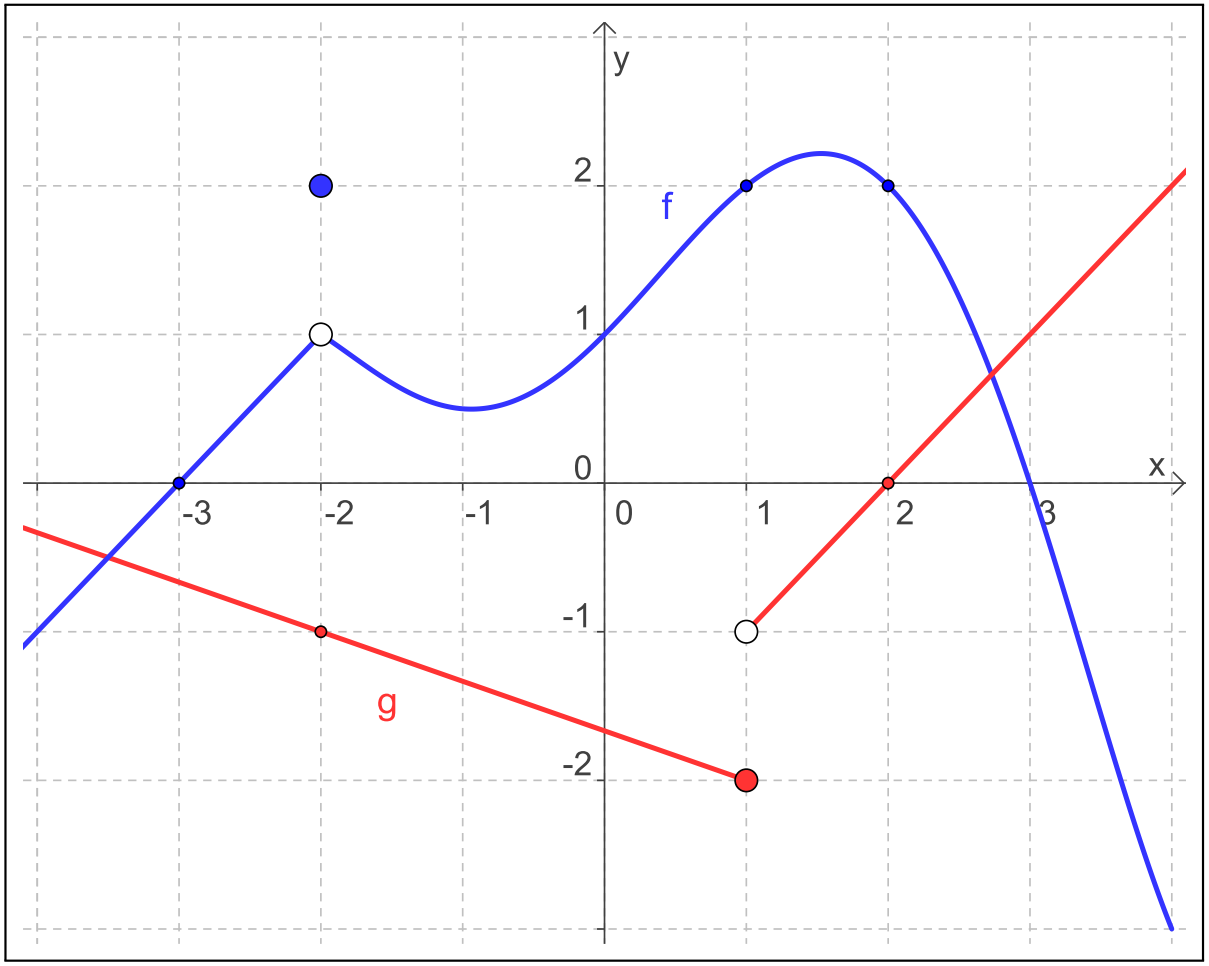
$\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ não existe!

Exemplo



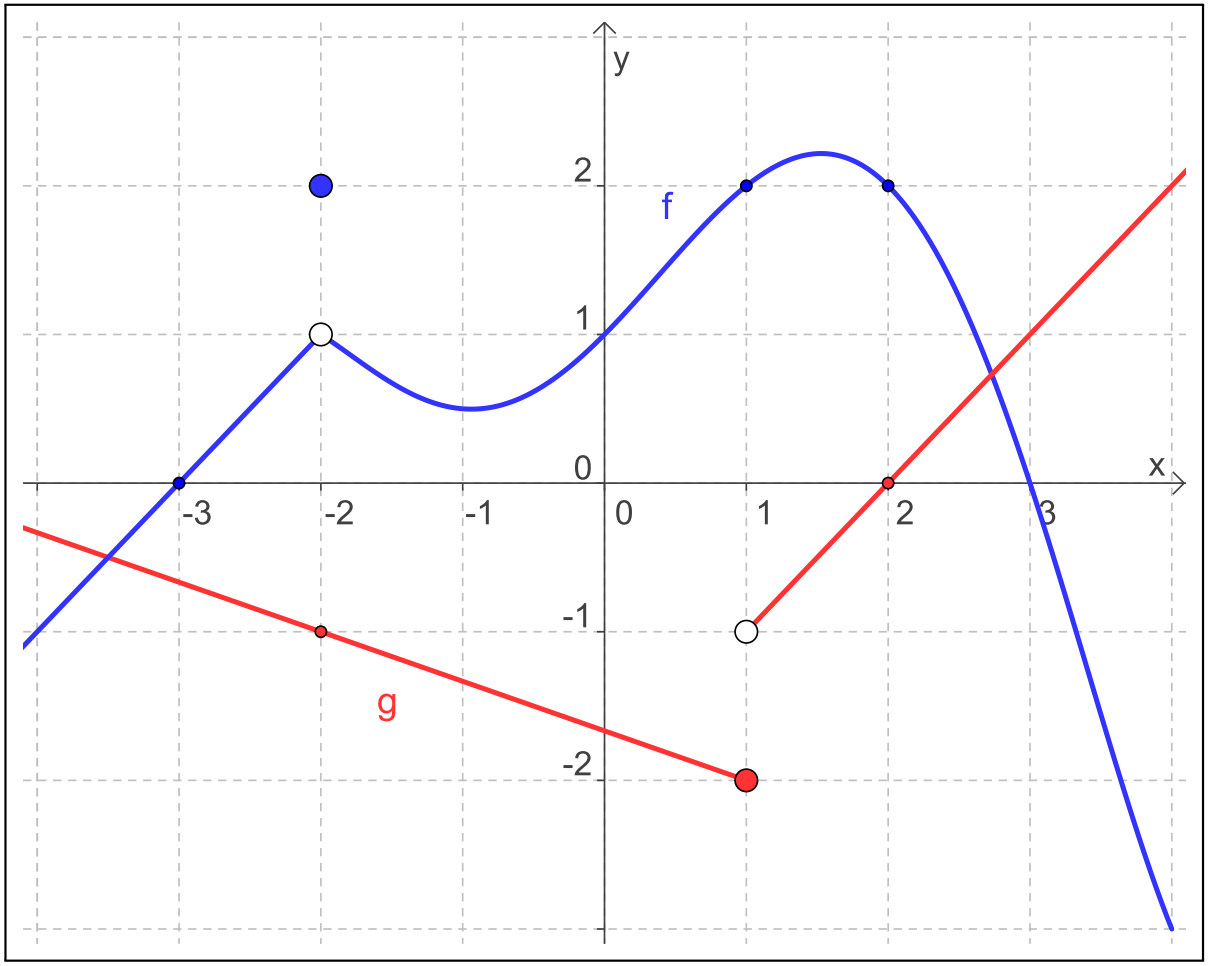
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

Exemplo



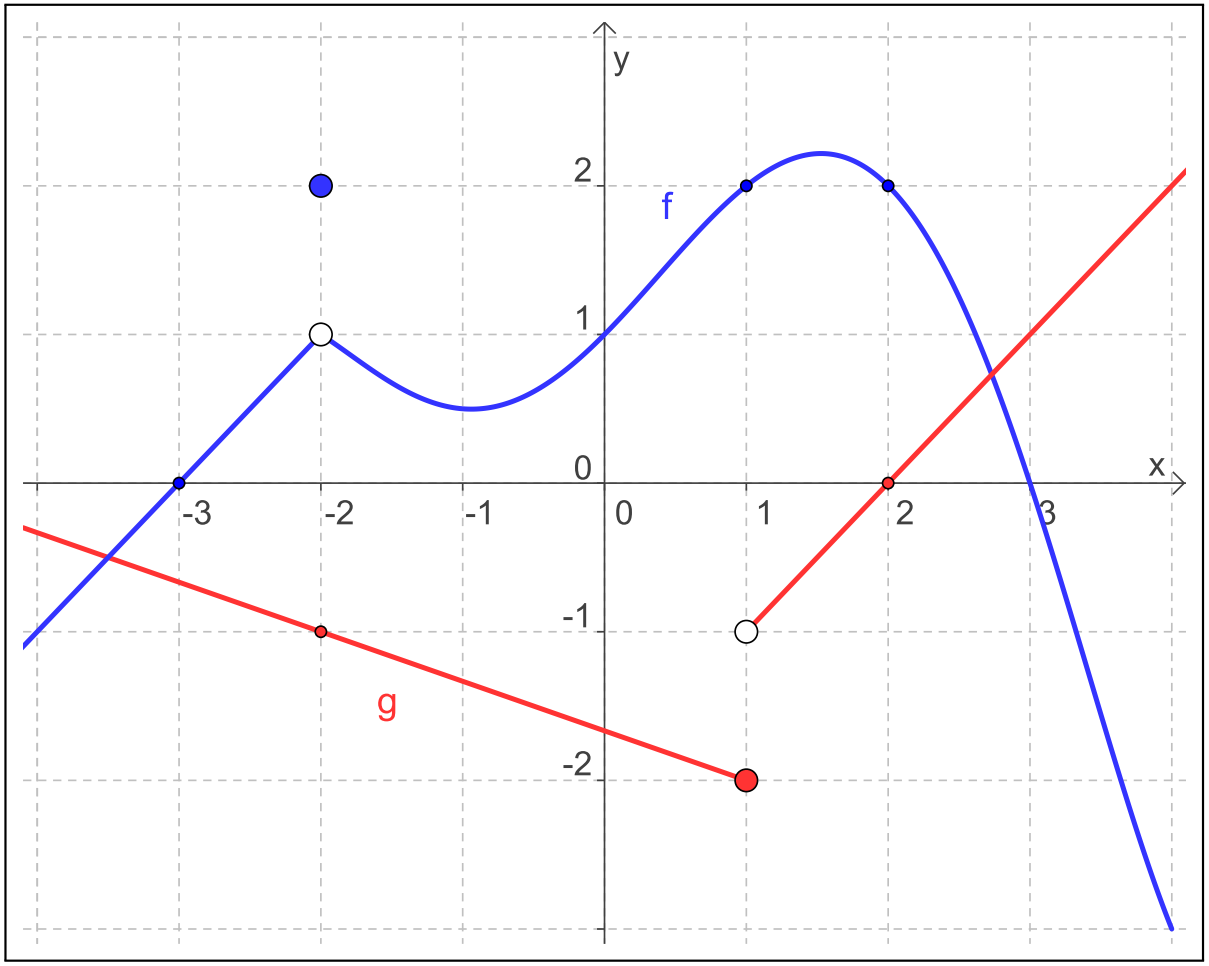
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2)$

Exemplo



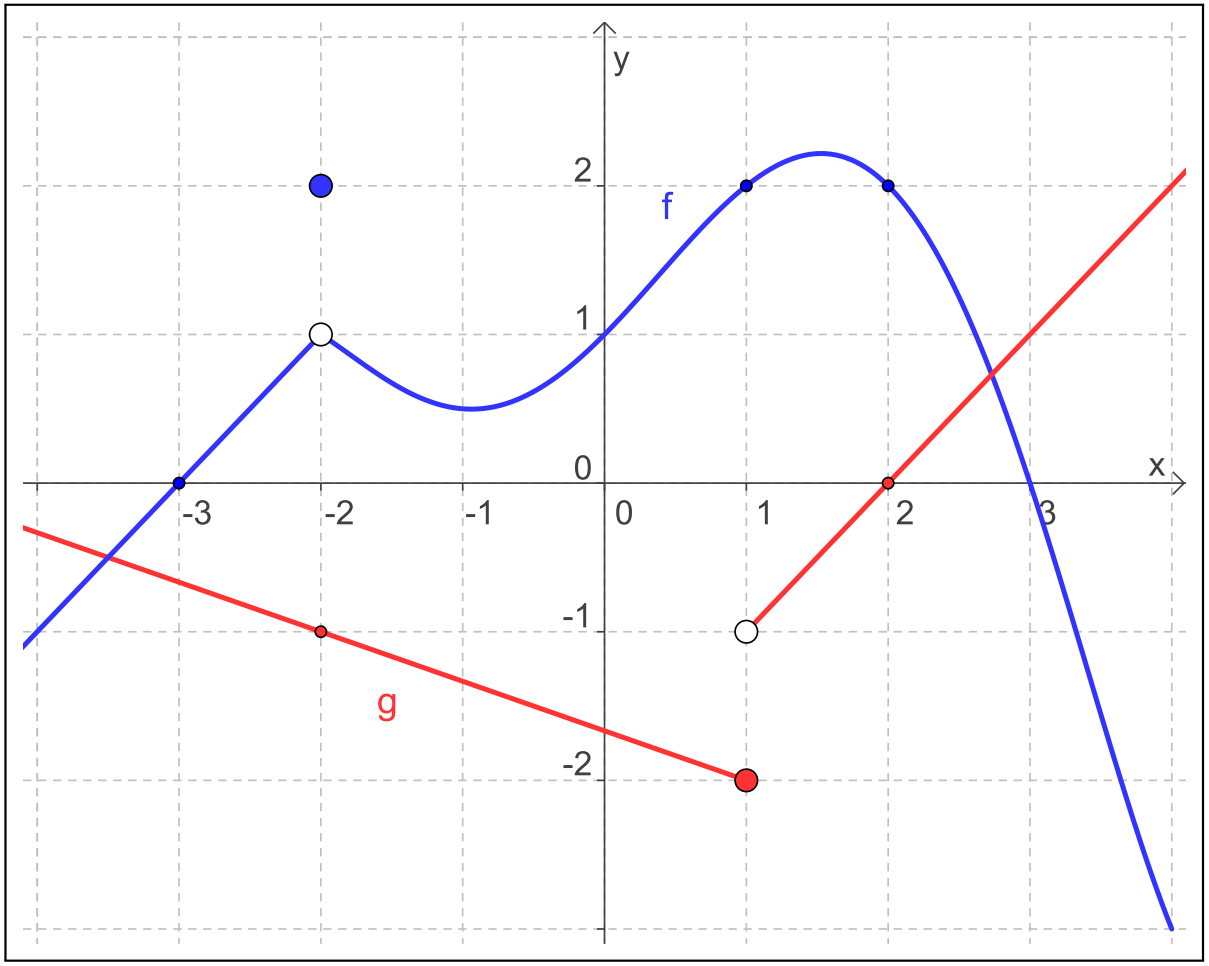
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4$

Exemplo



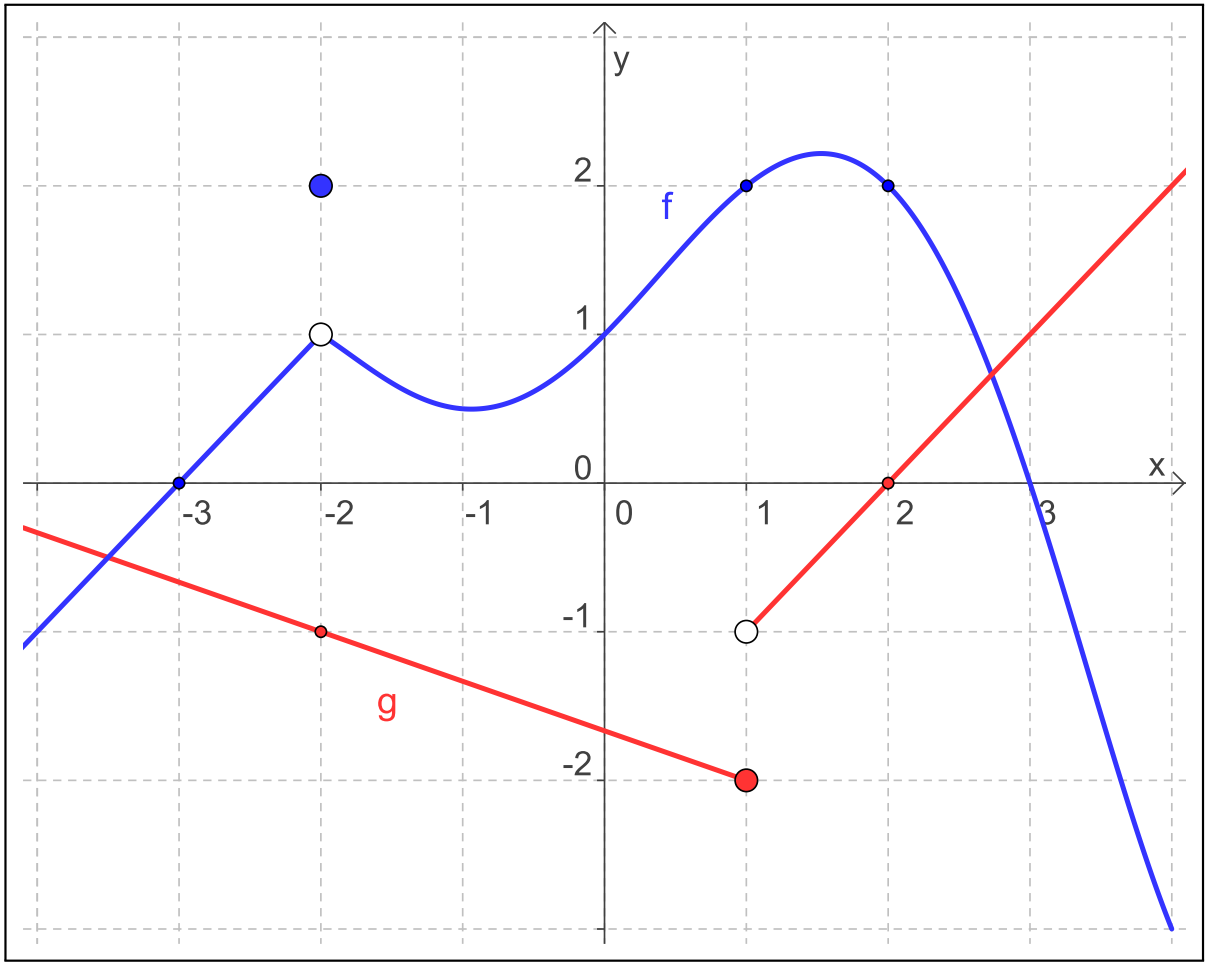
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4$ $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$

Exemplo



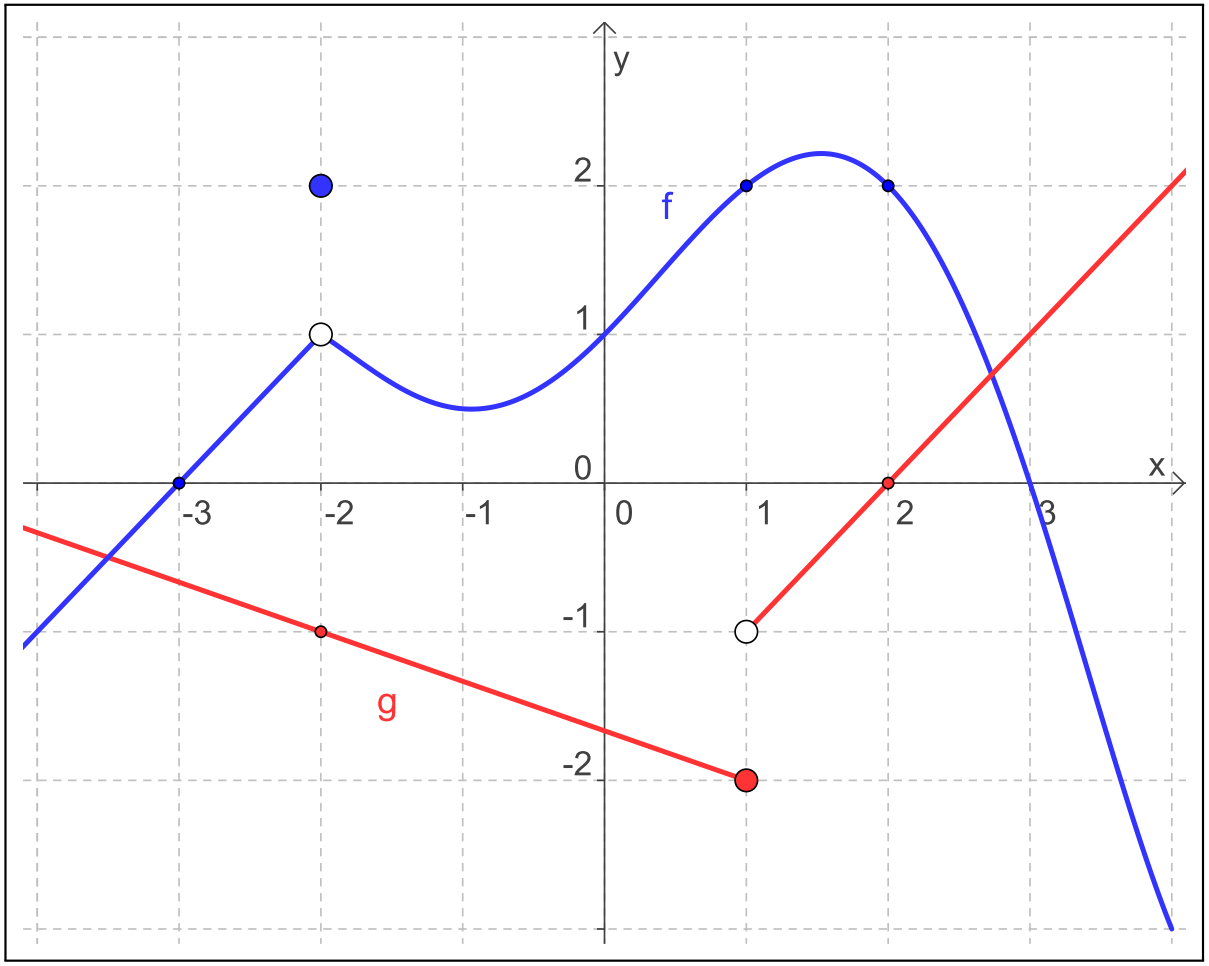
pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4$ $\qquad (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$

Exemplo



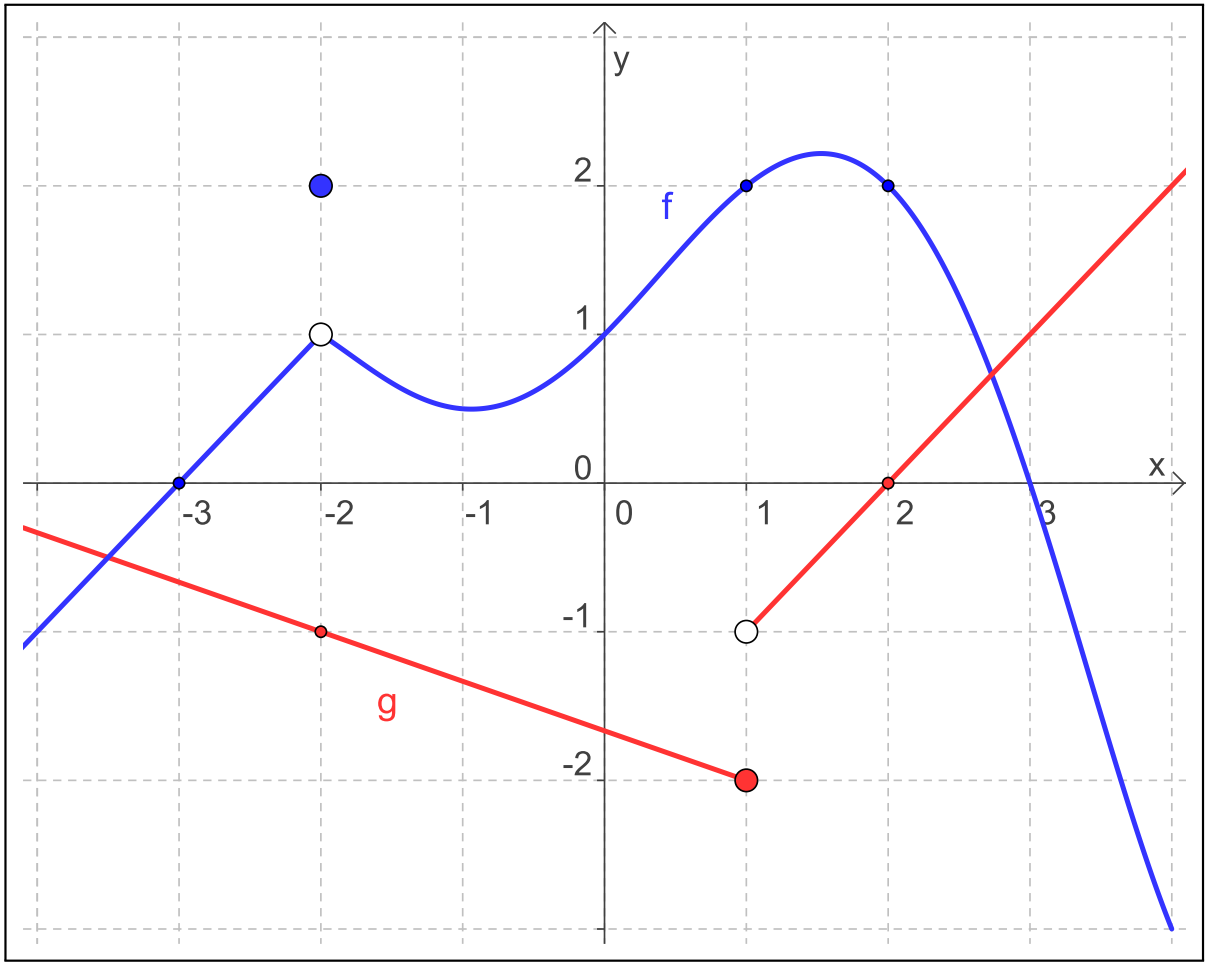
pois $\lim_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \qquad -2 = (2)(-1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$

Exemplo



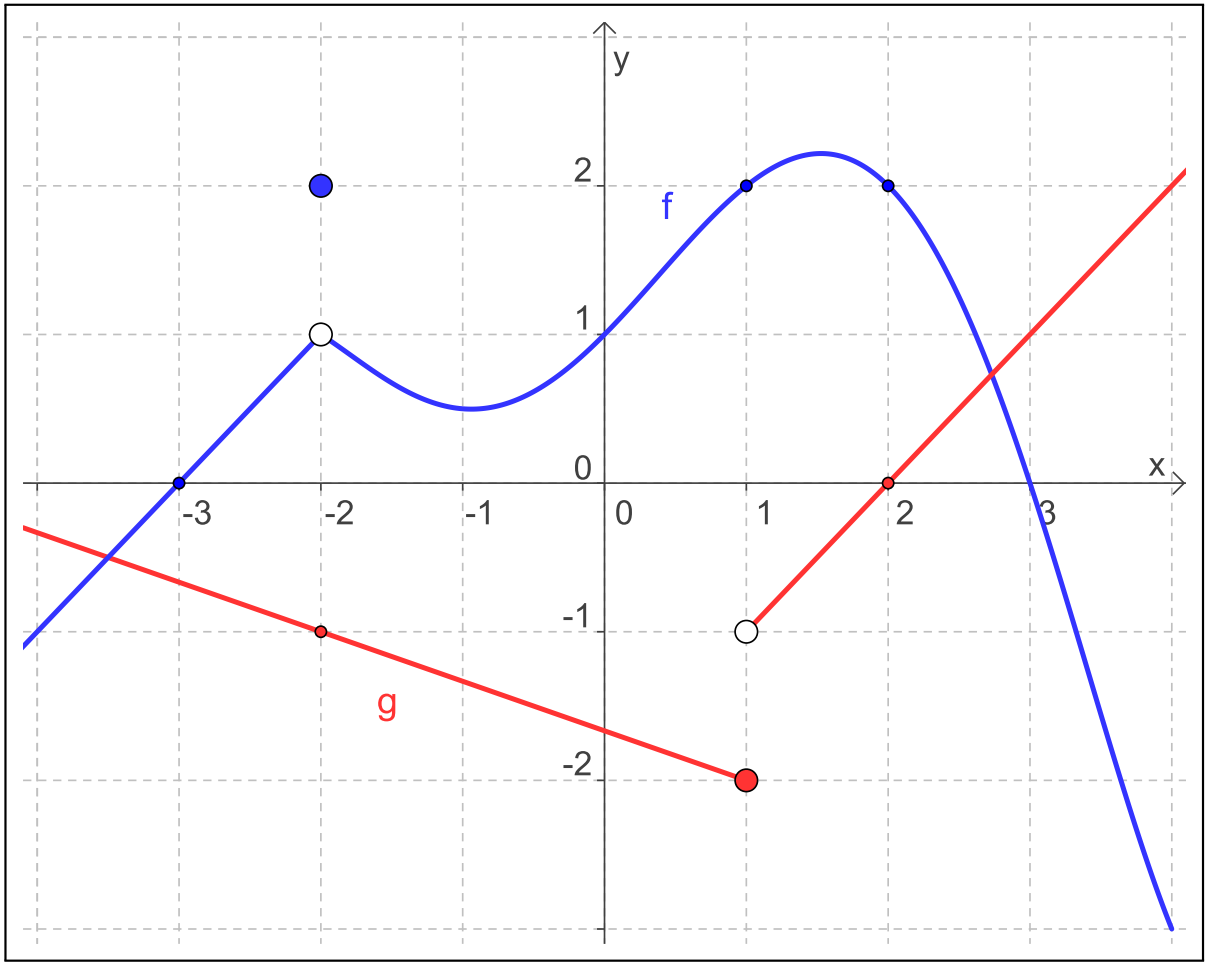
pois $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = (2)(-2) = -4 \neq -2 = (2)(-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$.

Exemplo



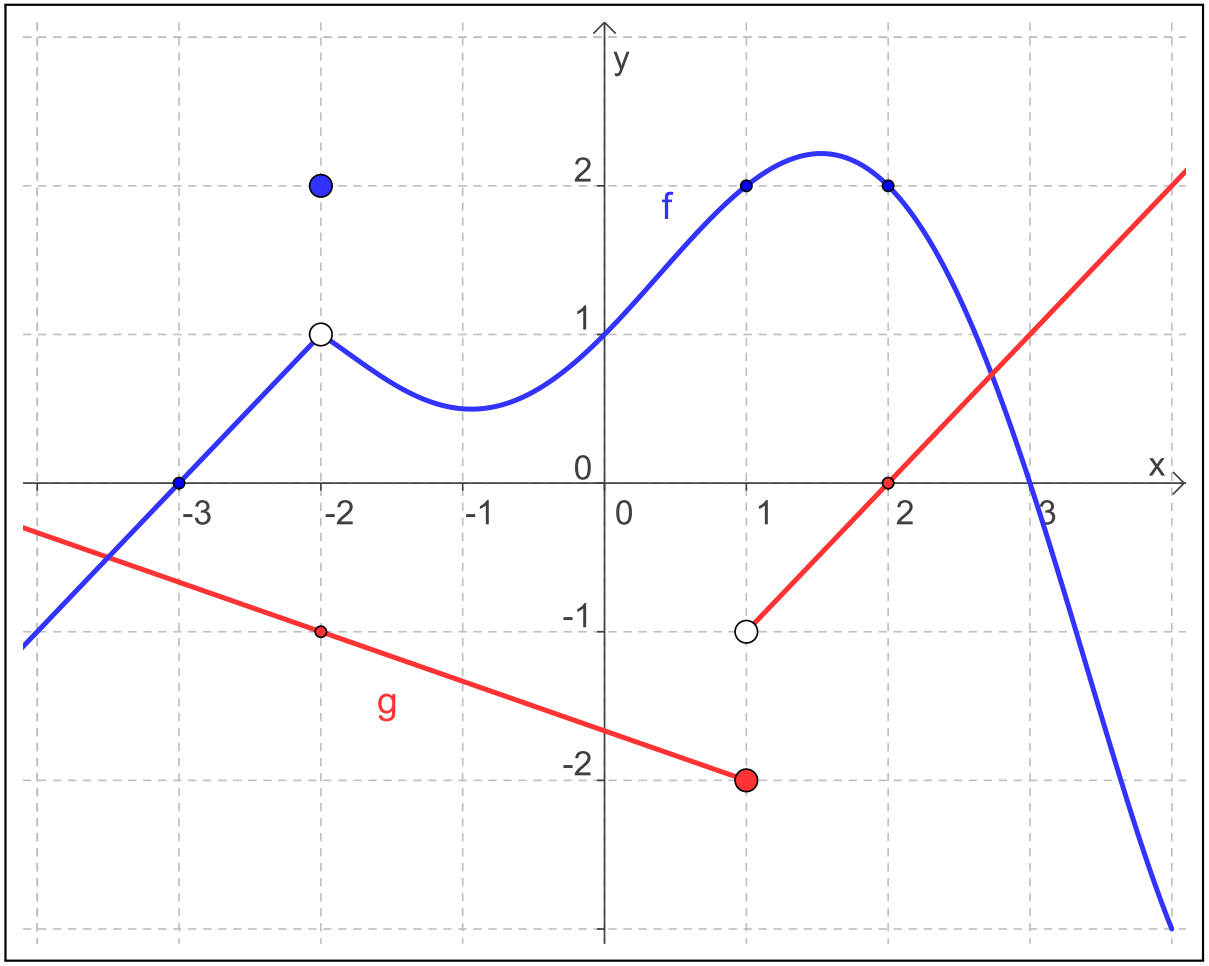
$$\lim_{x \to 2} (g(x)/f(x)) =$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) =$$

Exemplo



$$\lim_{x\to 2}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to 2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

O teorema do confronto

O teorema do confronto

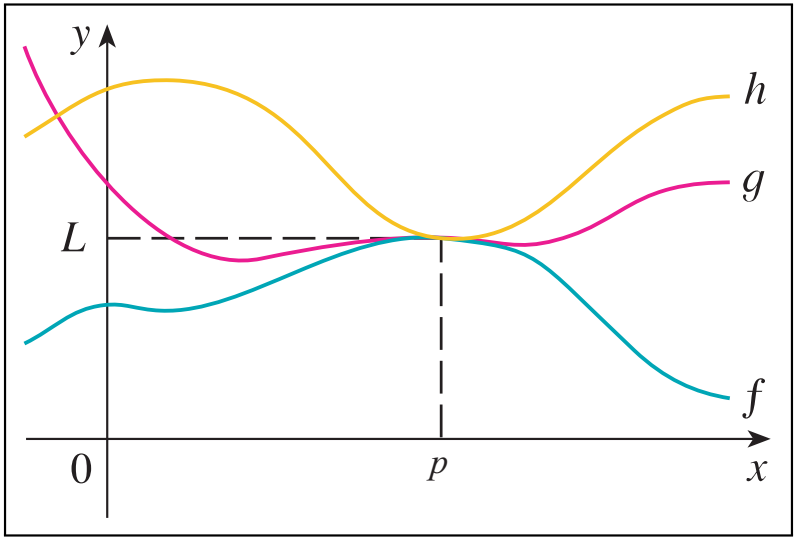
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



O teorema do confronto

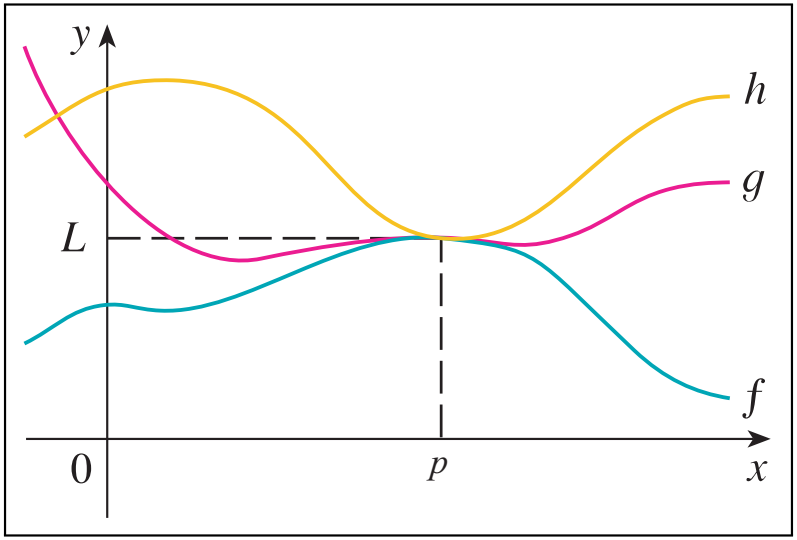
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq +x^2$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^2)$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

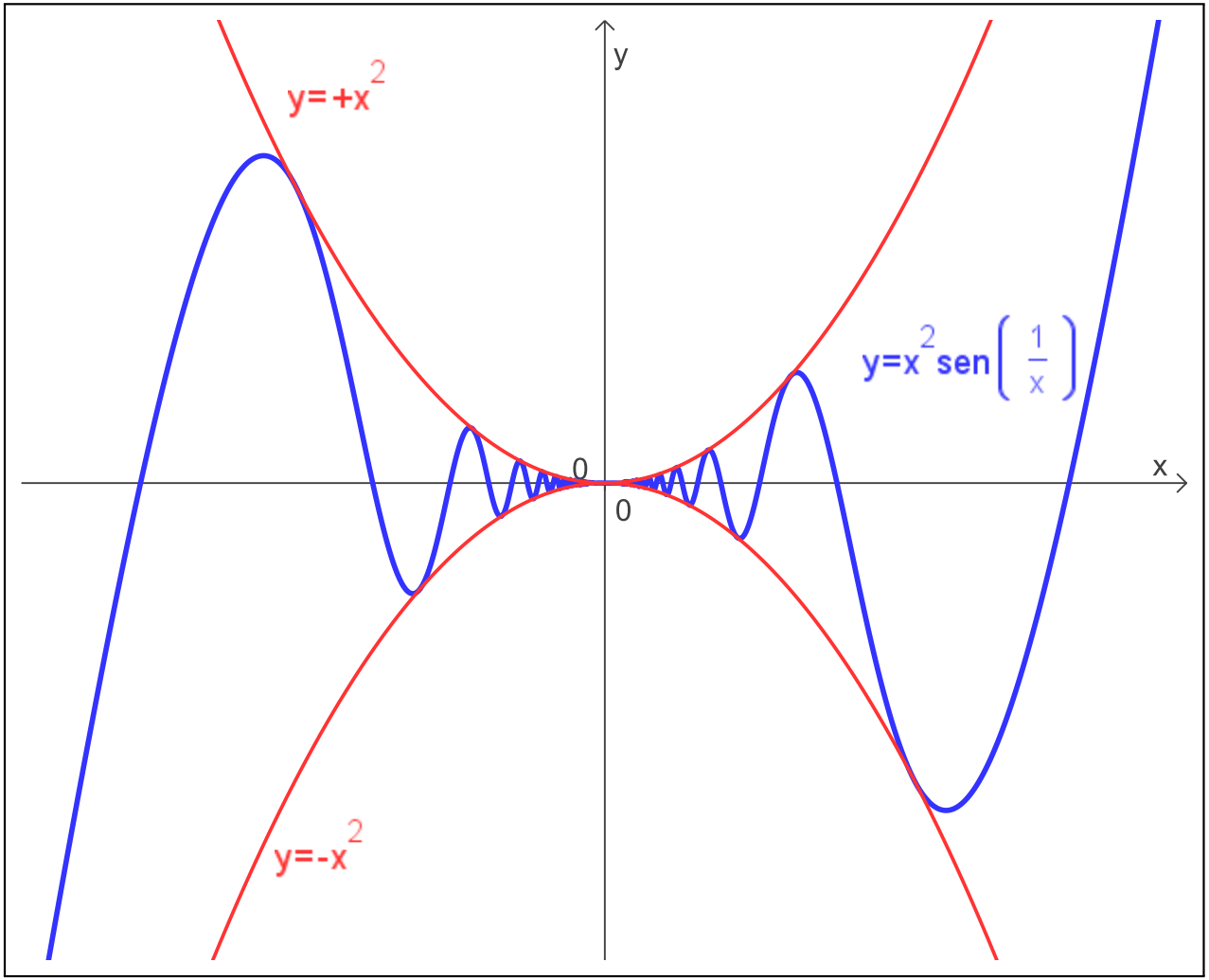
Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Exemplo



Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

Verdadeiro ou falso?

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} h(x) = M,$$

então

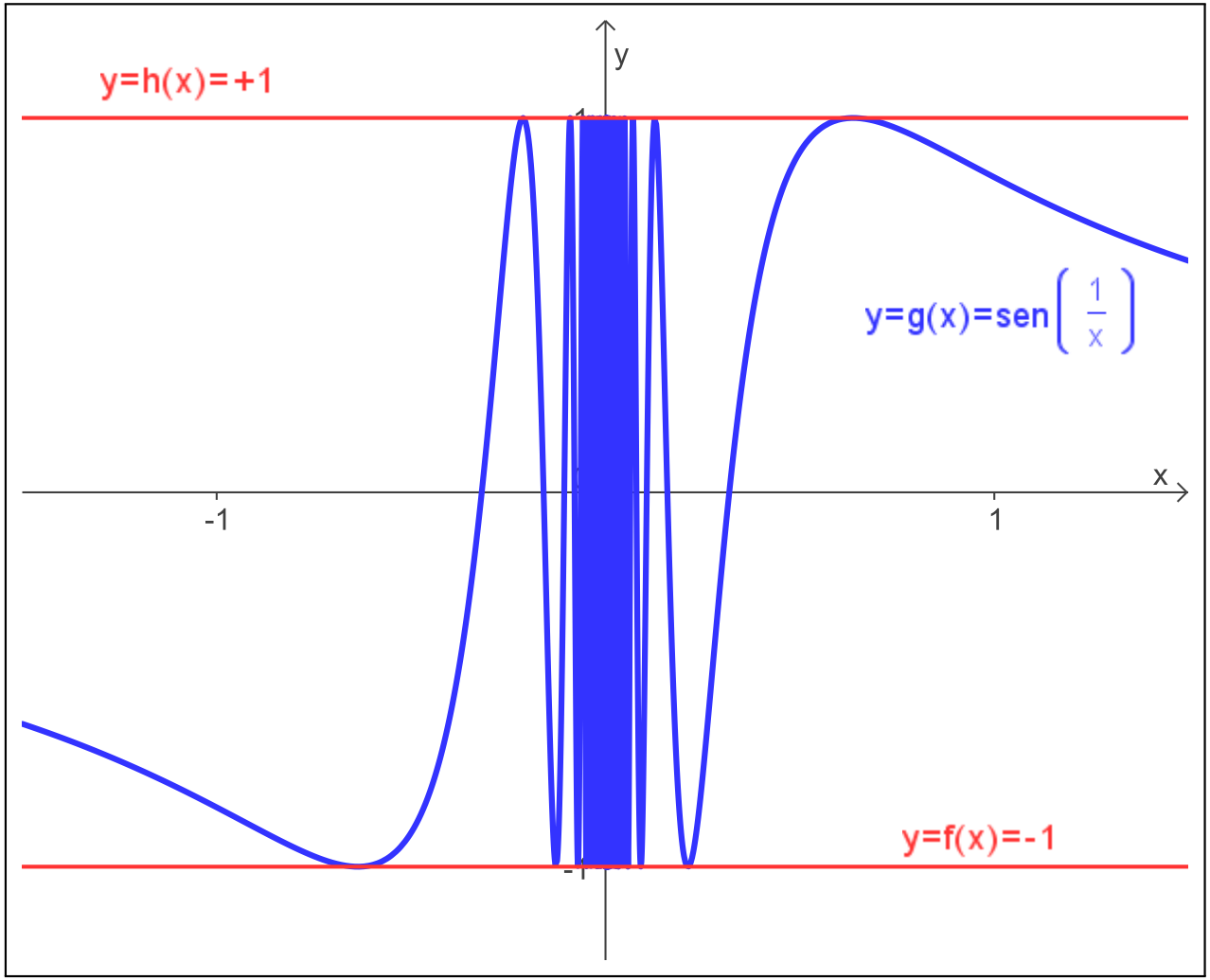
$$\lim_{x \to p} g(x) \text{ existe.}$$

Falso!

$$\forall x \neq 0, \underbrace{-1}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+1}_{h(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = L = -1, \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = M = +1,$$

$$\text{mas} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ não existe!}$$

Verdadeiro ou falso?



O teorema do anulamento

Funções limitadas

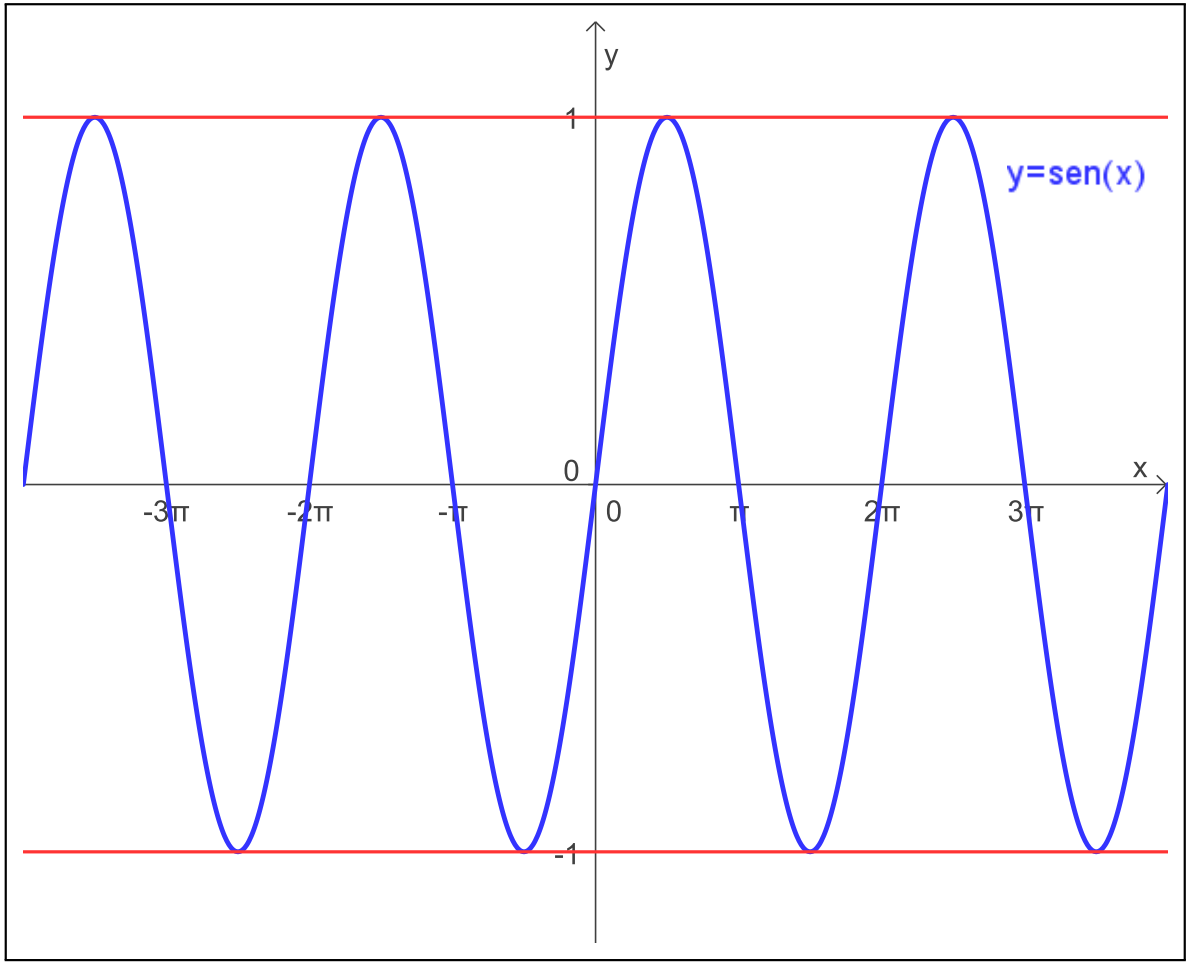
Definição

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é limitada em um conjunto D se existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo $x \in D$,

$$-M \leq f(x) \leq +M.$$

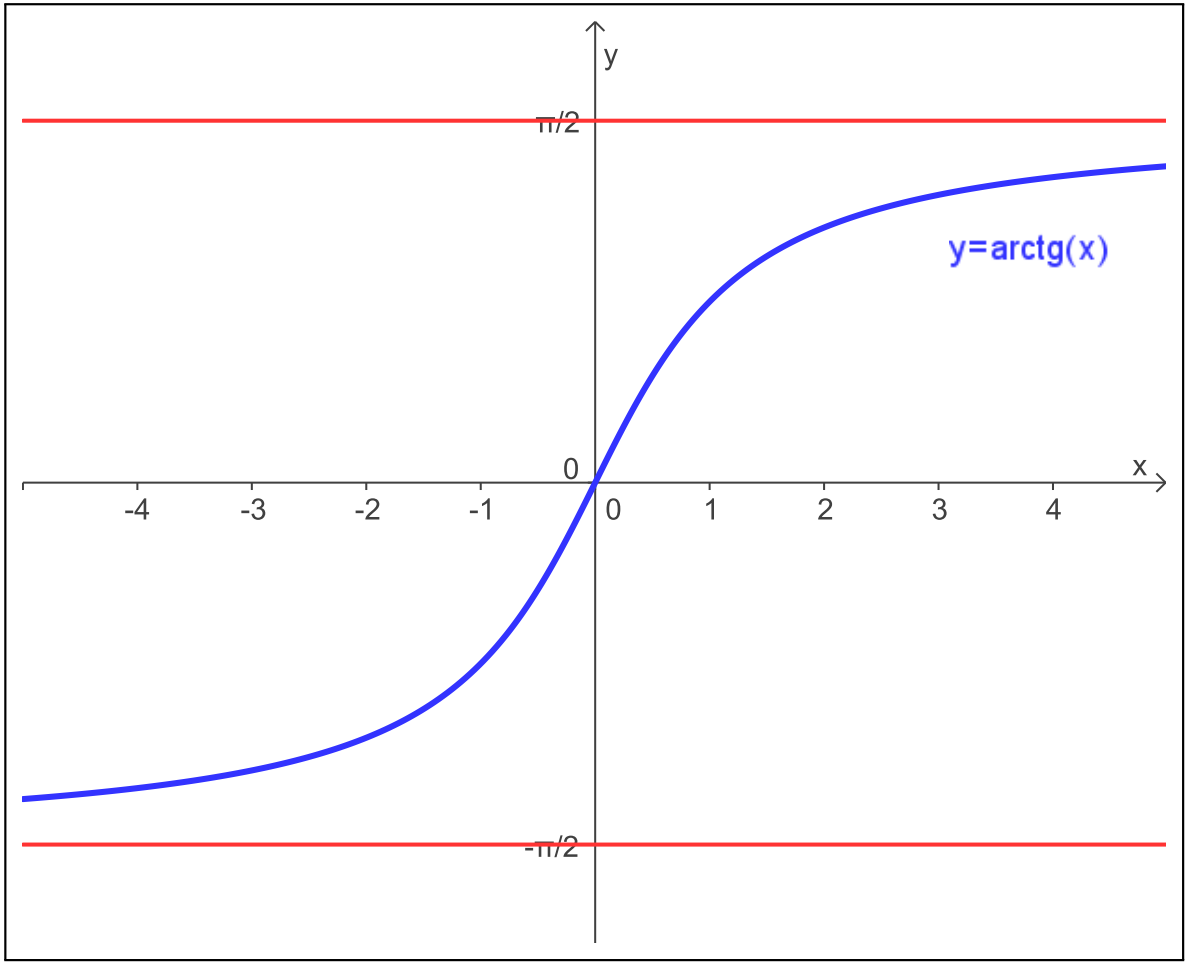
Exemplo

$y = \text{sen}(x)$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



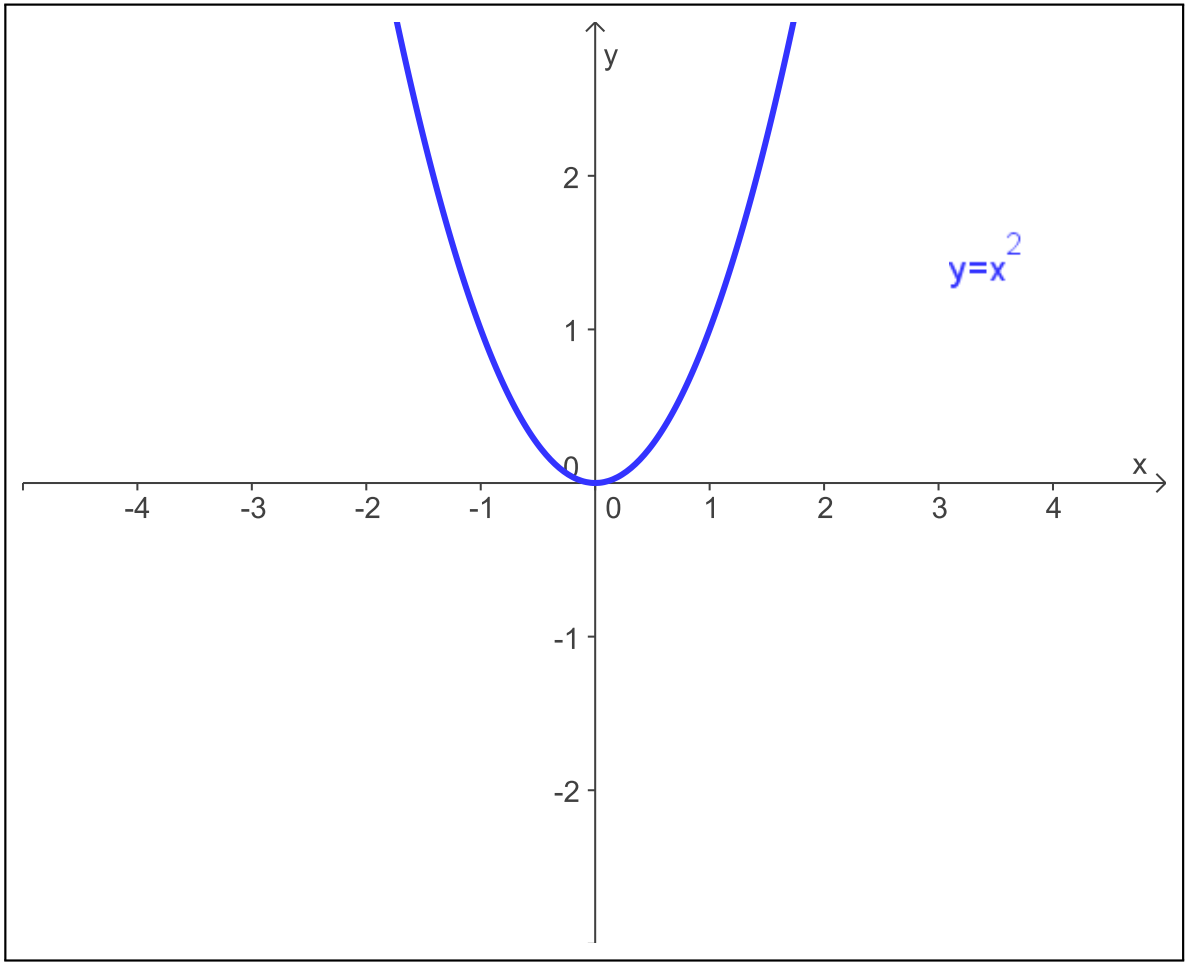
Exemplo

$y = \text{arctg}(x)$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



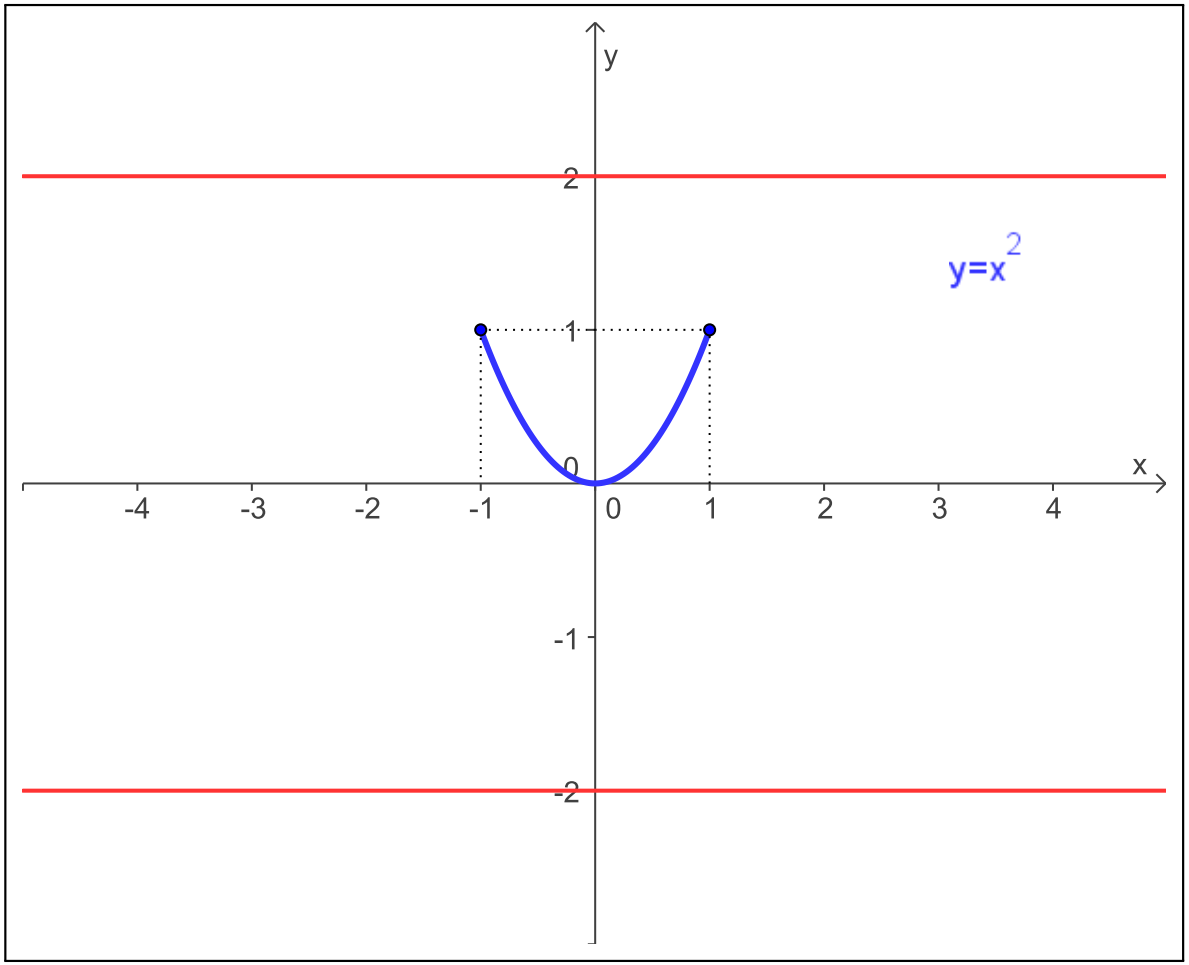
Exemplo

$y = x^2$ não é limitada em $D = \mathbb{R}$.



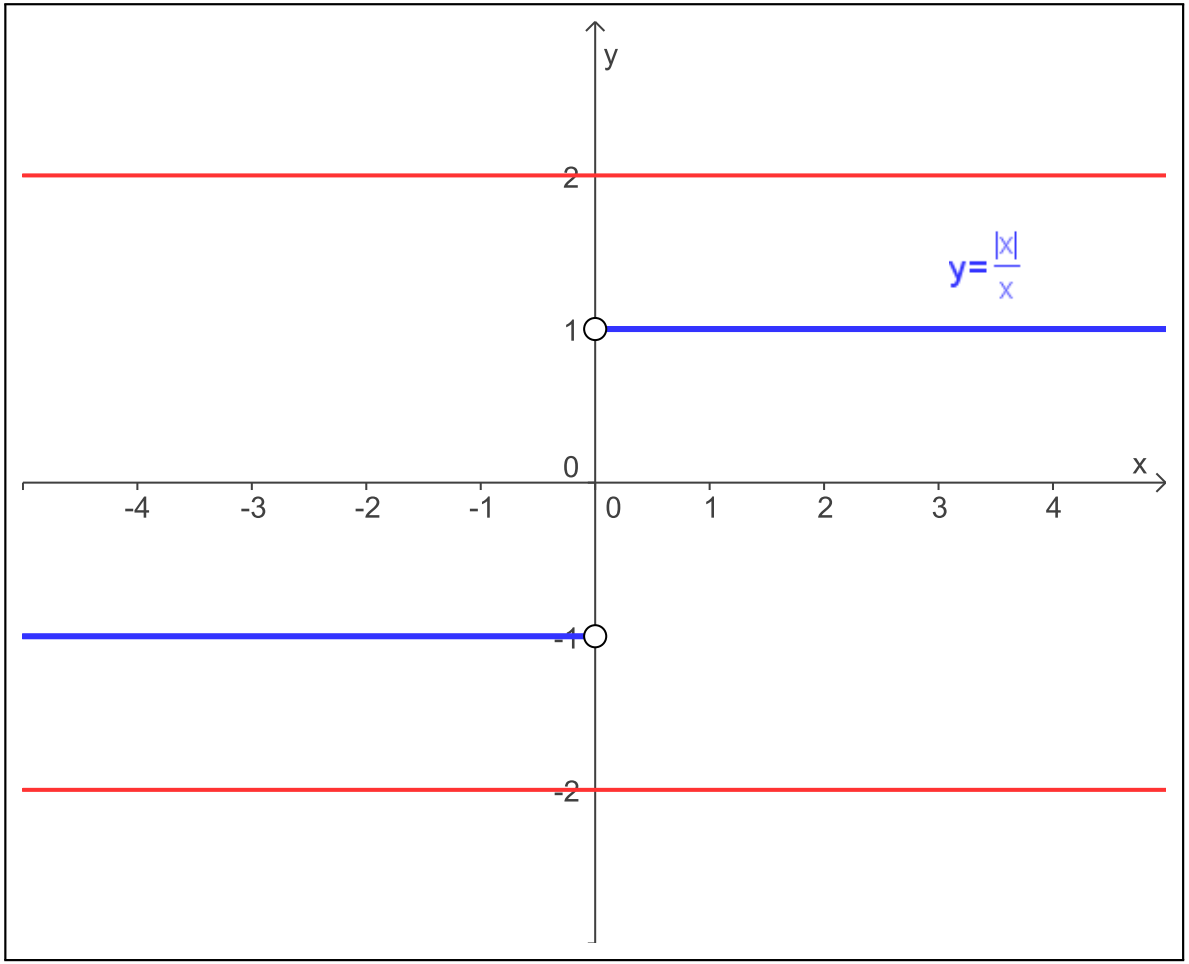
Exemplo

Mas $y = x^2$ é limitada em $D = [-1, +1]$.



Exemplo

$y = |x|/x$ é limitada em $D = \mathbb{R}$.



O teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$

Solução.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)x^2\right] = \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \quad$ e $\quad g(x) = x. \qquad$ Note que $\lim\limits_{x \to} g(x) = 0,$

mas $\qquad \lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot x = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \neq 0.$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função qualquer e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ existe.}$$

Falso!

Tome $\quad f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} \quad$ e $\quad g(x) = x. \qquad$ Note que $\lim\limits_{x \to} g(x) = 0,$

mas $\qquad \lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2} \cdot x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Verdadeiro ou falso?

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x)$ existe, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) \text{ também existe.}$$

Falso!

Tome $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $g(x) = 1$. Note que f é limitada e $\lim\limits_{x \to} g(x) = 1$,

mas $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} \cdot 1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x \to p} |f(x)| = 0$ e, consequentemente, $\lim_{x \to p}(-|f(x)|) = 0$.

Demonstração do teorema do anulamento

Lema

Se $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to p} f(x) = 0$.

Demonstração. Já sabemos que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para todo x no domínio de f. Por hipótese, $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$ e, consequentemente, $\lim_{x\to p}(-|f(x)|) = 0$. Usando o teorema do confronto com $g(x) = -|f(x)|$ e $h(x) = +|f(x)|$, concluímos que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração.

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p.

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x \to p} |f(x) \cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$).

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

Demonstração do teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to p}(f(x)\cdot g(x)) = 0.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$\lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$

Como, por hipótese, f é uma função limitada, existe constante $M > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq M$ para todo x perto de p. Multiplicando estas desigualdades por |g(x)|, obtemos que

$$0 = 0\cdot|g(x)| \leq |f(x)|\cdot|g(x)| \leq M\cdot|g(x)|.$$

Como $\lim_{x\to p} 0 = 0$ e $\lim_{x\to p}(M\cdot|g(x)|) = 0$ (pois, por hipótese, $\lim_{x\to p} g(x) = 0$). Usando o teorema do confronto, concluímos então que

$$\lim_{x\to p}(|f(x)|\cdot|g(x)|) = \lim_{x\to p}|f(x)\cdot g(x)| = 0.$$