Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 7

Versão 0.9

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes

Calcule os limites

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} =$

$ax^2+bx+c=0 \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to r_1, r_2 \qquad ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$

$2x^2+5x-3 \qquad r_1 = \frac{1}{2} \qquad r_2 = -3 \qquad 2(x-\frac{1}{2})(x+3) = ax^2+bx+c$

$2x^2-5x+2 \qquad r_1 = 2 \qquad r_2 = \frac{1}{2} \qquad 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) =$

$\dfrac{2(x-0,5)(x+3)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} \qquad \dfrac{(x+3)}{(x-2)} \cdot \qquad \dfrac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-2} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{-3} = \dfrac{-7}{3}$

Problemas de organização e erros frequentes

Calcule os limites

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2} =$

$ax^2+bx+c=0 \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \to r_1, r_2 \qquad ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$

$2x^2+5x-3=0, \quad r_1=\frac{1}{2} \quad r_2=-3 \qquad 2(x-\frac{1}{2})(x+3) = ax^2+bx+c$

$2x^2-5x+2=0, \quad r_1=2 \quad r_2=\frac{1}{2} \qquad 2(x-2)(x-\frac{1}{2}) =$

Organizar melhor!

$\lim_{x \to 1/2} \dfrac{2(x-0,5)(x+3)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \to 1/2} \dfrac{(x+3)}{(x-2)} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-2} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{-3} = \dfrac{-7}{3}$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$$= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{2})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{x\sqrt{x+6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} \quad // \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x+6} + \sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} \quad // \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\underbrace{\sqrt{x+2} + \sqrt{6}}_{2})} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\underbrace{\sqrt{x+6} + \sqrt{2}}_{6})} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} \quad // \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})$ $\quad$ $(\sqrt{x+6}) + \sqrt{2}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6}}{x} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2}}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{6})^2}{x(\sqrt{x+6} + \sqrt{2})} \right]$$

2 $\quad$ 6

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{6})} + \frac{x}{x\sqrt{x+6} + \sqrt{2}} \right]$$

2 $\quad$ 6

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Notação?

Problemas de organização e erros frequentes

denominador

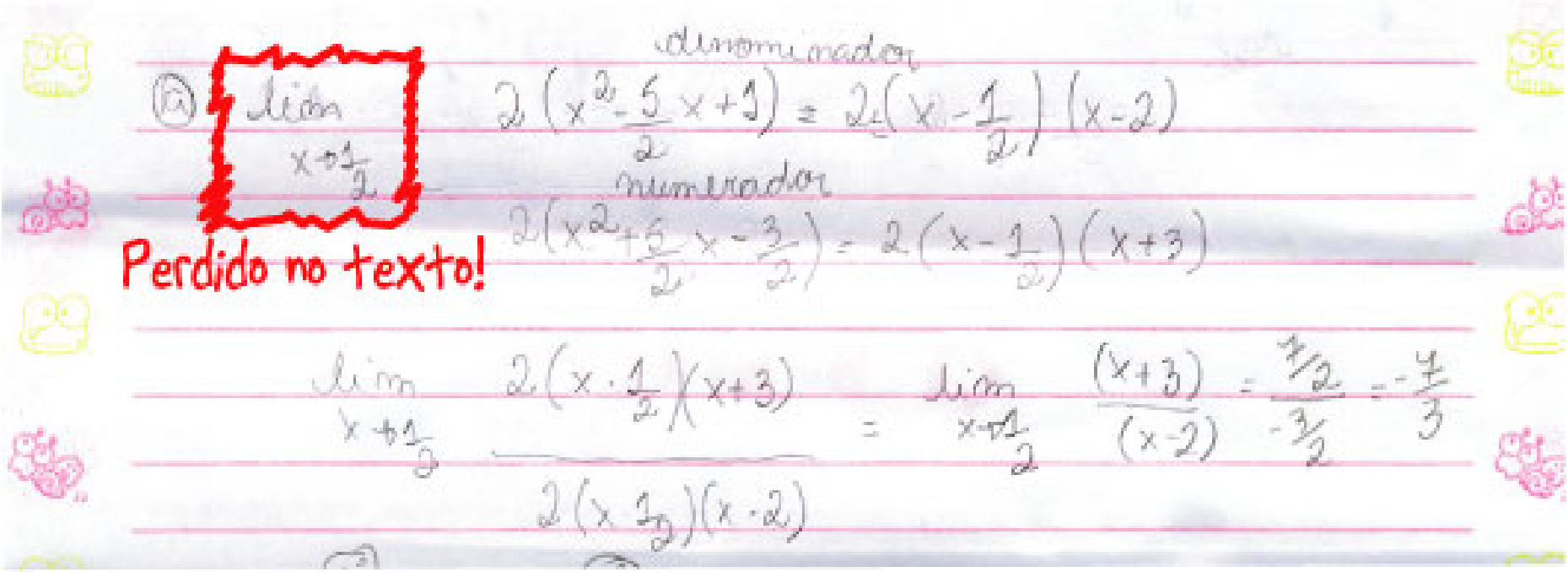
(a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \quad 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

numerador

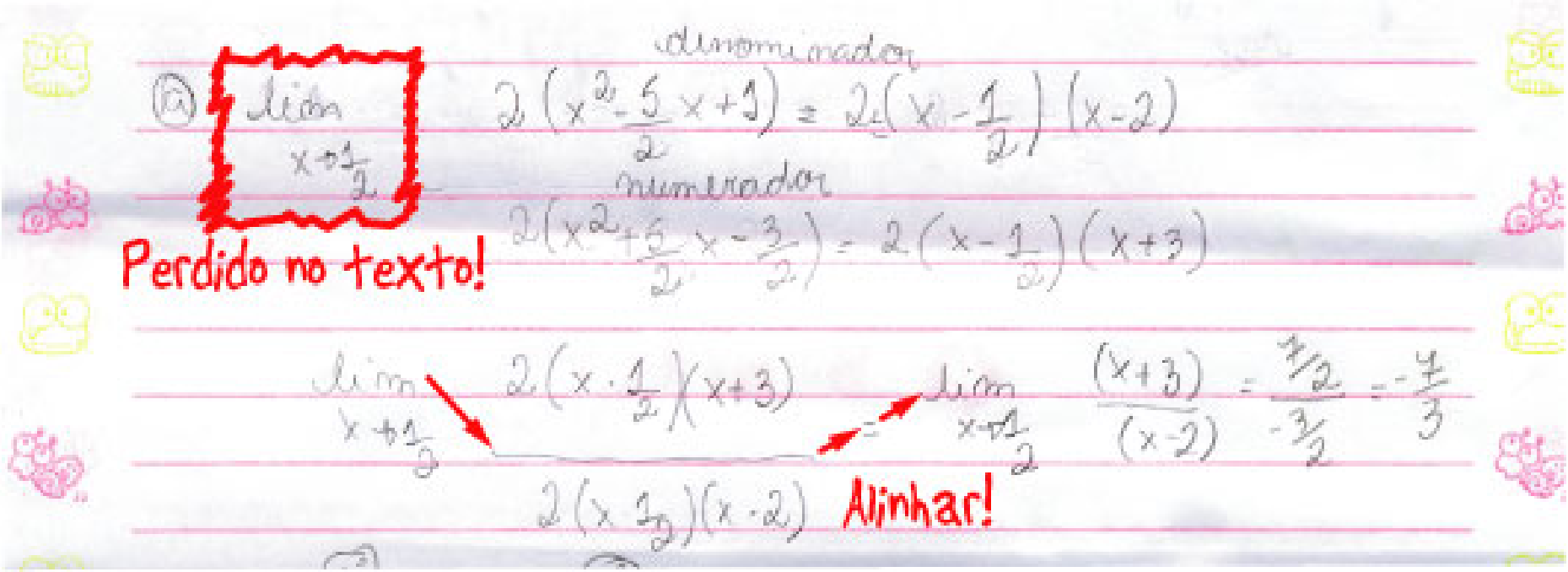
$2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{7/2}{-3/2} = -\frac{7}{3}$$

Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2(x+3)(x-1/2)}{2(x-2)(x-1/2)}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+3)}{(x-2)}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2}+3)}{(\frac{1}{2}-2)} = \frac{\frac{1+6}{2}}{\frac{1-4}{2}} = \frac{7}{-3}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} = -\frac{7}{3}$ //

$\Delta = (5)^2 - 4(2)(2)$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

$x = \frac{5 \pm 3}{4}$

$x' = \frac{8}{4} = 2$ //

$x'' = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$

$\Delta = 25 + 24$

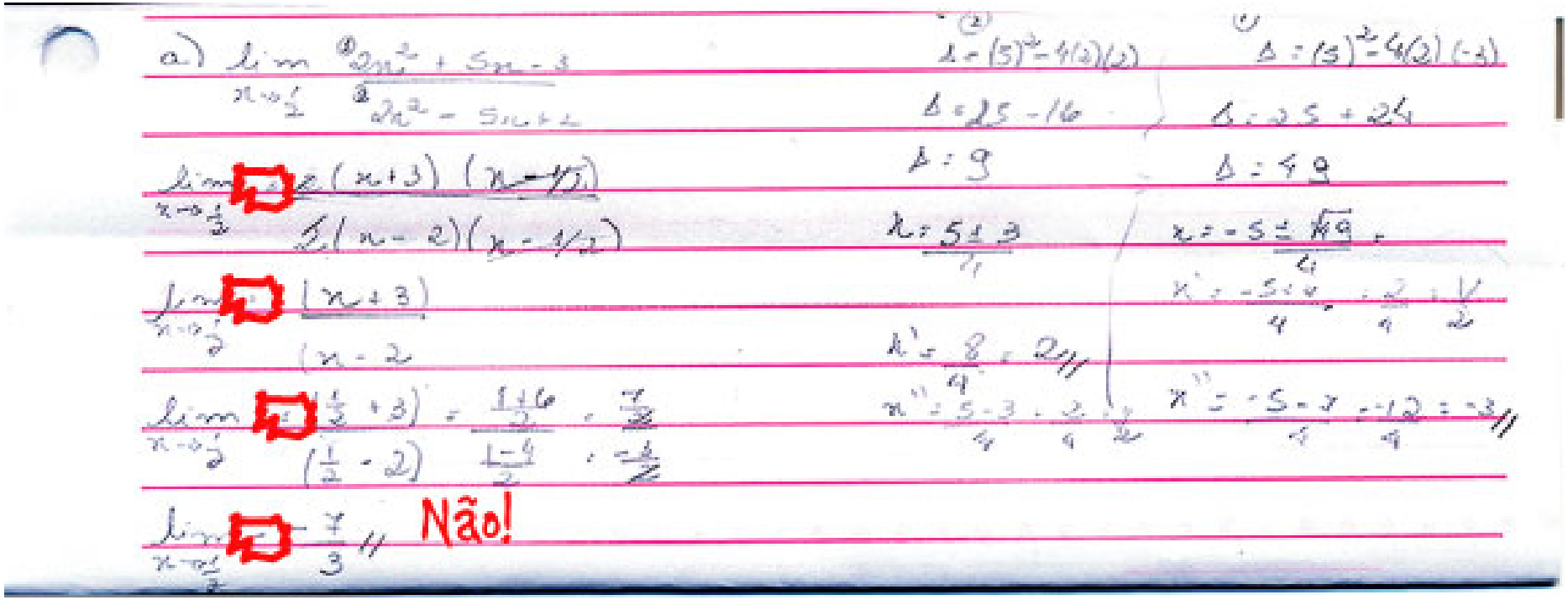
$\Delta = 49$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$

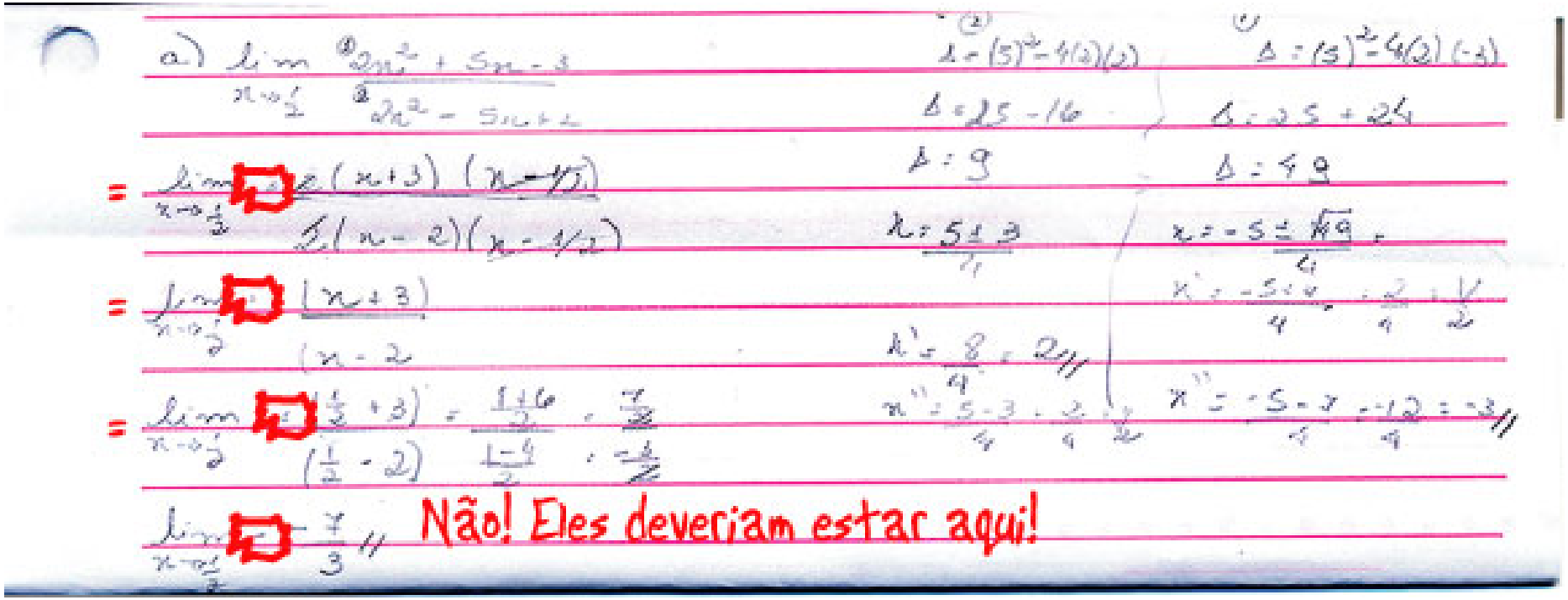
$x' = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x'' = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$ //

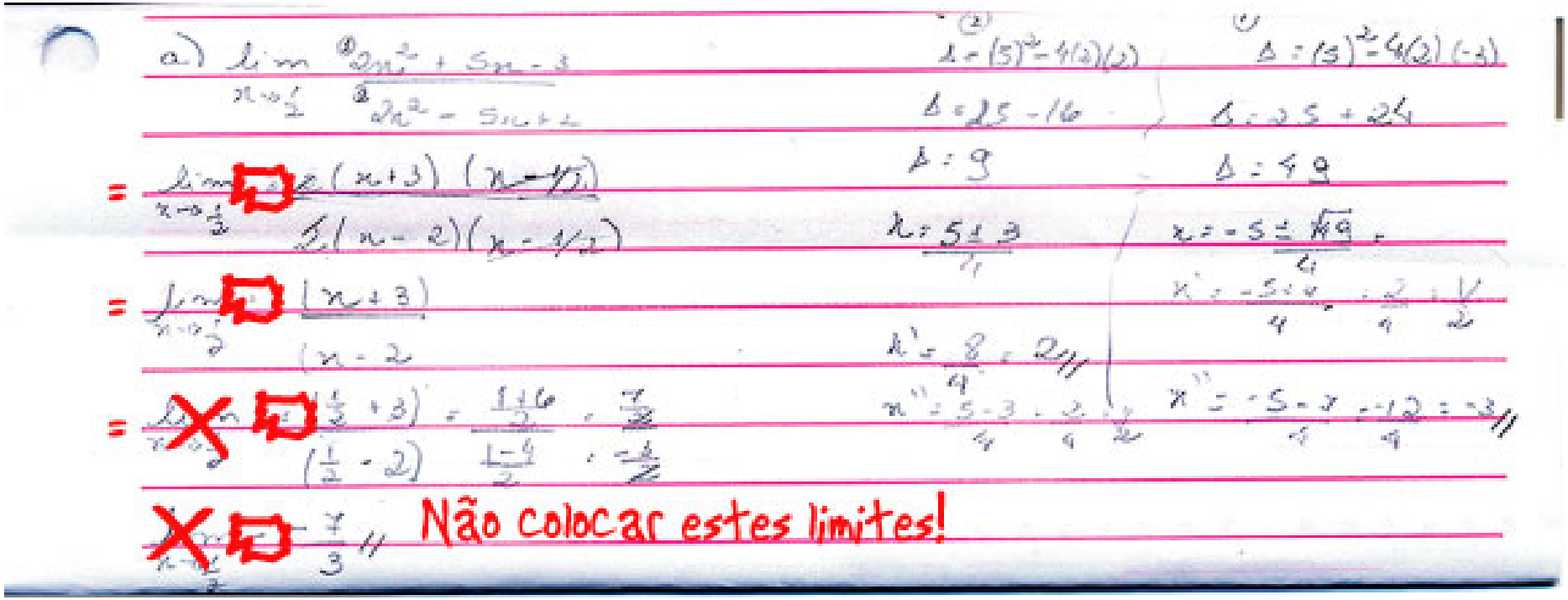
Problemas de organização e erros frequentes



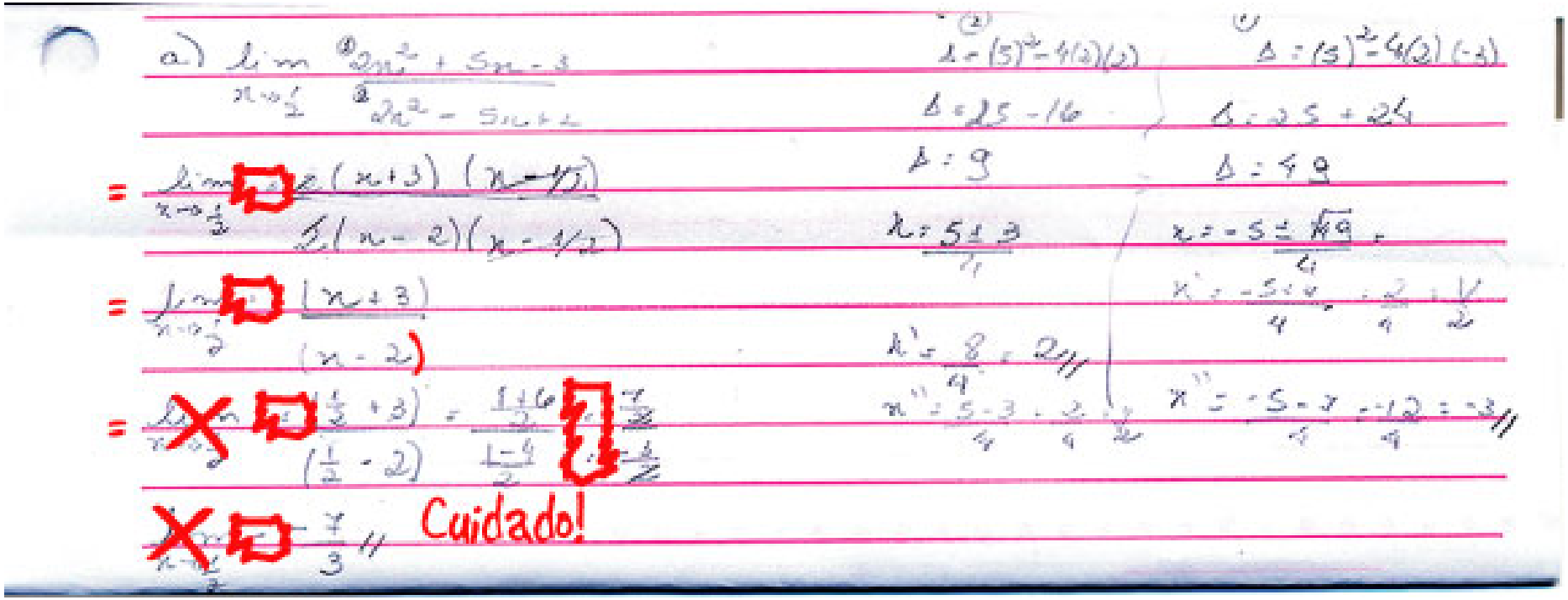
Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes



Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x} \right] \to$$

$$\to \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}} \right] \to$$

$$\to \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Problemas de organização e erros frequentes

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

É para usar = e não →!

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\right] \boxed{\to}$$

$$\boxed{\to} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] \boxed{\to}$$

$$\boxed{\to} \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Os teoremas do confronto e do anulamento

O teorema do confronto

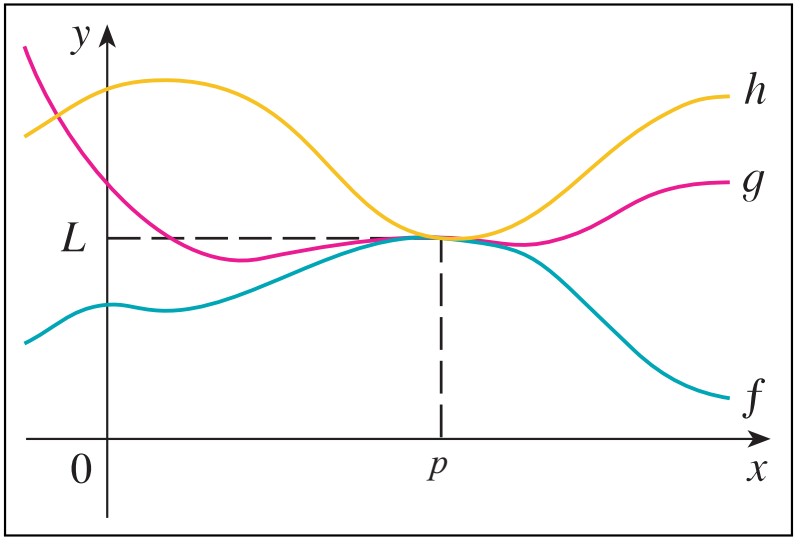
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



O teorema do confronto

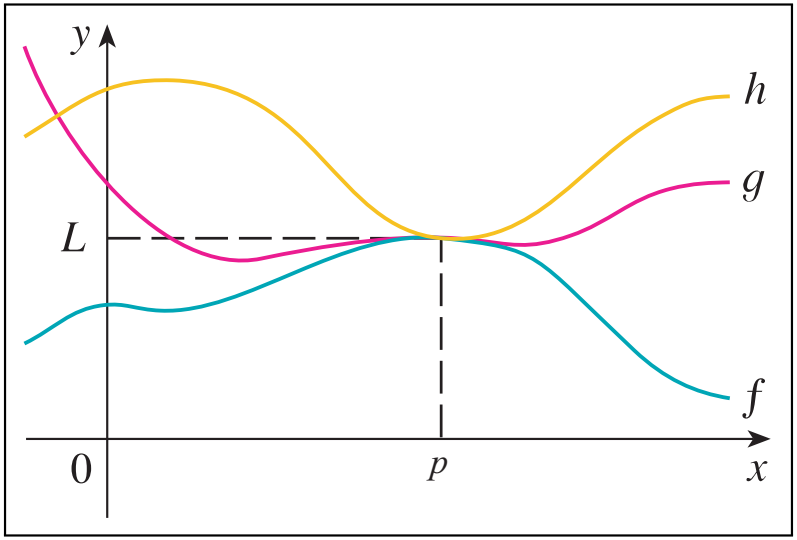
Teorema

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$



Este teorema também é conhecido como o teorema do sanduíche.

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, para todo $x \neq 0$,

$$\underbrace{-x^2}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{+x^2}_{h(x)}$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^2)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

O teorema do anulamento

Teorema

Se $y = f(x)$ é uma função limitada em torno de um ponto p e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \to p} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Exemplo

Mostre que $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$

Exemplo

$$\text{Mostre que } \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Solução.

- Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq +1$. Logo, $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ é uma função limitada em $D = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $y = g(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
- Segue-se então pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)x^2\right] = \lim_{x\to 0}\left[x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

Estude $\lim_{x \to 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right]$.

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right].$$

Solução.

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$.

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^4) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$

Exercício [35] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq +1$. Logo, multiplicando estas desigualdades por x^4 para $x \neq 0$, vemos que

$$-x^4 \leq x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^4) = 0 = \lim_{x\to 0}(+x^4)$, segue-se pelo teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right] = 0.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

Estude $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \right]$.

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \right].$$

Solução.

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$.

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x}\, 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada.

Exercício [36] da página 110 do livro do Stewart

$$\text{Estude } \lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\,2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right].$$

Solução. Temos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi/x) \leq +1$. Logo, exponenciando, vemos que

$$2^{-1} \leq 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)} \leq 2^{+1}.$$

Isto mostra que $y = f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ é uma função limitada. Agora, como $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$, segue-se pelo teorema do anulamento que

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\,2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}\right] = 0.$$

Limites infinitos e assíntotas verticais

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	$10\,000$
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

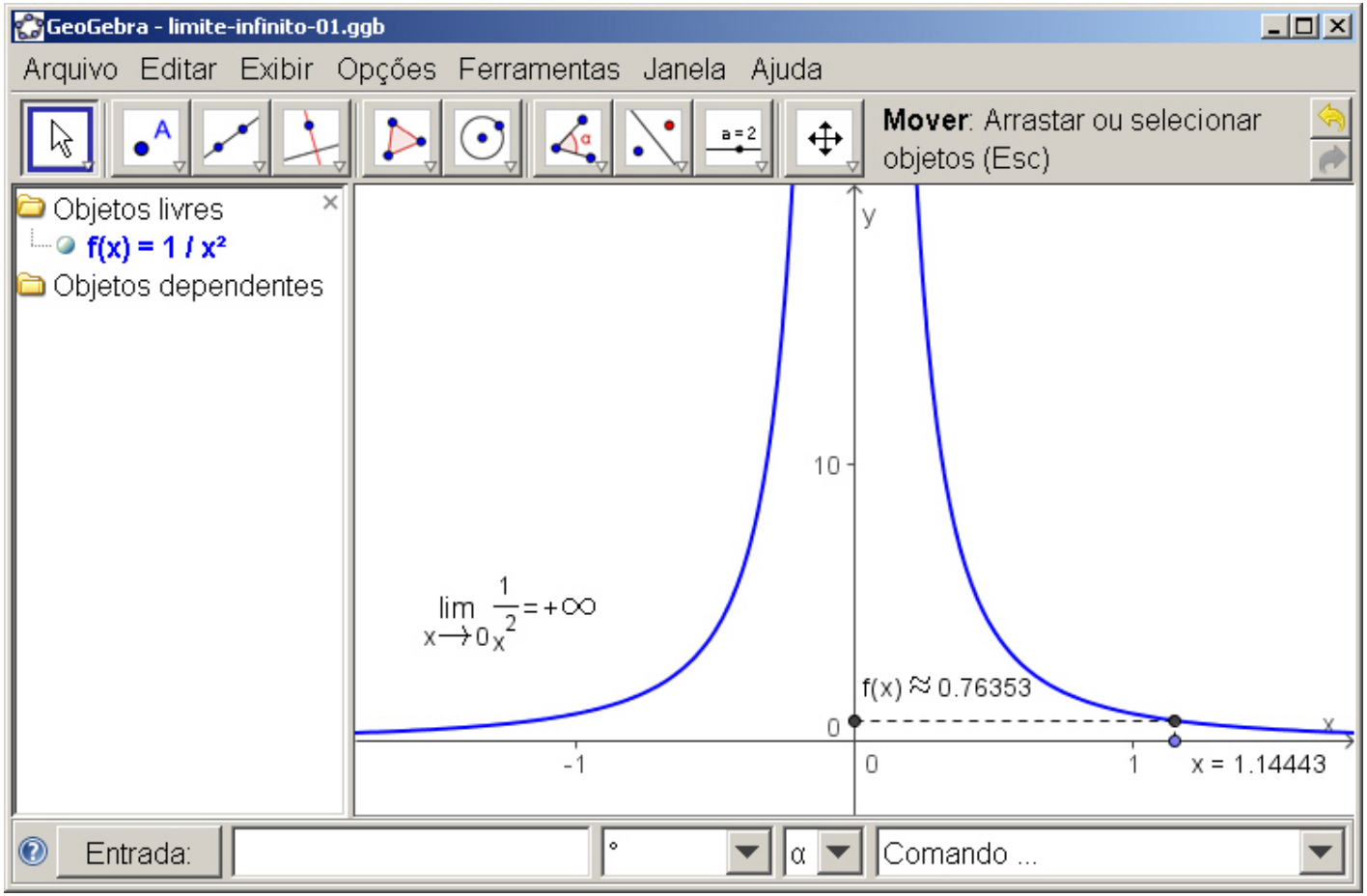
Exemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

x	$f(x)$
-0.1000	100
-0.0100	10 000
-0.0010	1 000 000
-0.0001	100 000 000
0.0000	não está definida
0.0001	100 000 000
0.0010	1 000 000
0.0100	10 000
0.1000	100

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$



Limite infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

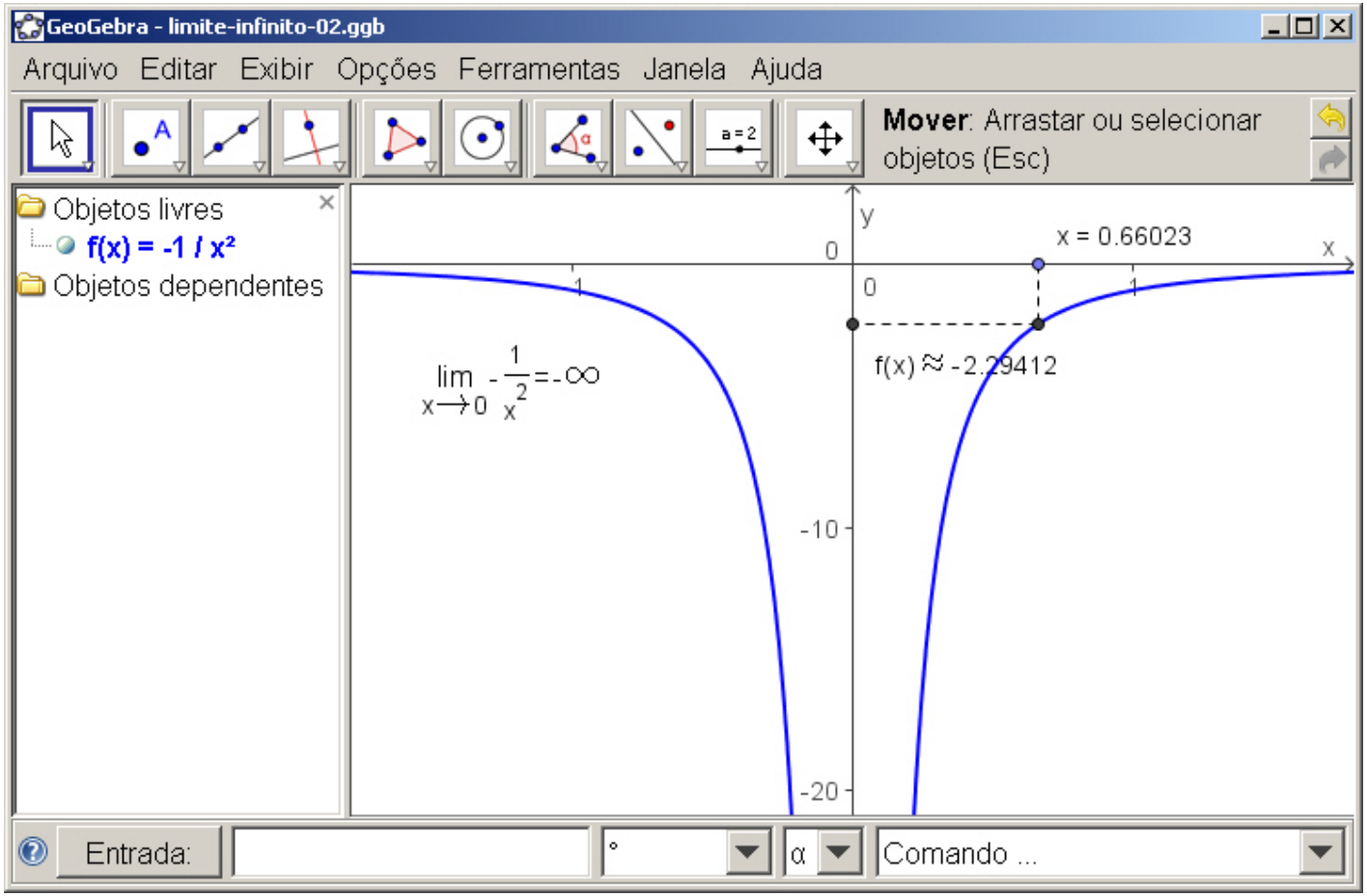
Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) por meio de uma escolha adequada de x nas proximidades de p, mas não igual a p.

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$



Limite infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em ambos os lados de p, exceto possivelmente em p. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se valores de x próximos de p, porém diferentes do próprio p.

Limites laterais infinitos

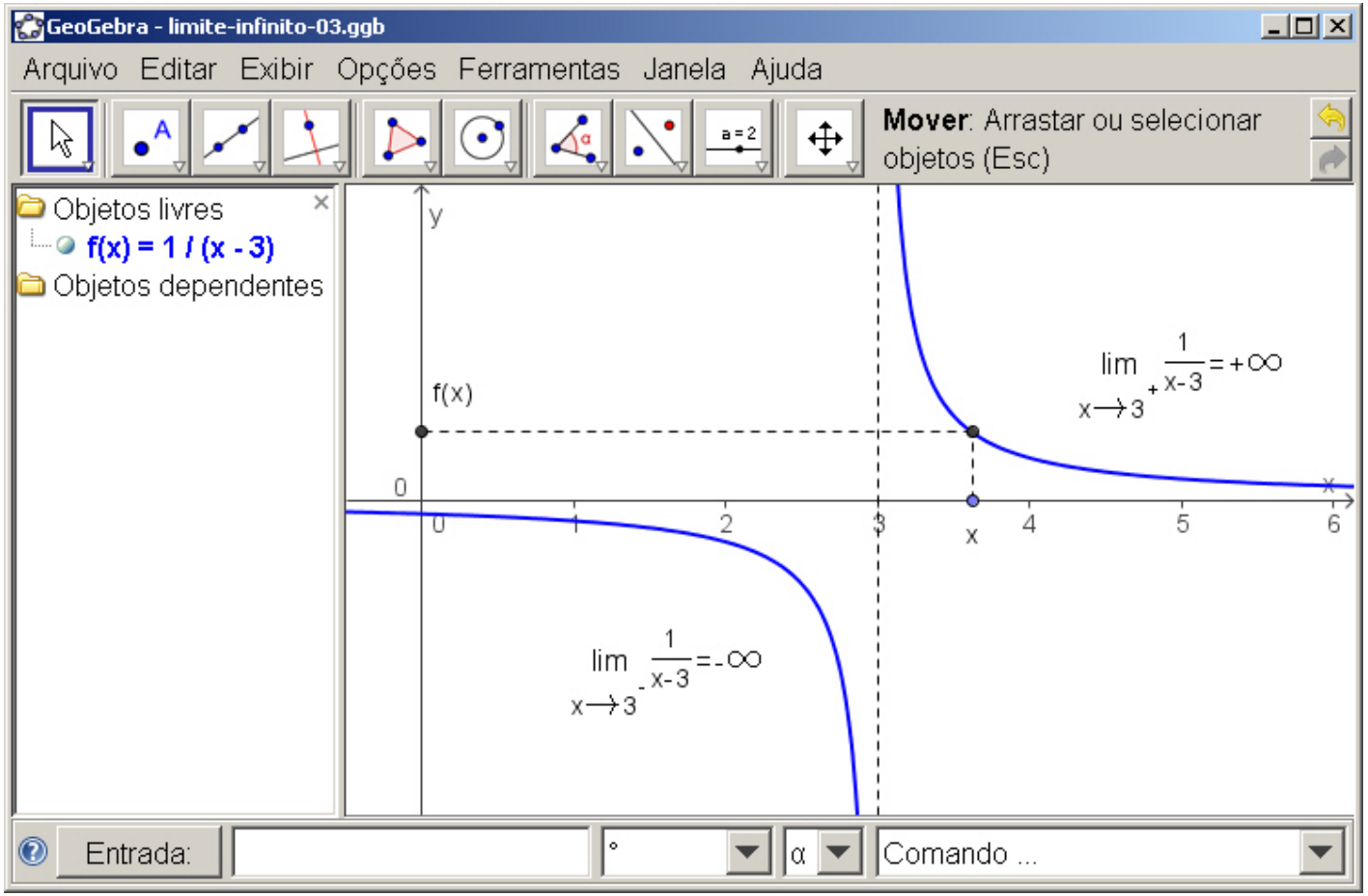
Definições análogas podem ser dadas no caso de limites laterais:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$



Assíntota vertical

Definição

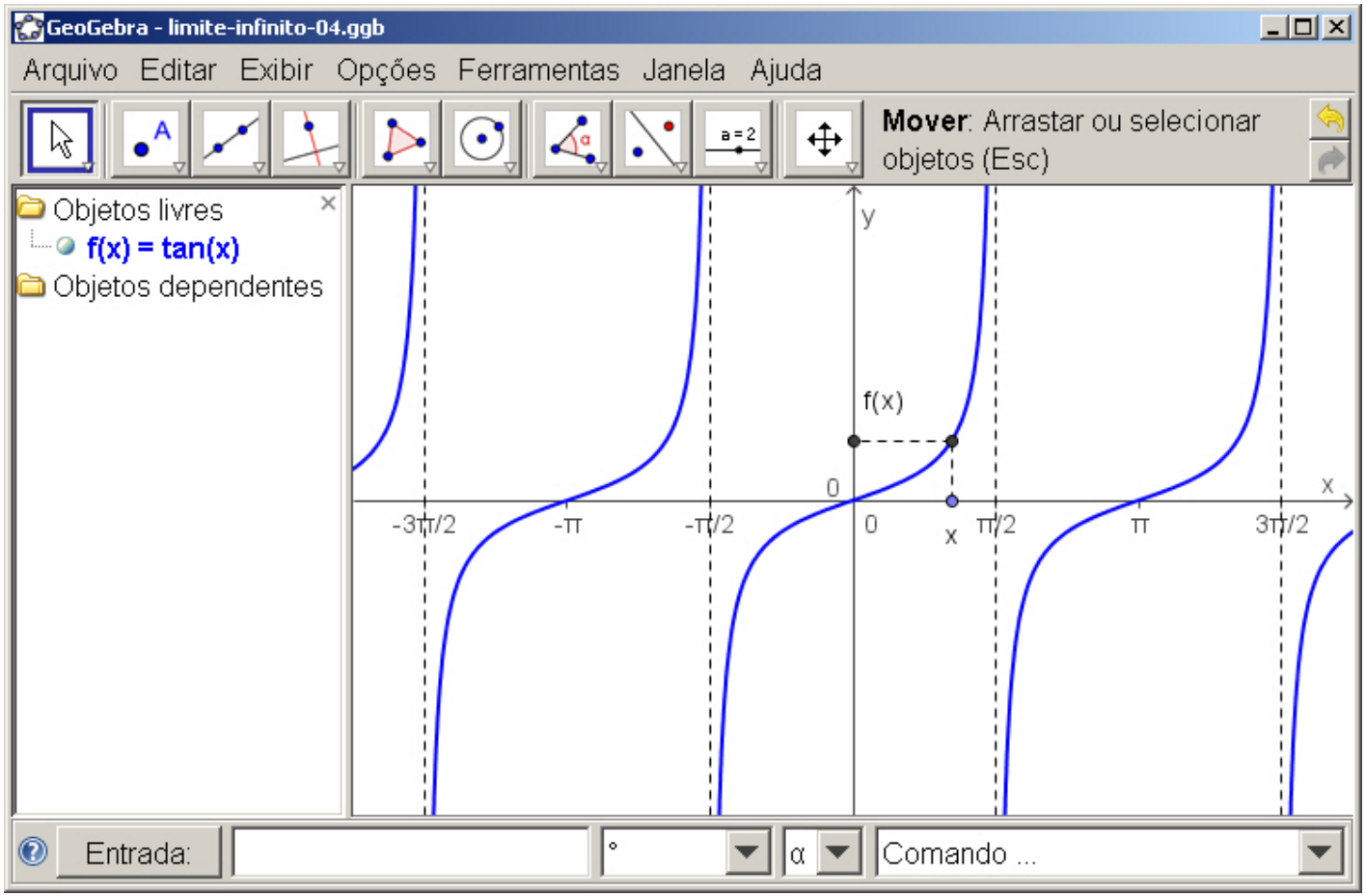
A reta $x = p$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty.$$

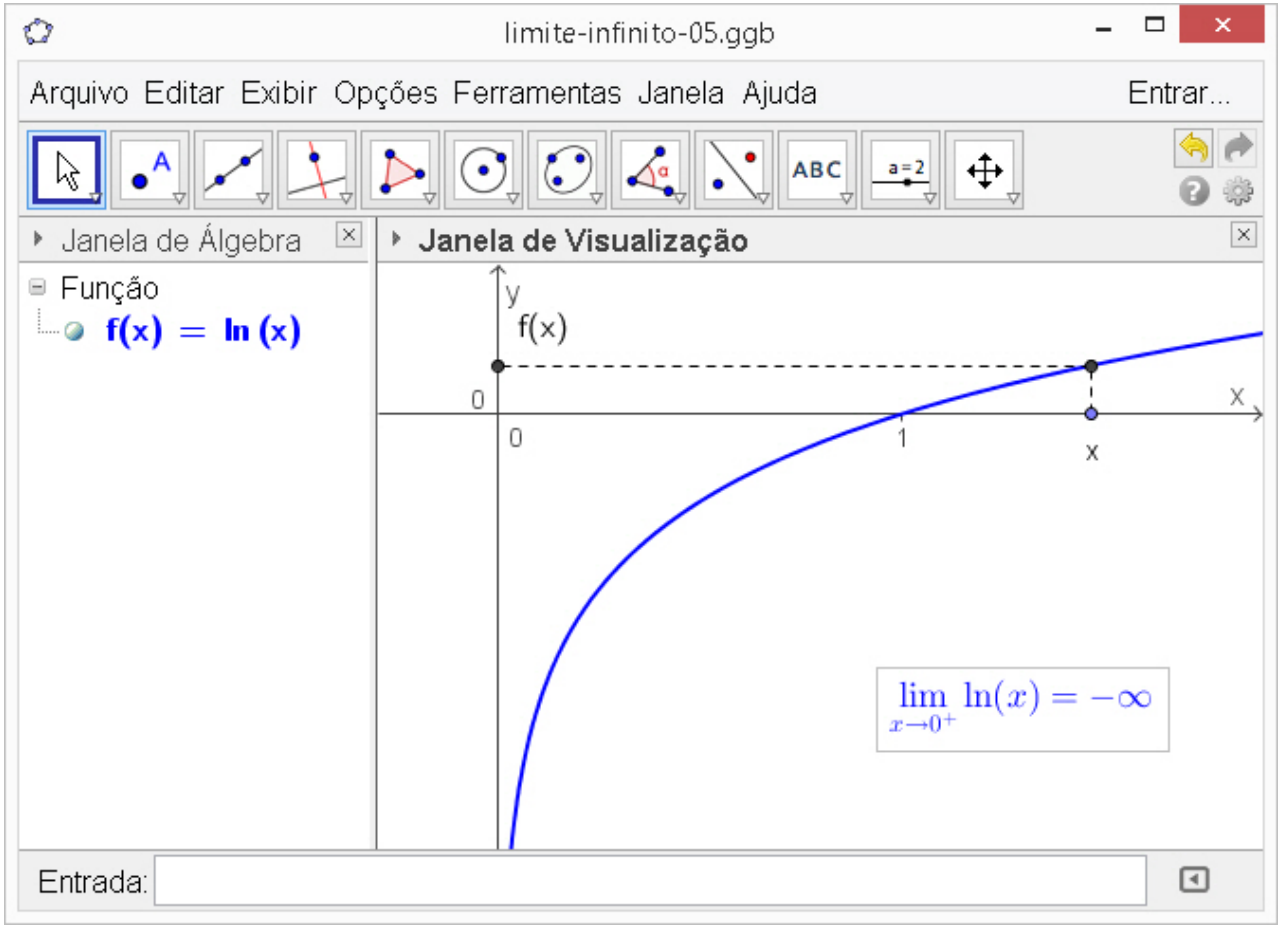
Exemplo

As assíntotas verticais de $y = \text{tg}(x)$ são
$x = +\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = +3\,\pi/2$, $x = -3\,\pi/2$, etc.



Exemplo

A assíntota vertical de $y = \ln(x)$ é a reta $x = 0$ (o eixo y).



Exercício [21] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5}$.

Exercício [21] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$.

Solução. Temos que se $x \to 5^+$, então $x - 5 \to 0^+$ e, consequentemente, $6/(x-5) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{6}{x-5} = +\infty.$$

Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$.

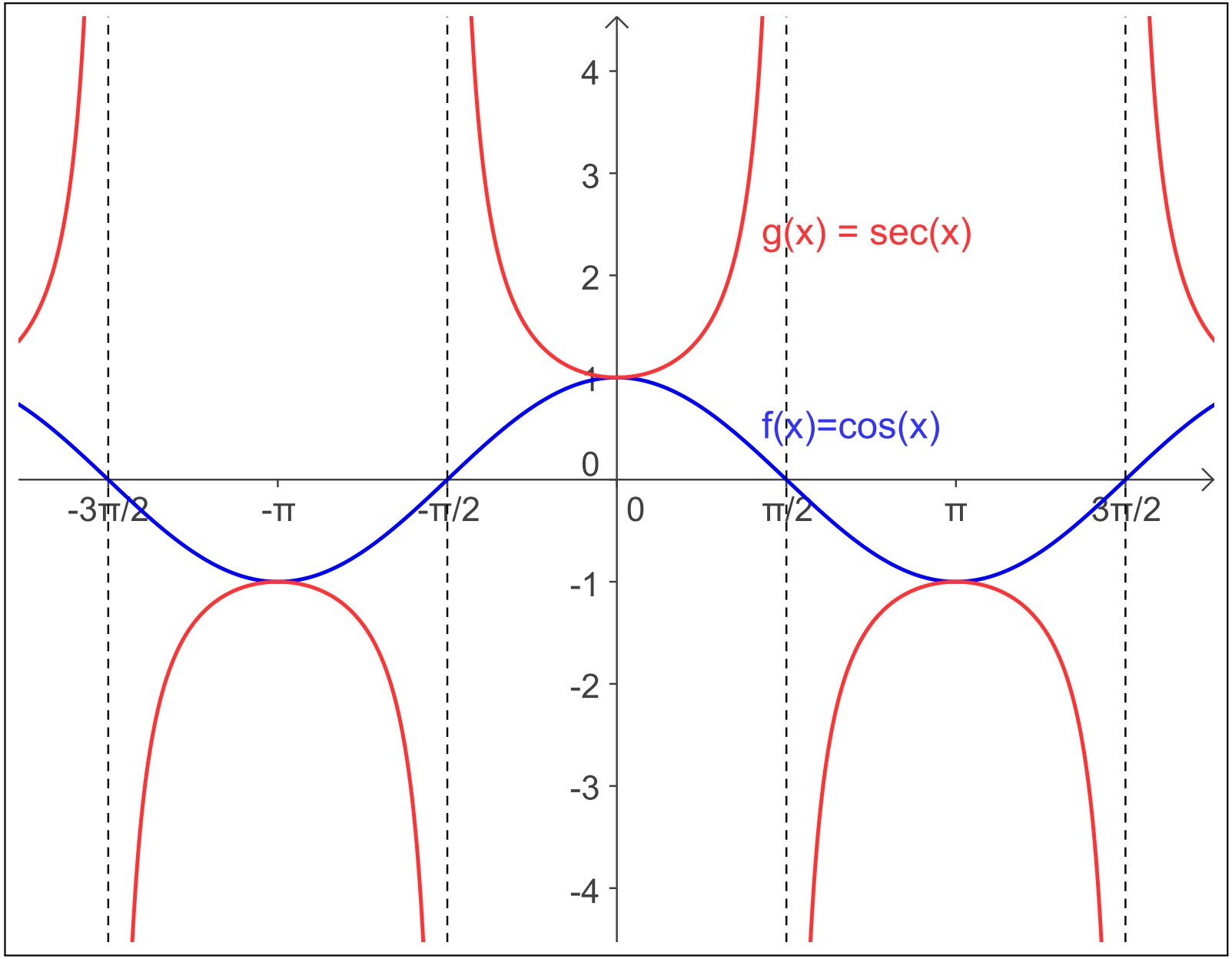
Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart

Determine o limite infinito $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$.

Solução. Temos que se $x \to (-\pi/2)^+$, então $\cos(x) \to 0^+$ e, consequentemente, $\sec(x) = 1/\cos(x) \to +\infty$. Assim:

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec(x) = +\infty.$$

Exercício [27] da página 101 do livro do Stewart



Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) =$

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exercício

Determine as assíntotas verticais de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solução. Se $p \neq +1$ e $p \neq -1$, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p) = 1/(p^2 - 1)$ que não é $+\infty$ e nem $-\infty$. Assim, qualquer reta da forma $x = p$ com $p \notin \{-1, +1\}$ não é uma assíntota vertical de f. Agora

$$\lim_{x \to +1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to +1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$. Isto mostra que $x = +1$ é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical.

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$

Exercício

Para $p = -1$, temos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty,$$

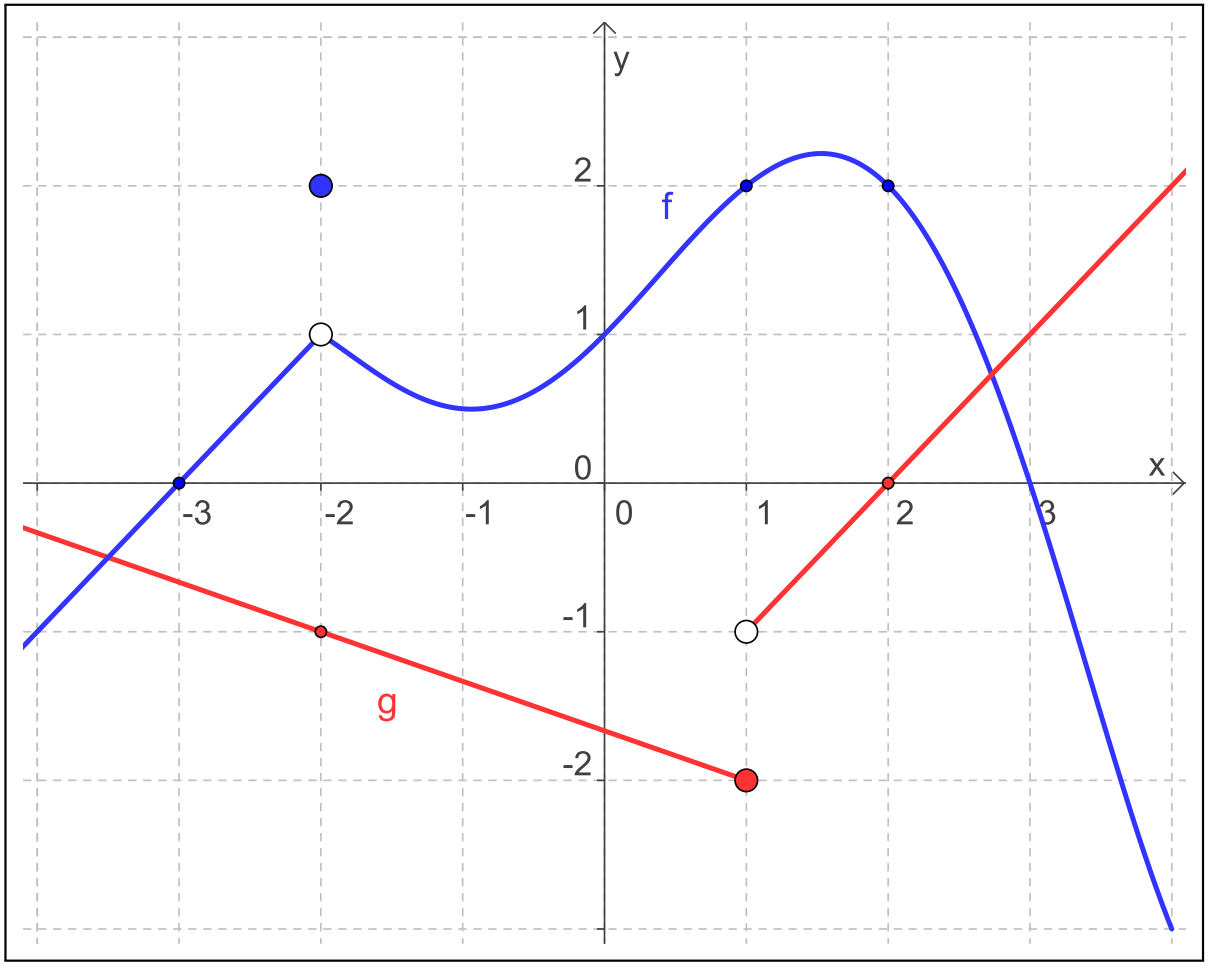
pois se $x \to -1^+$, então $x^2 - 1 \to 0^-$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to -\infty$. Isto mostra que $x = -1$ também é uma assíntota vertical de f.

Observação. Não é necessário calcular o outro limite lateral para mostrar que $x = -1$ é uma assíntota vertical. Contudo, para registro, temos que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty,$$

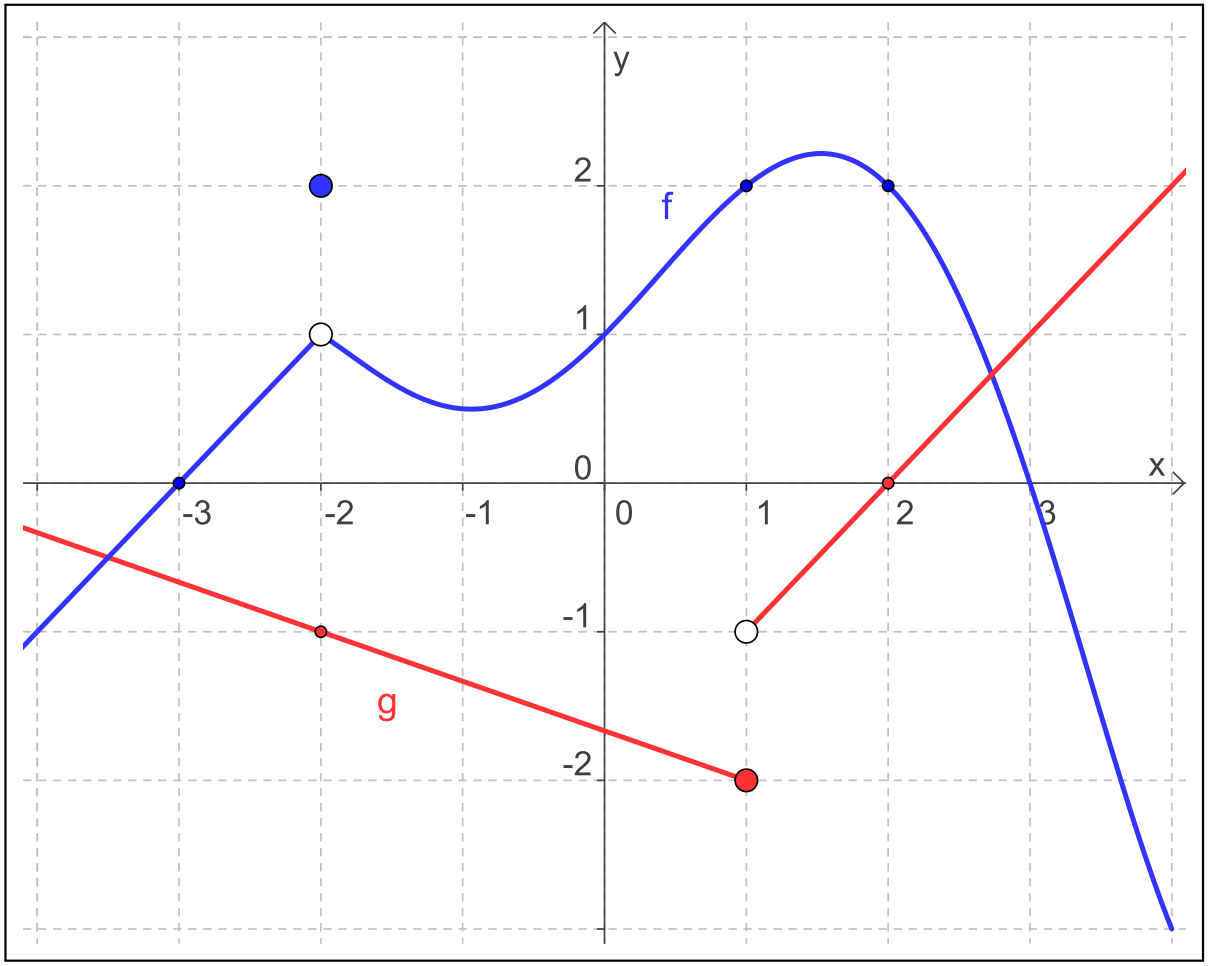
pois se $x \to -1^-$, então $x^2 - 1 \to 0^+$ e, sendo assim, $1/(x^2 - 1) \to +\infty$.

Exemplo



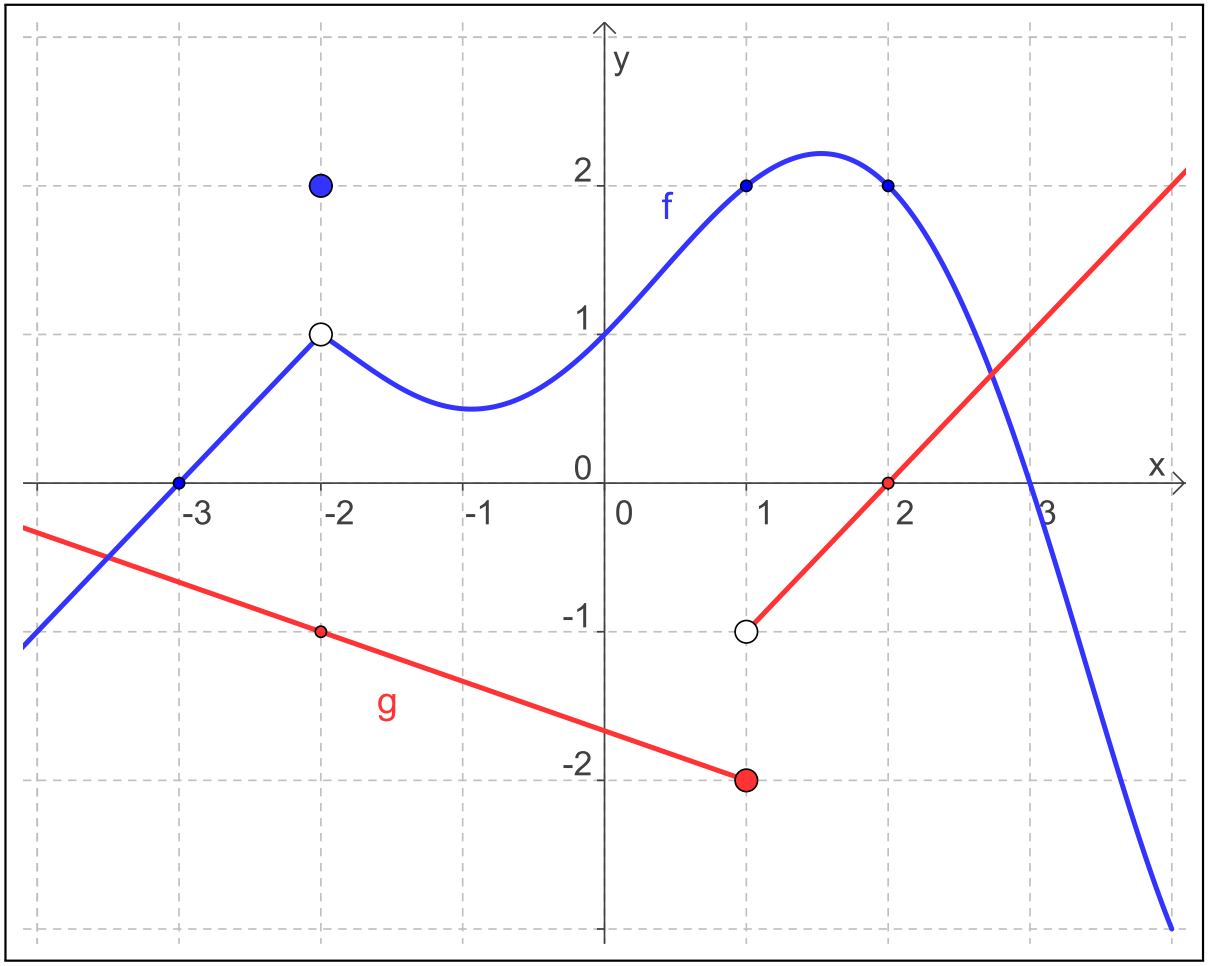
$$\lim_{x \to +2} [g(x)/f(x)] =$$

Exemplo



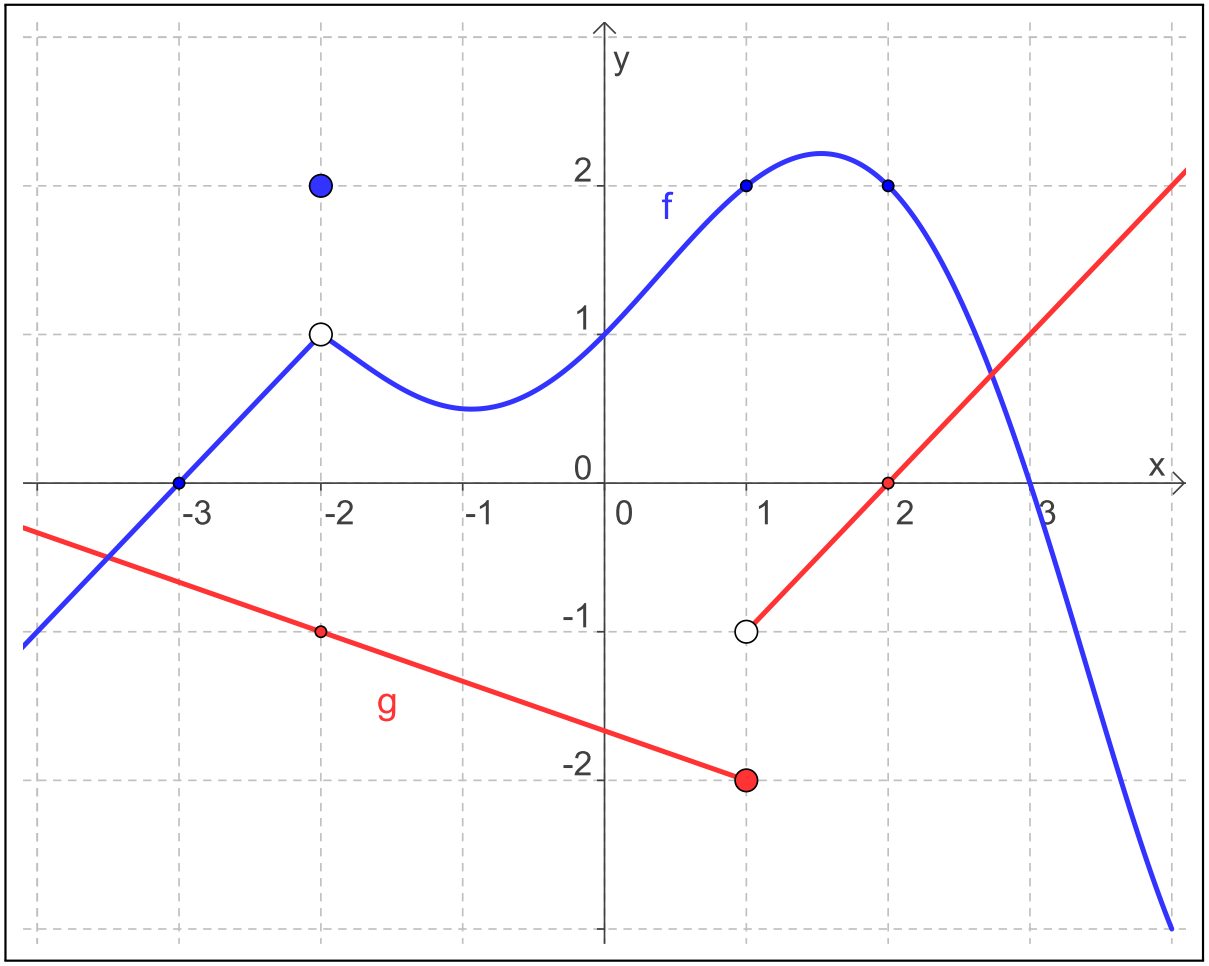
$$\lim_{x\to+2}[g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x\to+2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to+2} f(x)\right) =$$

Exemplo



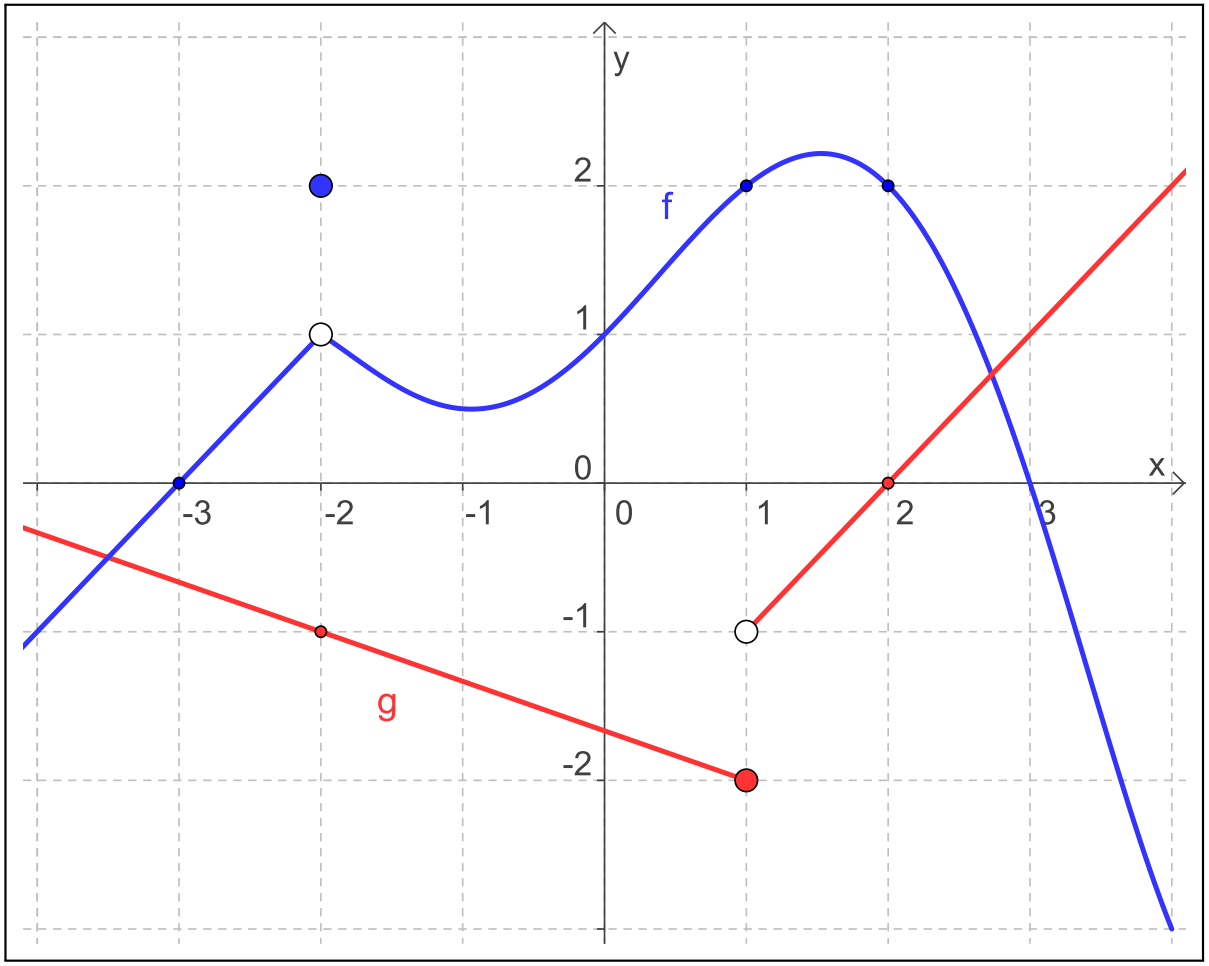
$$\lim_{x\to+2}[g(x)/f(x)] = \left(\lim_{x\to+2} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to+2} f(x)\right) = 0/2 = 0.$$

Exemplo



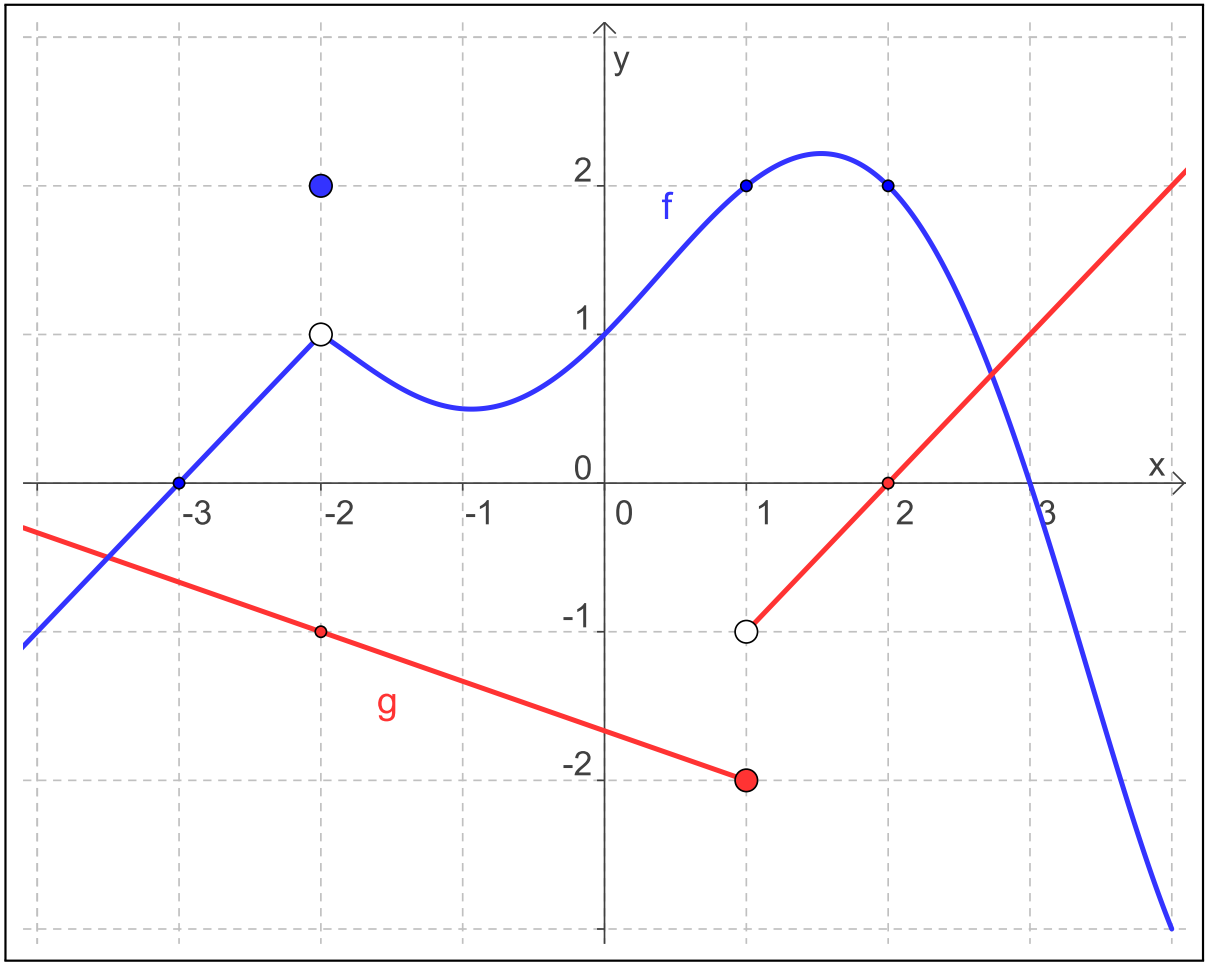
$$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] =$$

Exemplo



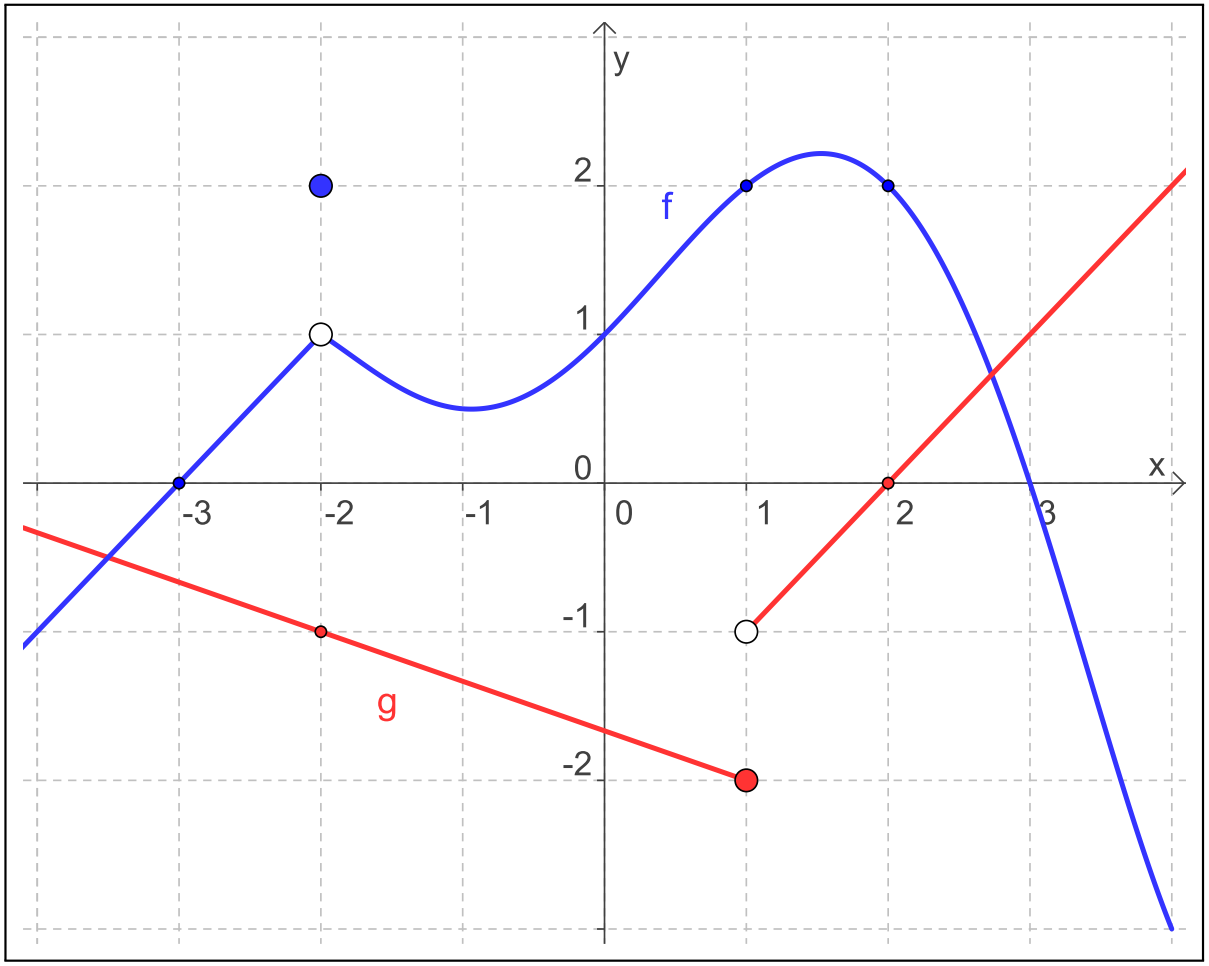
$$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$$

Exemplo



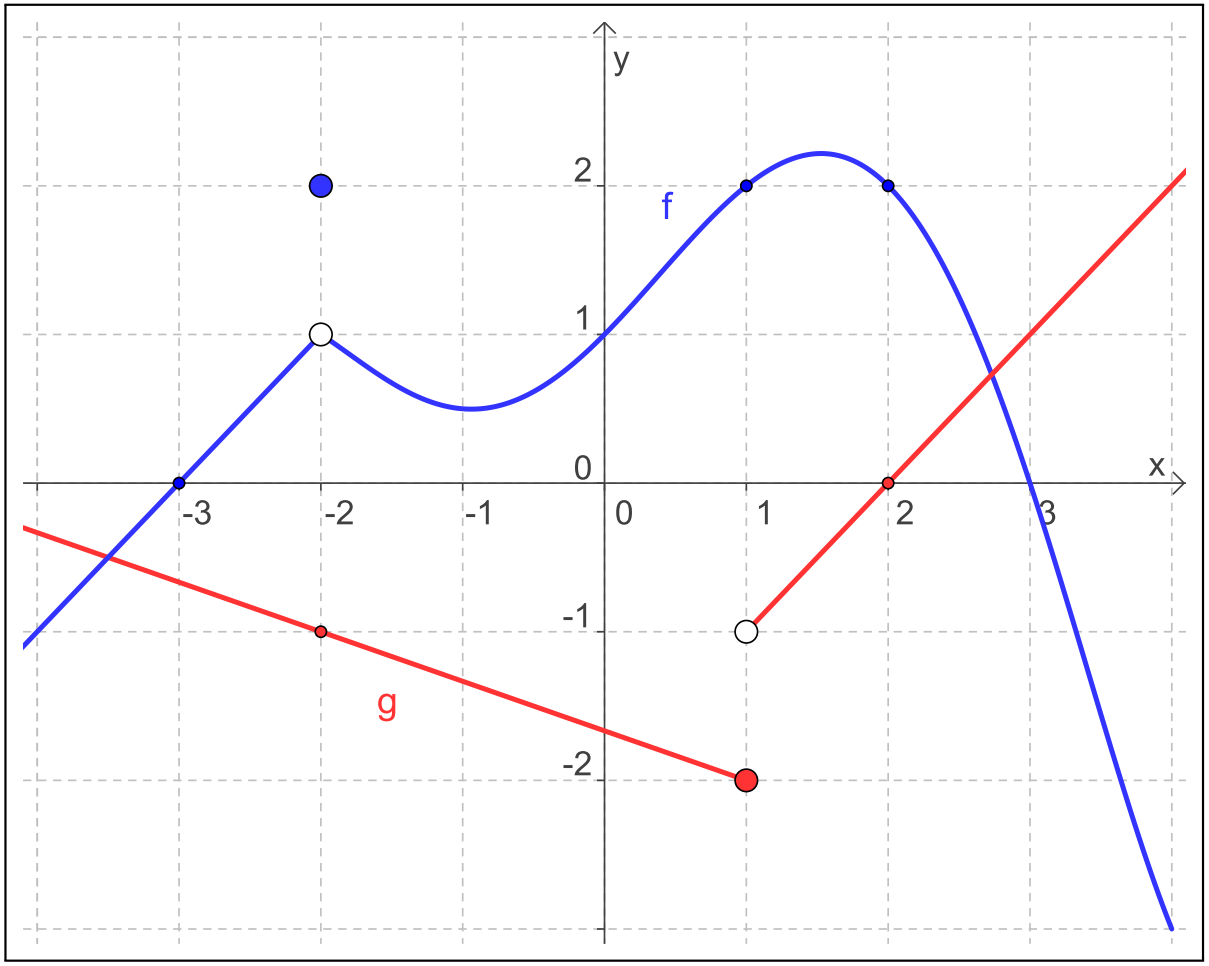
$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to$ e $f(x) \to$.

Exemplo



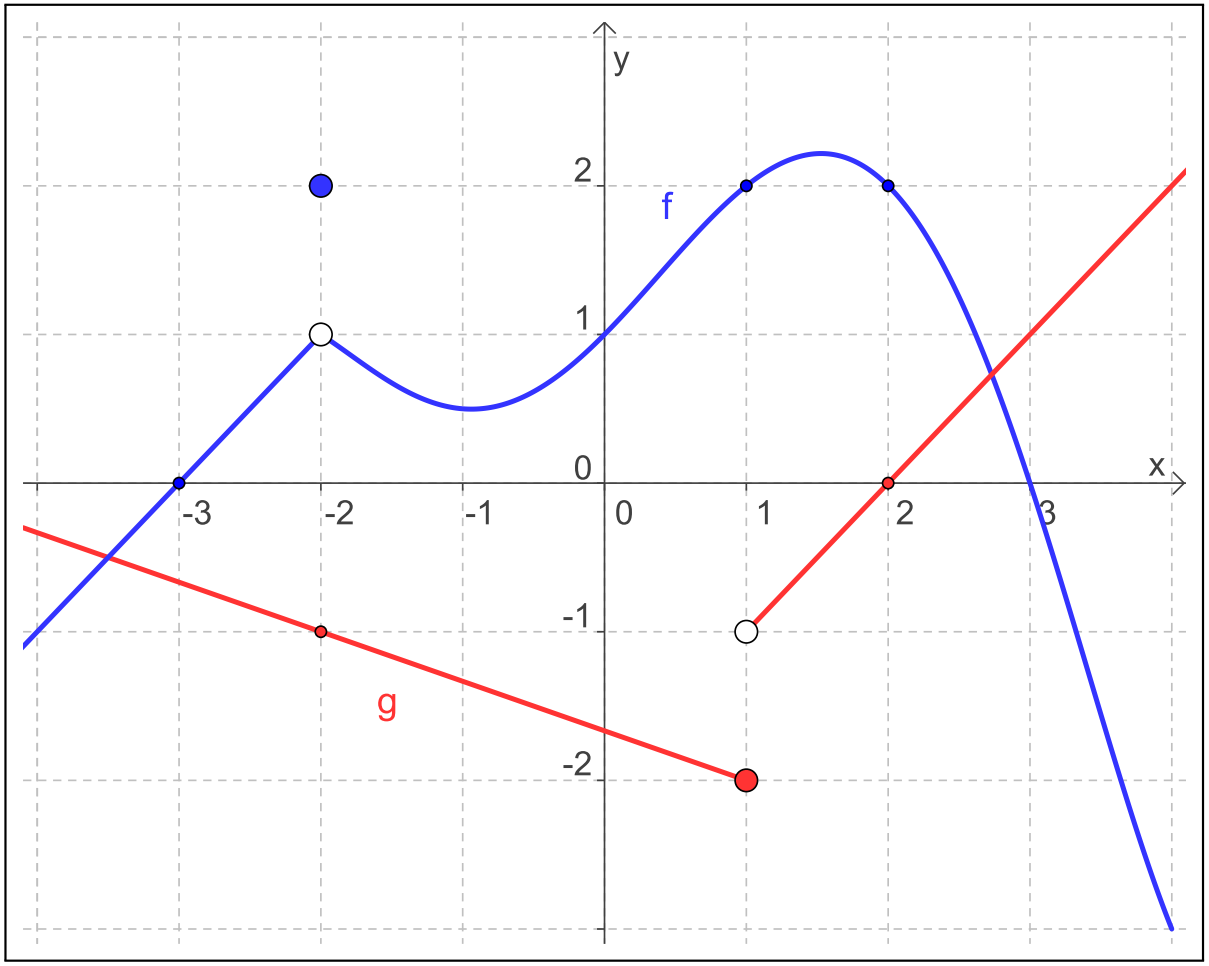
$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to 0^+$ e $f(x) \to$.

Exemplo



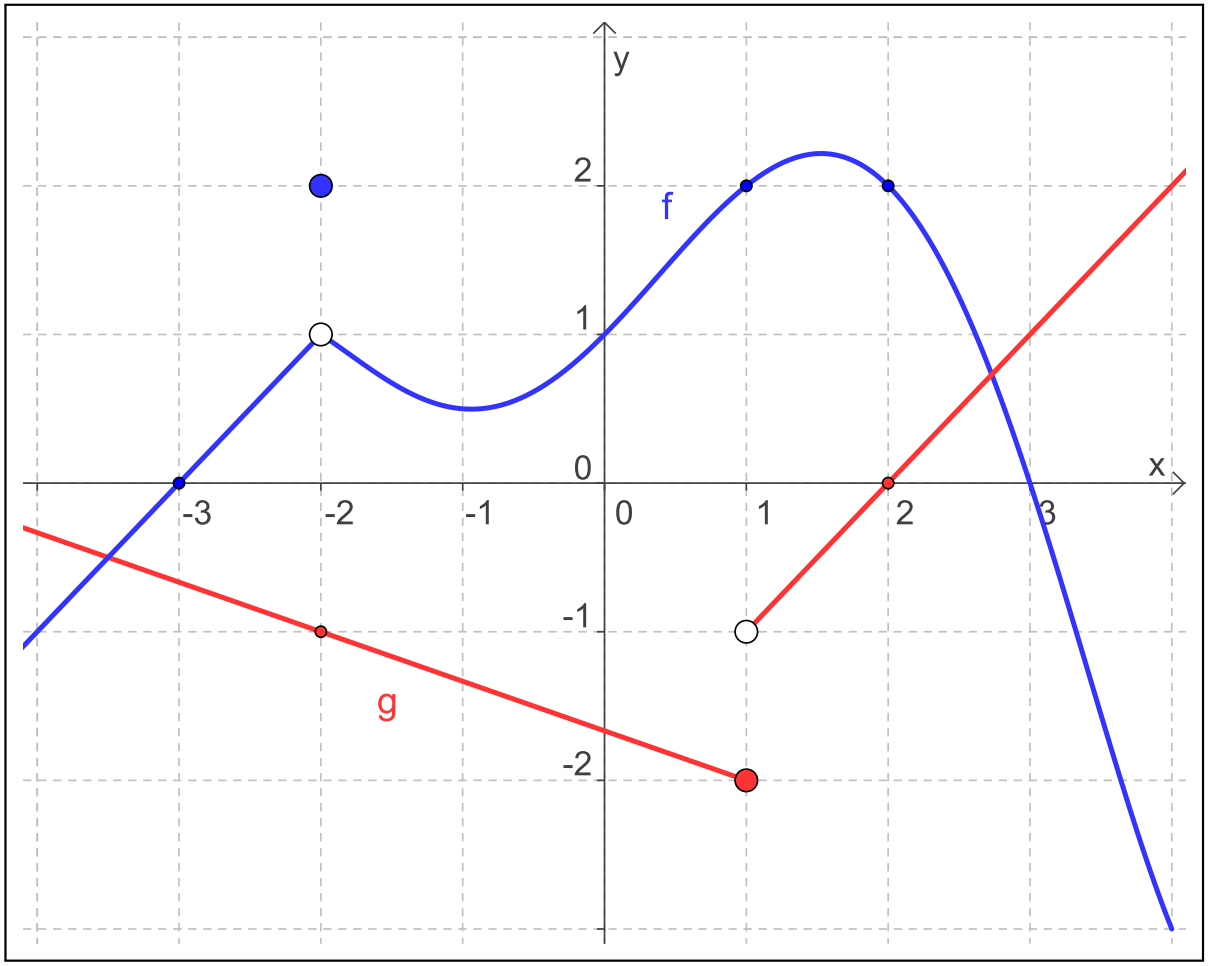
$\lim_{x \to +2^+} [f(x)/g(x)] = +\infty$ pois, quando $x \to +2^+$, $g(x) \to 0^+$ e $f(x) \to +2^-$.

Exemplo



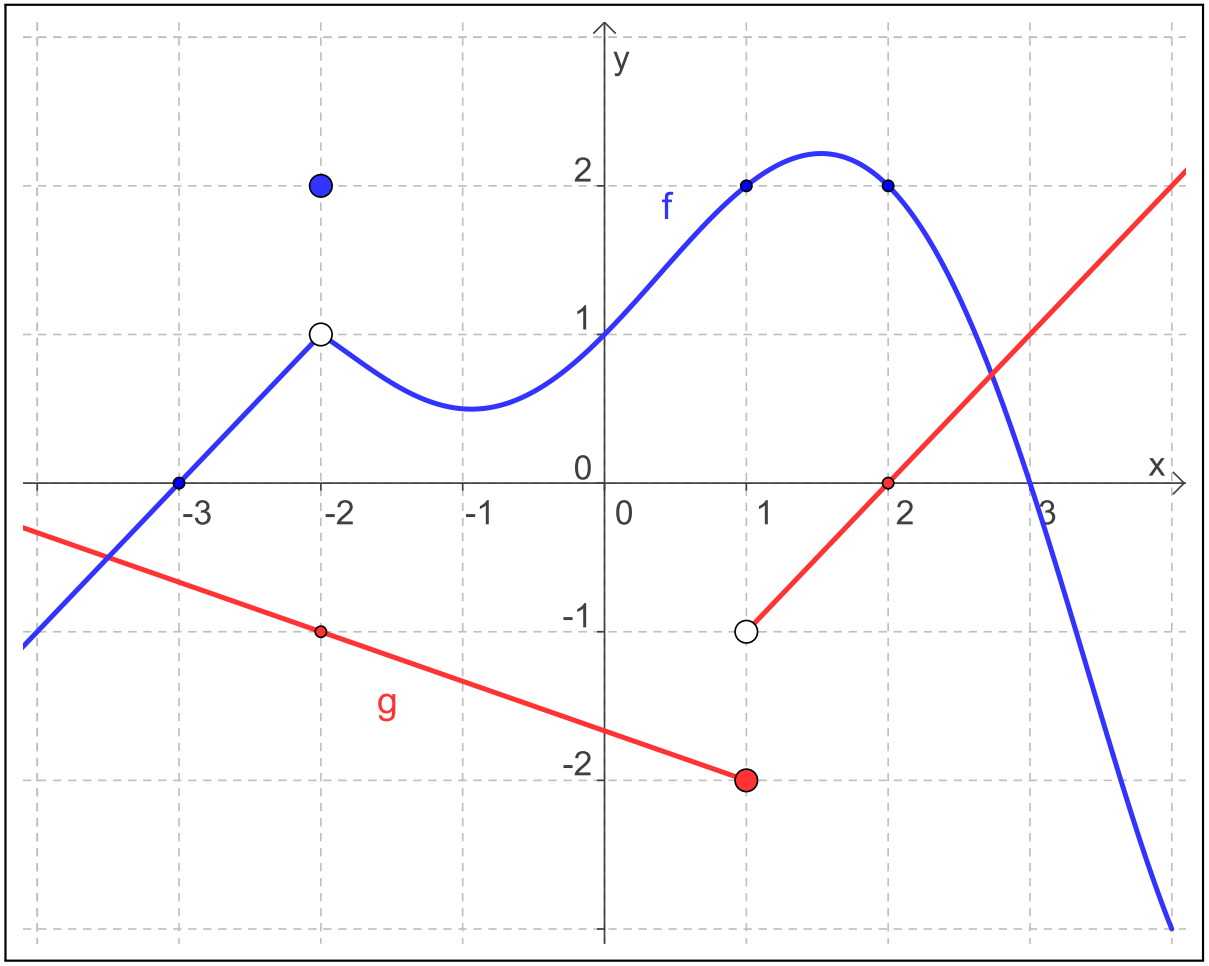
$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] =$$

Exemplo



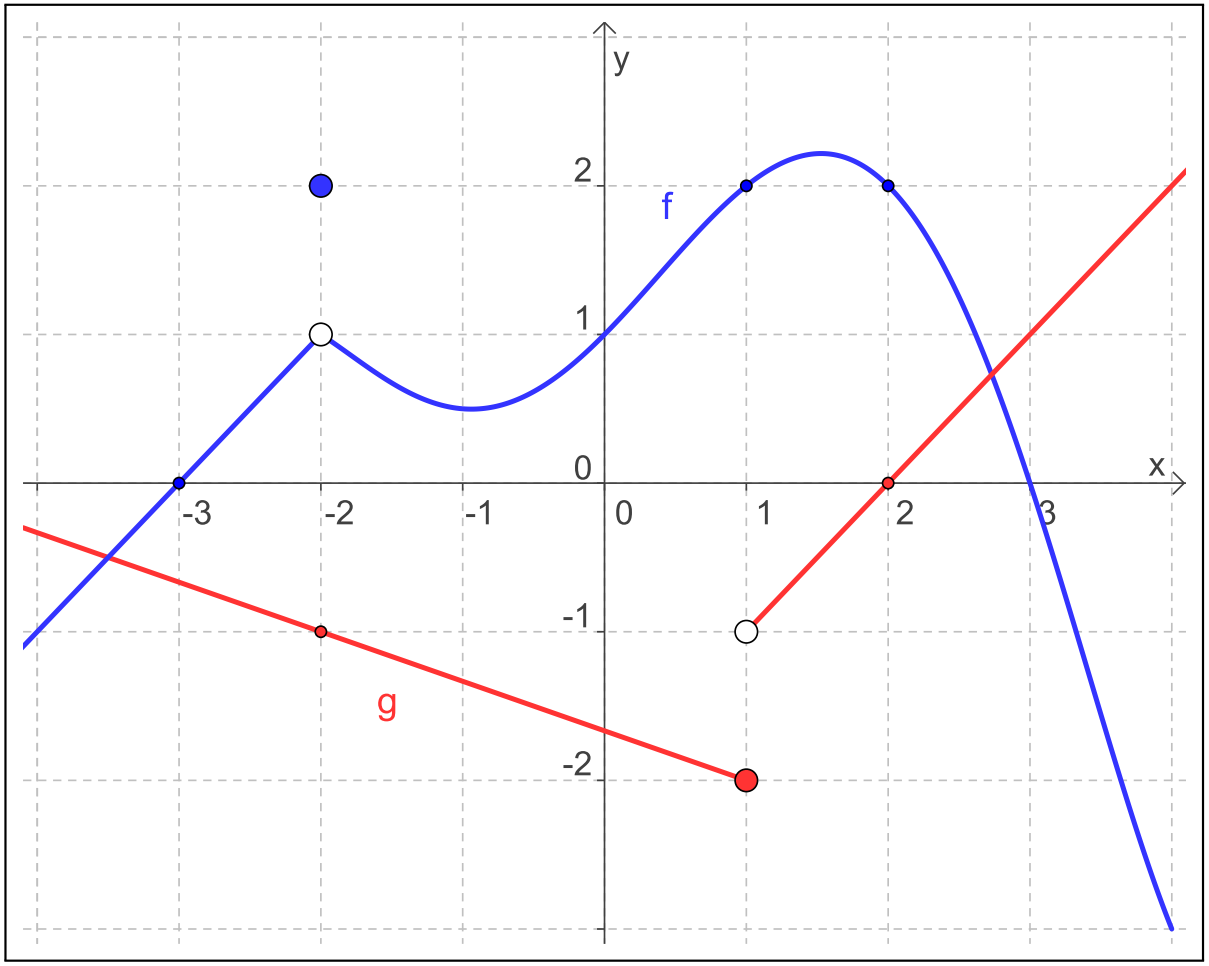
$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$$

Exemplo



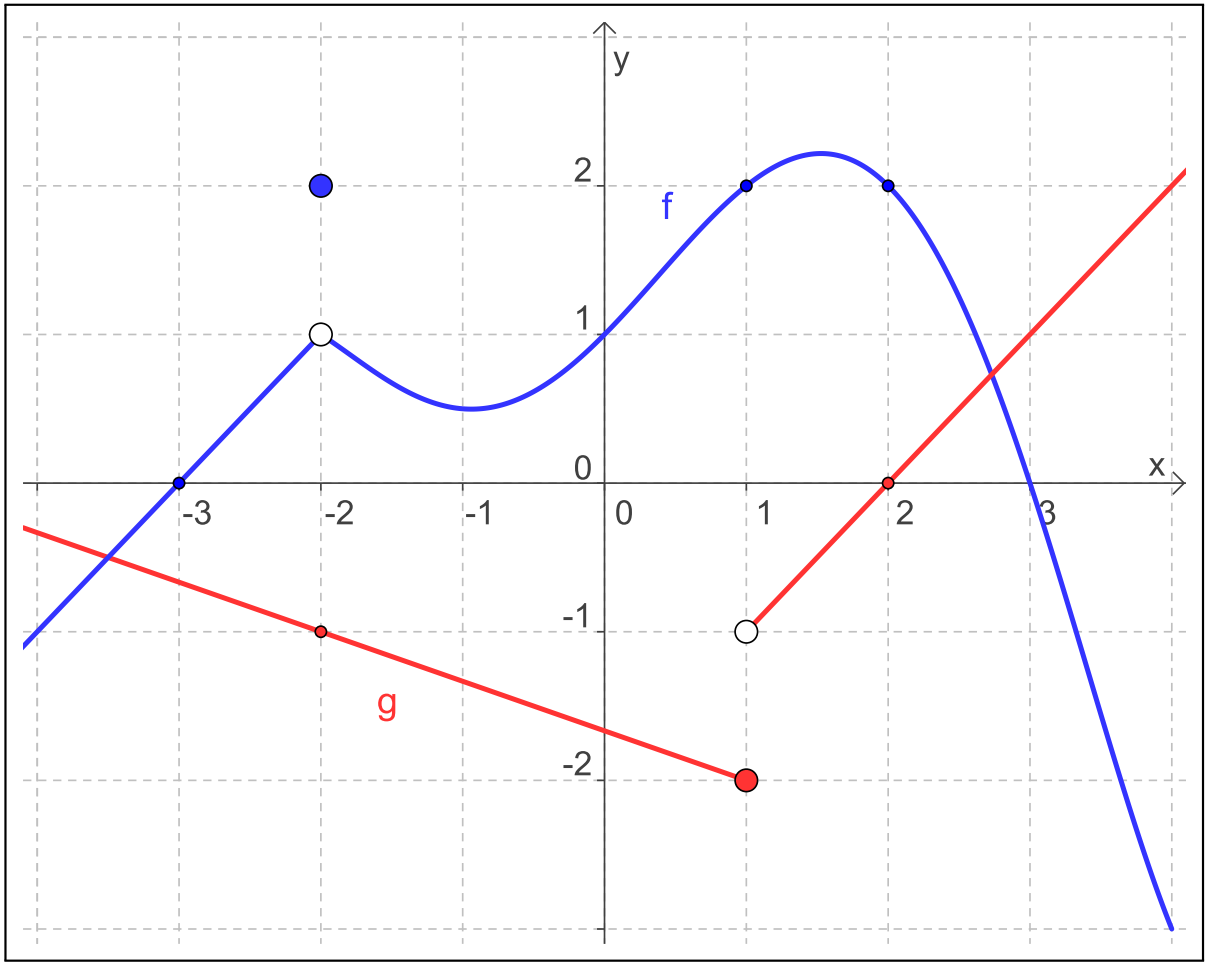
$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to$ e $f(x) \to$.

Exemplo



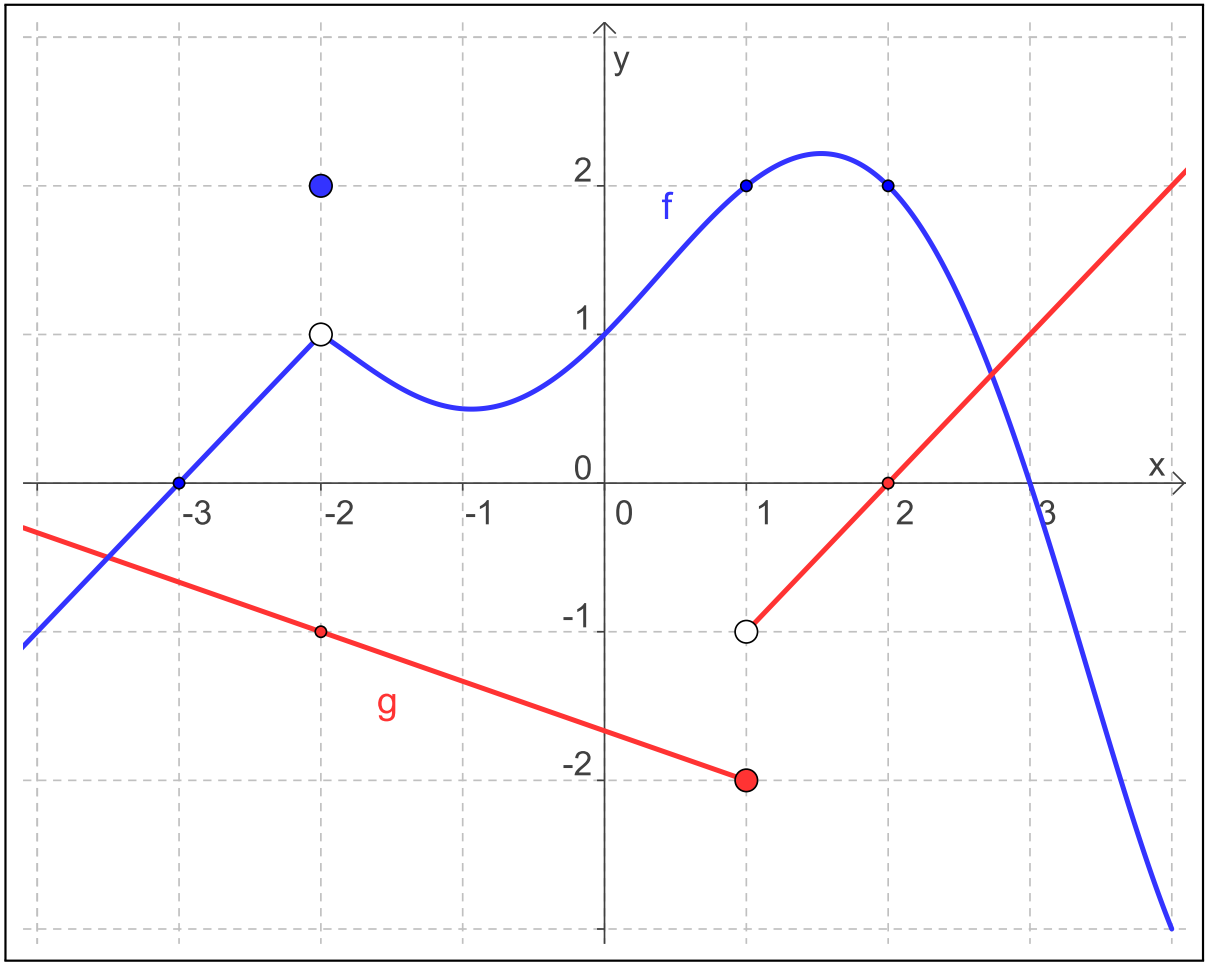
$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty$ pois, quando $x \to +2^-$, $g(x) \to 0^-$ e $f(x) \to$.

Exemplo



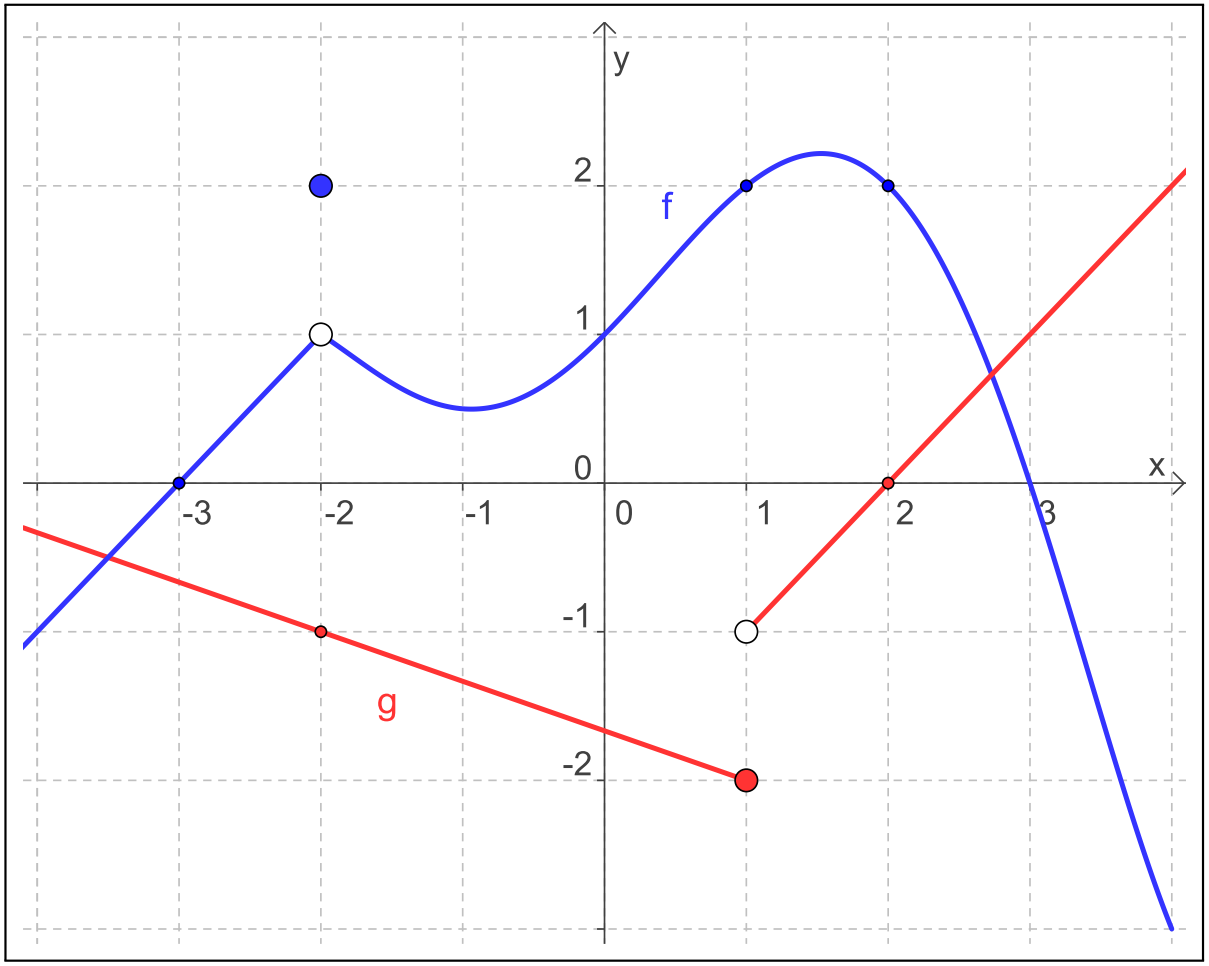
$$\lim_{x \to +2^-} [f(x)/g(x)] = -\infty \text{ pois, quando } x \to +2^-,\ g(x) \to 0^- \text{ e } f(x) \to +2^+.$$

Exemplo



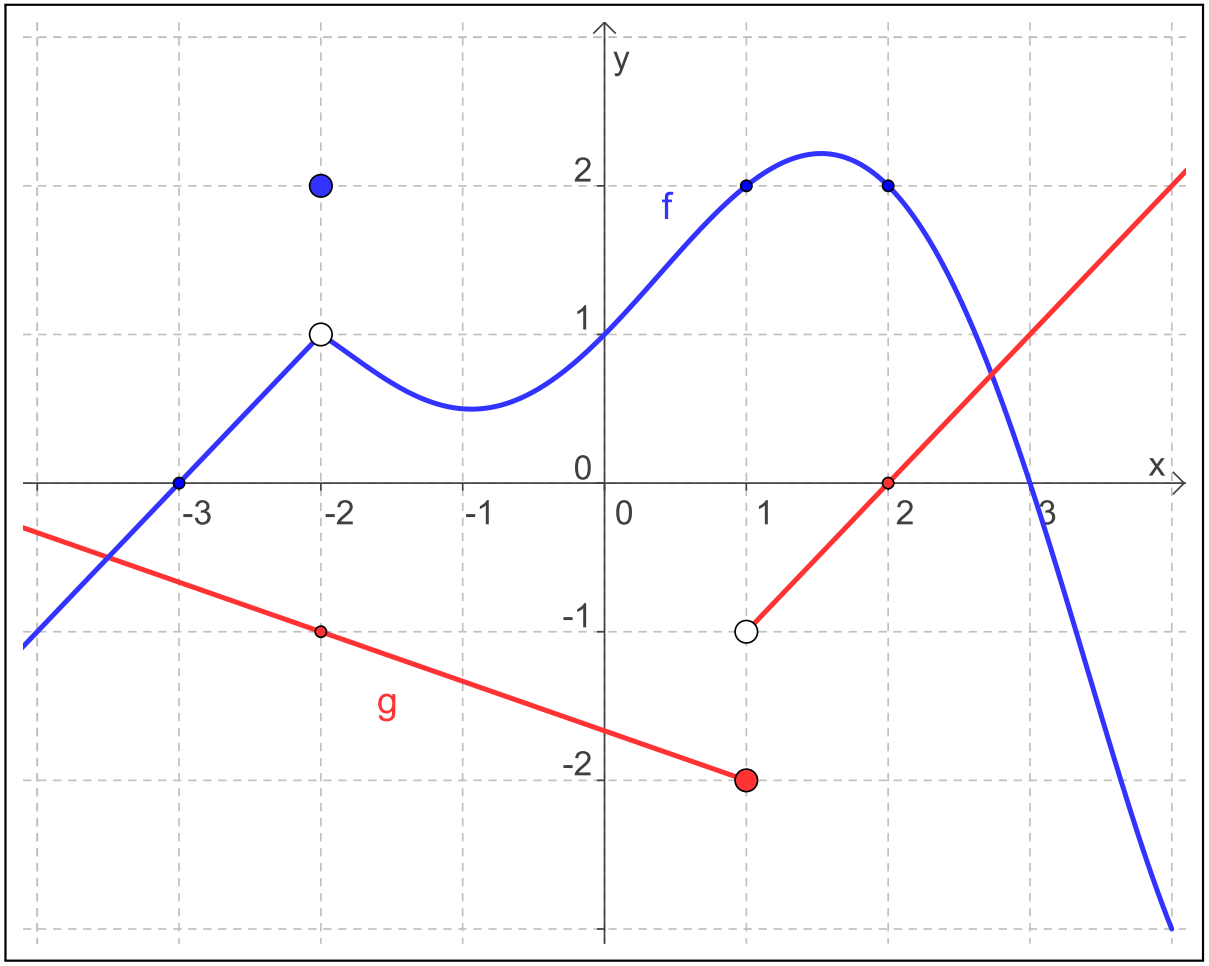
$$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$$

Exemplo



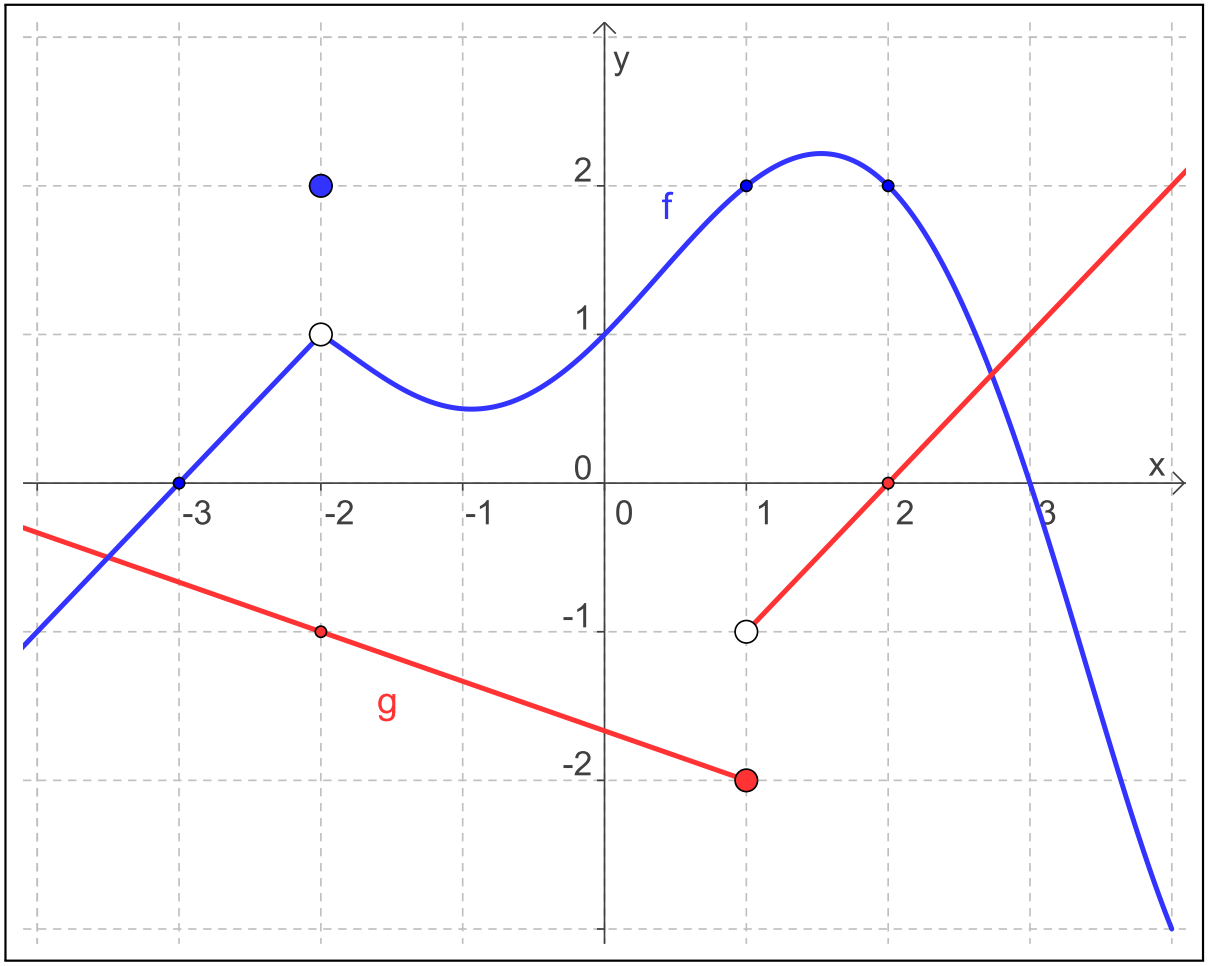
$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe

Exemplo



$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$

Exemplo



$\lim_{x \to +2} [f(x)/g(x)]$ não existe, não é $+\infty$ e nem é $-\infty$!