Cálculo I-A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 8

Versão 0.9

Limites no infinito e assíntotas horizontais

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$
-1	$0.000000000\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$
-1	$0.000000000\ldots$
-10	$0.980198019\ldots$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$
-1	$0.000000000\ldots$
-10	$0.980198019\ldots$
-100	$0.999800020\ldots$

Exemplo

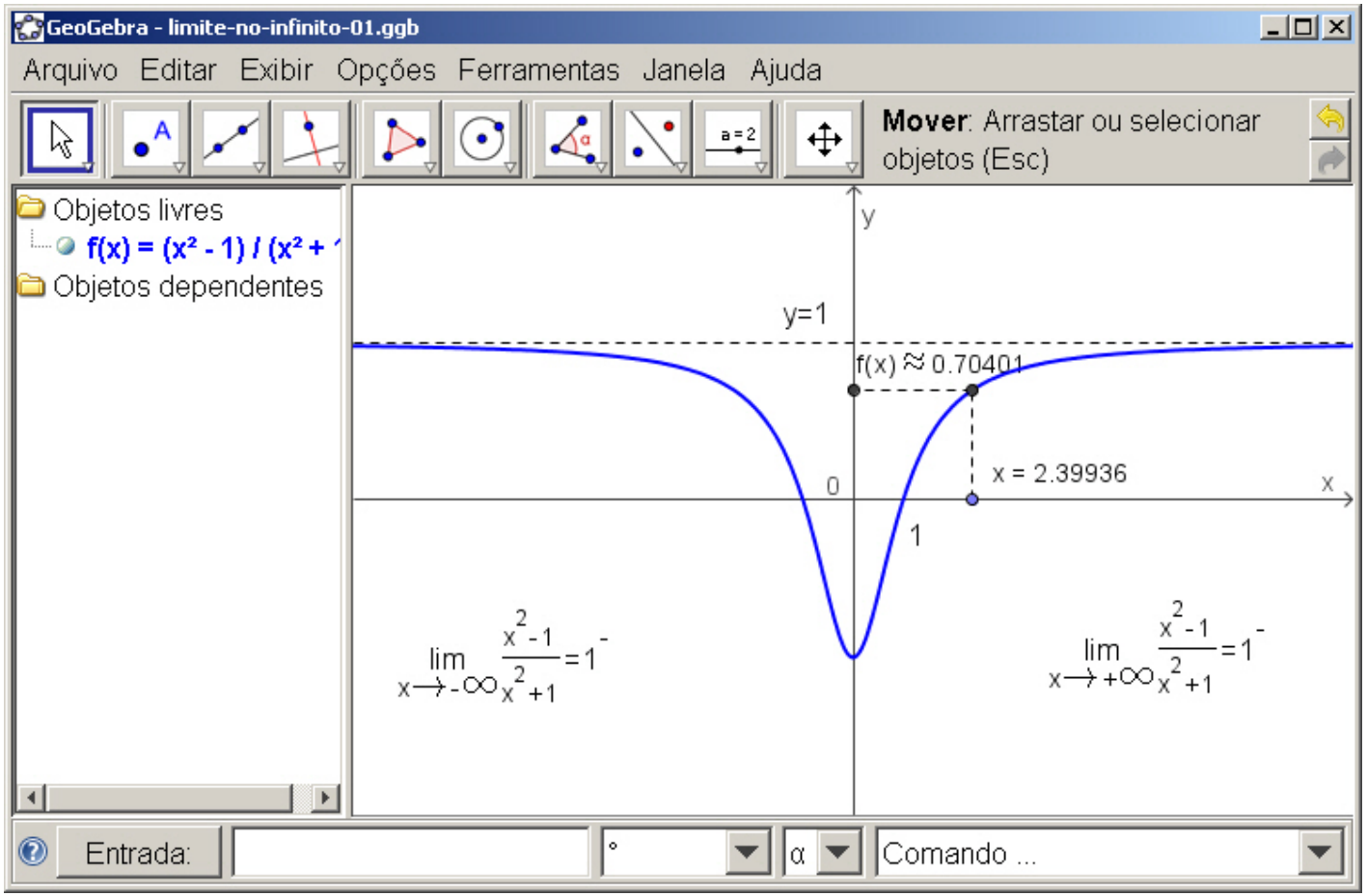
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
$+1$	$0.000000000\ldots$
$+10$	$0.980198019\ldots$
$+100$	$0.999800020\ldots$
$+1000$	$0.999998000\ldots$

x	$f(x)$
-1	$0.000000000\ldots$
-10	$0.980198019\ldots$
-100	$0.999800020\ldots$
-1000	$0.999998000\ldots$

Exemplo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1^- \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1^-.$$



Exemplo

Como justificar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^-$?

Exemplo

Como justificar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^-$?

Solução.

Exemplo

Como justificar que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1^-$?

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Exemplo

Como justificar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-$?

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

Exemplo

Como justificar que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-$?

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to \quad$.

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^- ?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$.

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$. Portanto, $1 - 1/x^2 \to$ e $1 + 1/x^2 \to$.

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$. Portanto, $1 - 1/x^2 \to 1^-$ e $1 + 1/x^2 \to \quad$.

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$. Portanto, $1 - 1/x^2 \to 1^-$ e $1 + 1/x^2 \to 1^+$.

Exemplo

$$\text{Como justificar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1^-?$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

Agora, como $x \to +\infty$, segue-se que $1/x^2 \to 0^+$. Portanto, $1 - 1/x^2 \to 1^-$ e $1 + 1/x^2 \to 1^+$. Consequentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1^-.$$

Limite no infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $]a, +\infty[$. Dizemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente próximos do número L tomando-se x suficientemente grande.

Limite no infinito (de um ponto de vista informal)

Definição

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $]-\infty, a[$. Dizemos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente próximos do número L tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

Assíntota horizontal

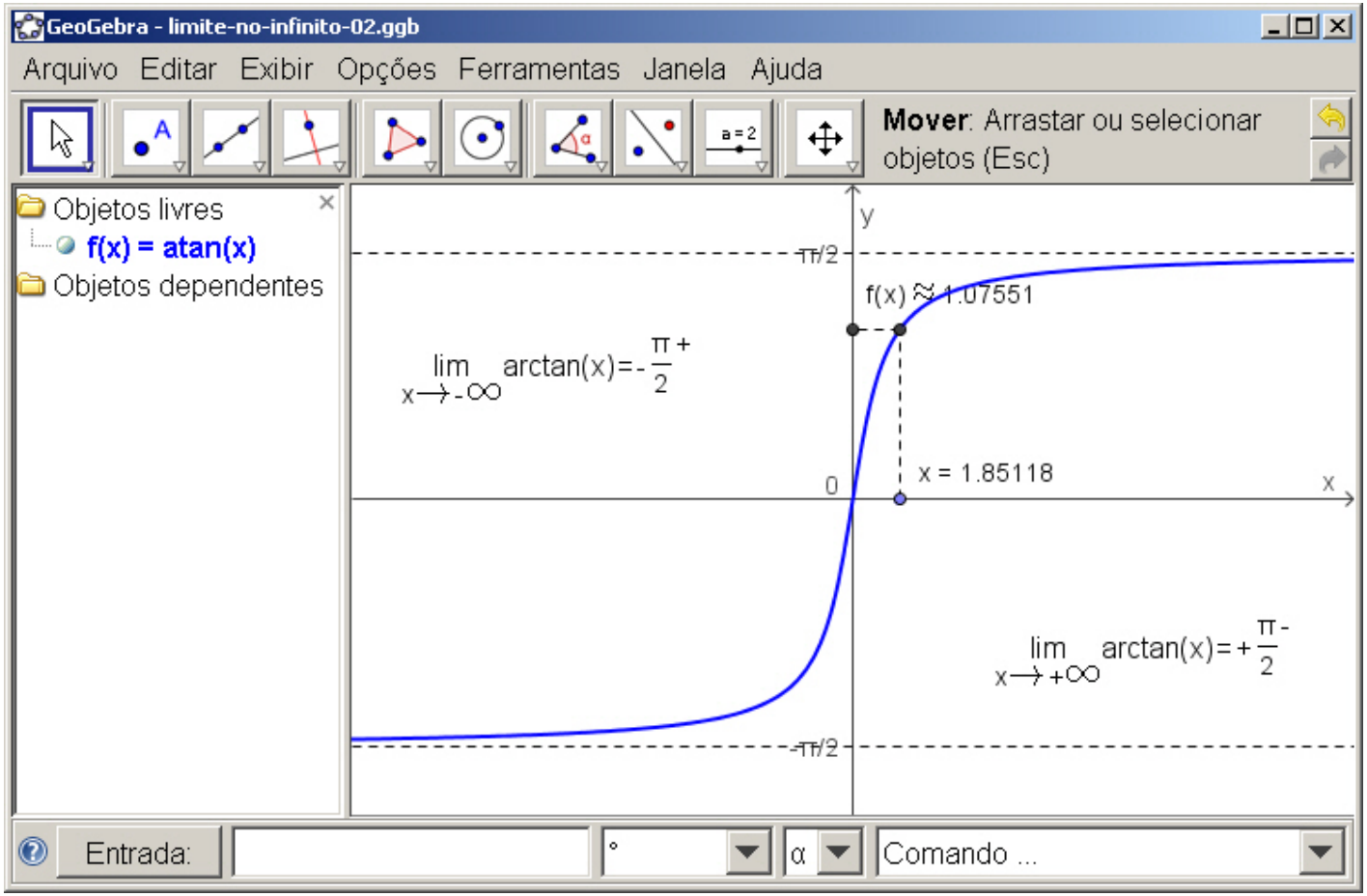
Definição

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

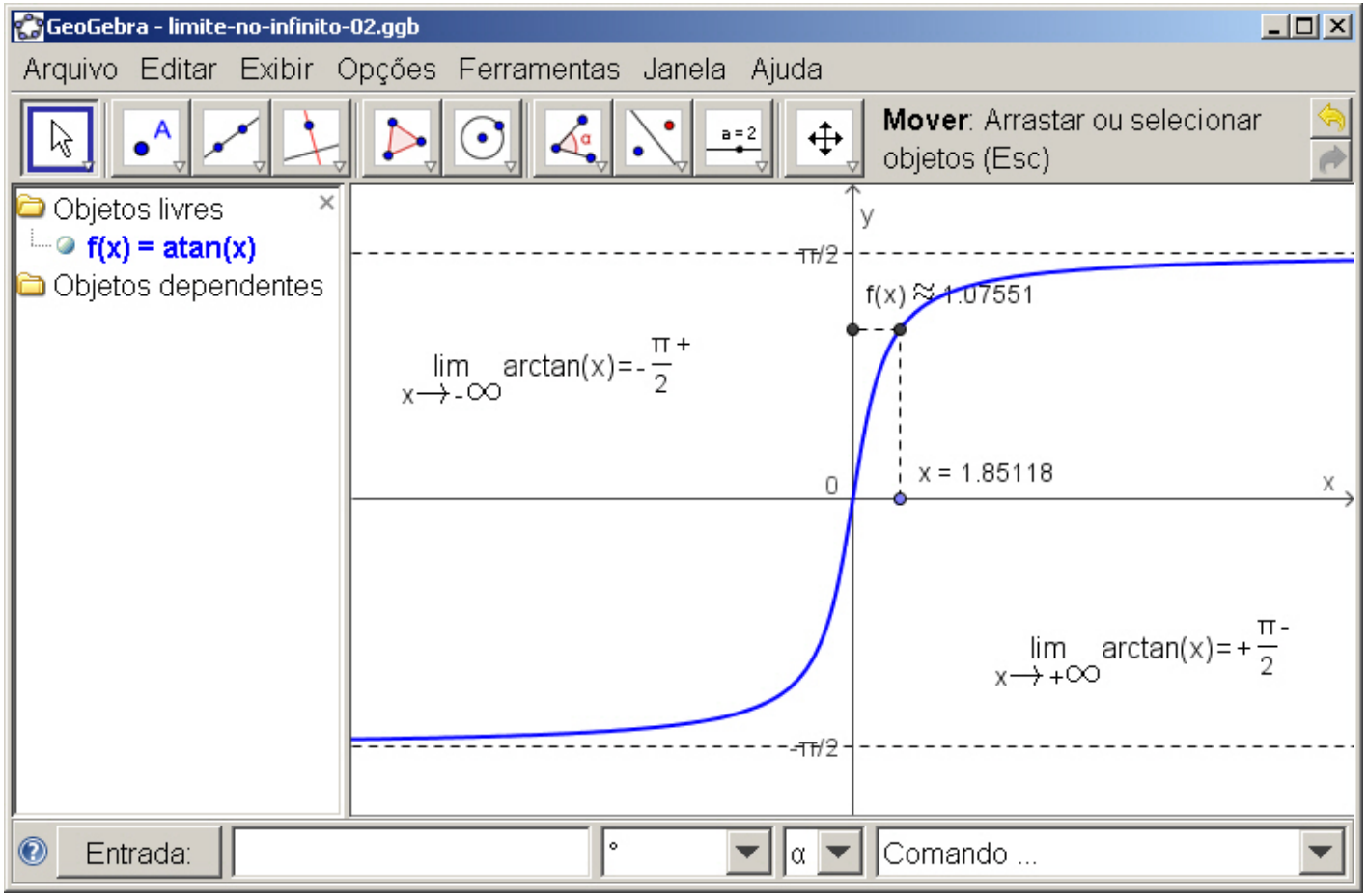
Exemplo

$y = +\frac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal de $y = \arctan(x)$, pois $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}^{-}$.



Exemplo

$y = -\dfrac{\pi}{2}$ é uma assíntota horizontal de $y = \arctan(x)$, pois $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}^{+}$.



Exemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} \quad =$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}^{-}.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3\,x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5\,x^2 + 4\,x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}^{-}.$$

Note que, para x suficientemente grande,

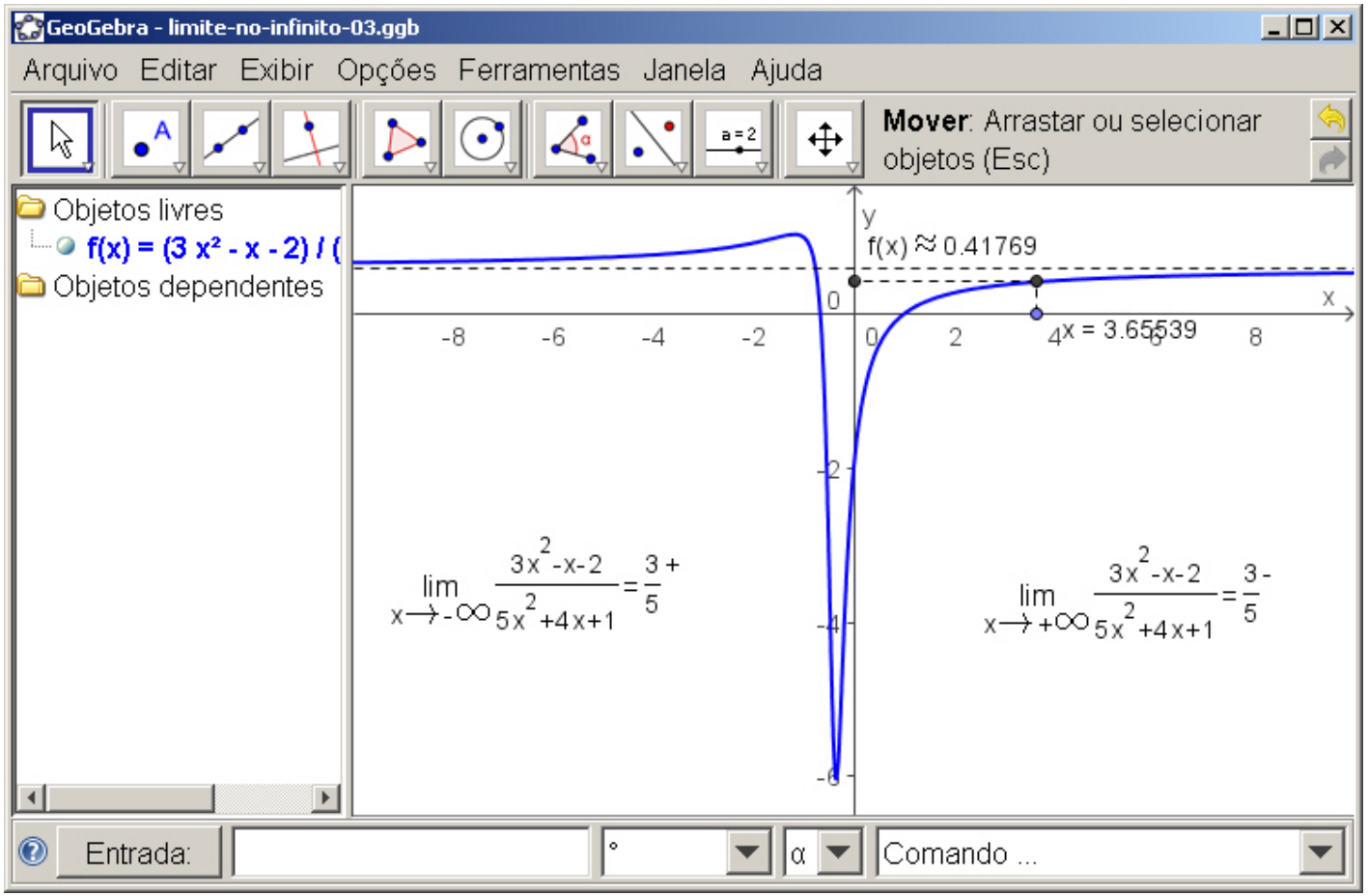
$$3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} < 3 \qquad \text{e} \qquad 5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} > 5,$$

logo

$$\frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}} < \frac{3}{5}.$$

Exemplo

$y = \dfrac{3}{5}$ é uma assíntota horizontal de $y = \dfrac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1}$, pois $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3\,x^2 - x - 2}{5\,x^2 + 4\,x + 1} = \frac{3}{5}^{-}$.



Exemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5} \quad =$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x}}{\dfrac{3\,x-5}{x}}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x}}{\dfrac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Logo, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é uma assíntota horizontal de $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5}$.

Exemplo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2 + 1}}{3\,x - 5} \quad =$$

Exemplo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Exemplo

$(*)$ pois $\sqrt{x^2} = -x$ para $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3\,x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x}}{\frac{3\,x-5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}^{+}.$$

Logo, $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ é uma assíntota horizontal de $y = f(x) = \frac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5}$.

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x < 0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9\,(2\,x^2+1)}{x^2} < \frac{2\,(3\,x-5)^2}{x^2} \text{ e } x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9\,(2\,x^2+1)}{x^2} < \frac{2\,(3\,x-5)^2}{x^2} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 18\,x^2+9 < 18\,x^2-60\,x+50 \text{ e } x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9\,(2\,x^2+1)}{x^2} < \frac{2\,(3\,x-5)^2}{x^2} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 18\,x^2+9 < 18\,x^2-60\,x+50 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{41}{60} \text{ e } \; x<0$$

Exemplo

$$\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} > \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3-\frac{5}{x}\right) \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+\frac{1}{x^2} < \frac{2}{9}\left(3-\frac{5}{x}\right)^2 \text{ e } x<0$$

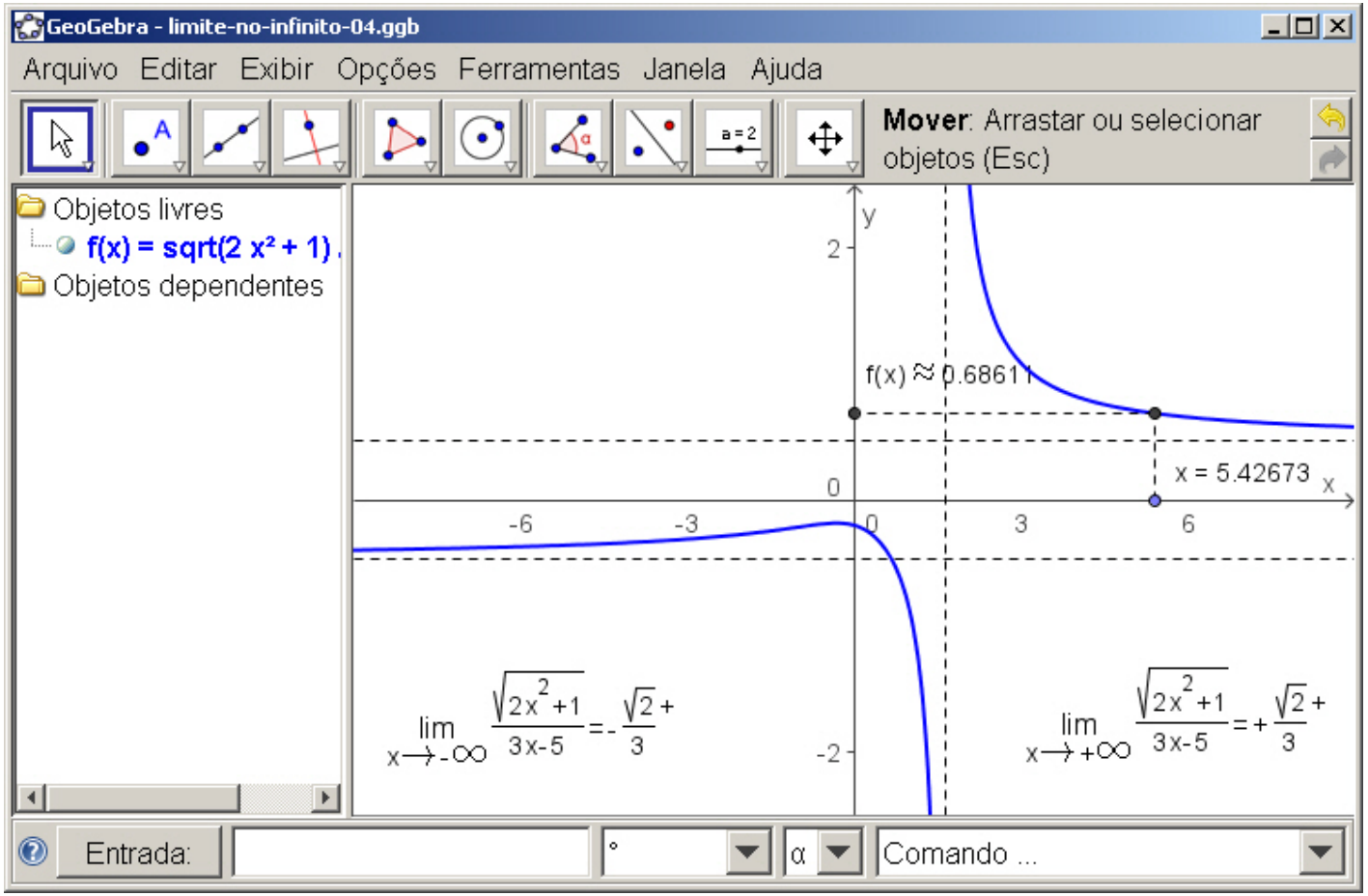
$$\Leftrightarrow \quad \frac{9\,(2\,x^2+1)}{x^2} < \frac{2\,(3\,x-5)^2}{x^2} \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad 18\,x^2+9 < 18\,x^2-60\,x+50 \text{ e } x<0$$

$$\Leftrightarrow \quad x<\frac{41}{60} \text{ e } \; x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<0.$$

Exemplo

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = +\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ são as assíntotas horizontais de $y = \dfrac{\sqrt{2\,x^2+1}}{3\,x-5}$.



Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito:

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \text{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \leq \text{sen}(x) \leq +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty}(1/x) = 0$

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \text{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \leq \text{sen}(x) \leq +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty}(1/x) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \text{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \leq \text{sen}(x) \leq +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{x}\right] = 0.$$

Como f é uma função par, segue-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \text{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \leq \text{sen}(x) \leq +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{x}\right] = 0.$$

Como f é uma função par, segue-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Assim, $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

Exemplo

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função $y = f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

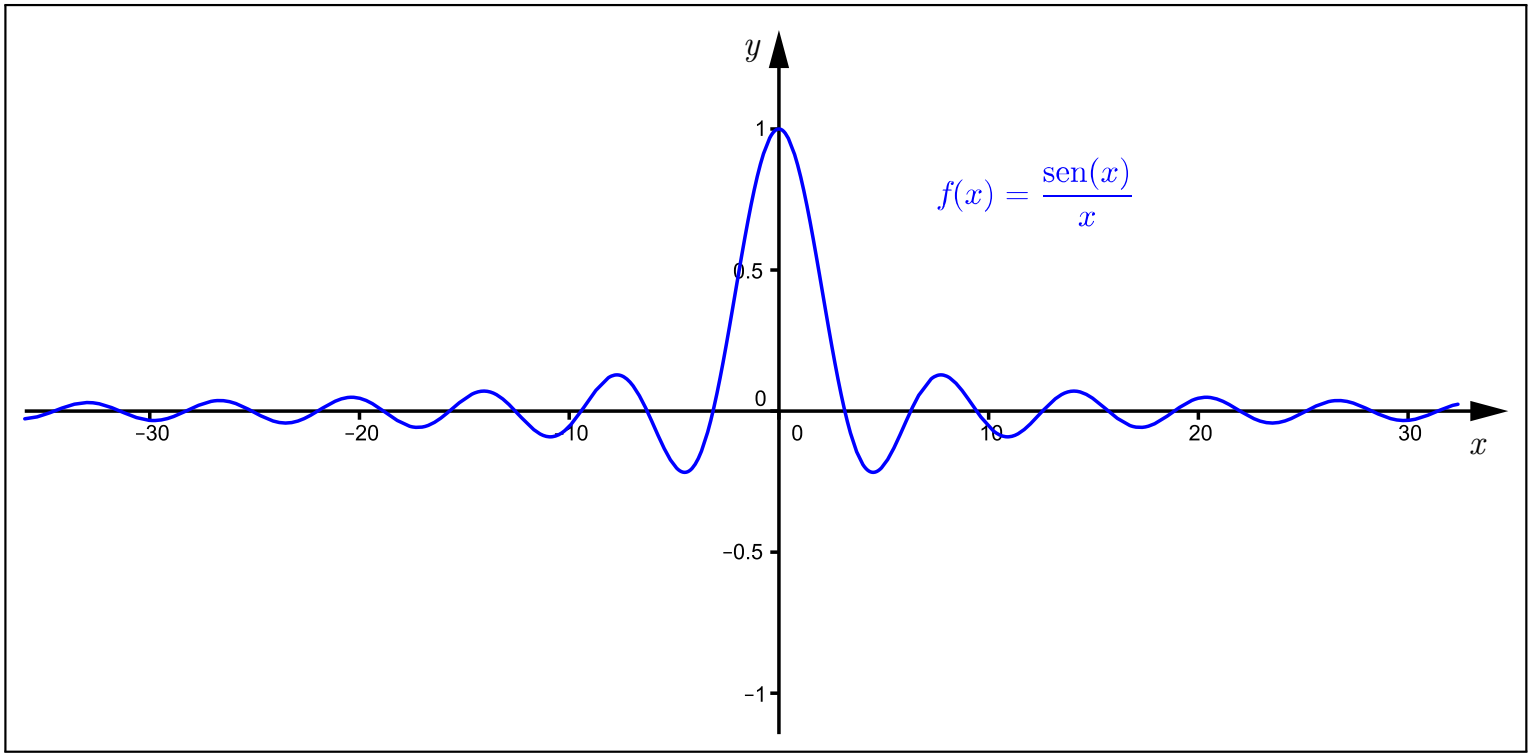
Solução. Podemos usar o Teorema do Anulamento mesmo para limites no infinito: como $y = \text{sen}(x)$ é uma função limitada (pois $-1 \leq \text{sen}(x) \leq +1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{x}\right] = 0.$$

Como f é uma função par, segue-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Assim, $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Observe que o gráfico de f e a assíntota $y = 0$ se interceptam um número infinito de vezes.

Exemplo

A assíntota horizontal $y = 0$ e o gráfico de $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ se interceptam infinitas vezes!



Exemplo

Calcule $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x).$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}
\end{aligned}$$

Exemplo

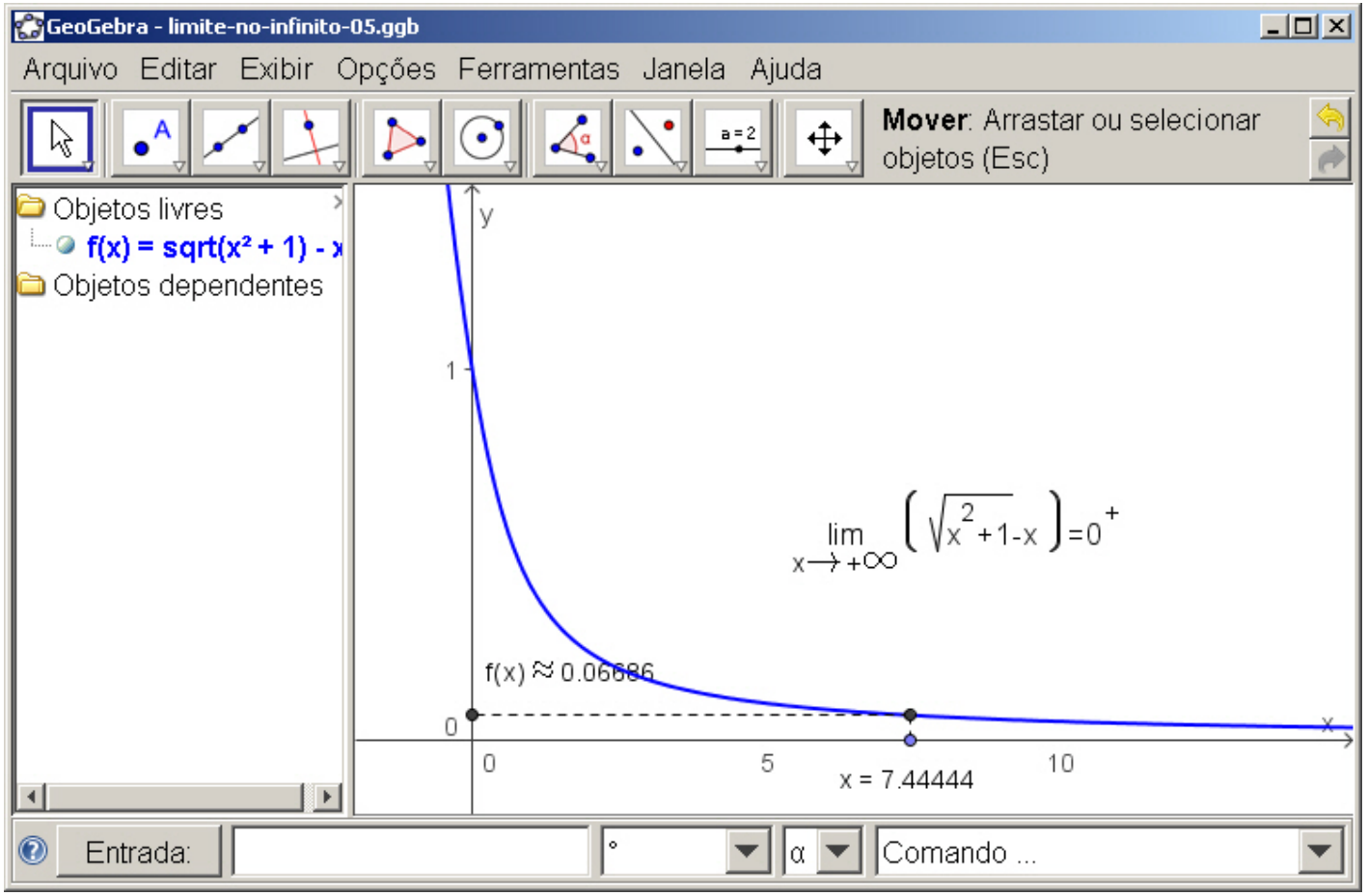
$$\text{Calcule } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= 0^+.
\end{aligned}$$

Exemplo

$y = 0$ é assíntota horizontal de $y = \sqrt{x^2 + 1} - x$.



Exemplo

Encontre $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$.

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$.

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to +\infty} (x^2 - x).$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot (x - 1)$$

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x)$.

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot (x - 1) = +\infty,$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to +\infty} (x^2 - x).$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot (x - 1) = +\infty,$$

pois $x \to +\infty$ e $x - 1 \to +\infty$.

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}.$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x}.$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+x}{x}}{\dfrac{3-x}{x}}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x}.$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+x}{x}}{\dfrac{3-x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\dfrac{3}{x}-1}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x}.$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+x}{x}}{\dfrac{3-x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\dfrac{3}{x}-1} = -\infty,$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x}.$$

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2+x}{x}}{\dfrac{3-x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\dfrac{3}{x}-1} = -\infty,$$

pois $x+1 \to +\infty$ e $3/x - 1 \to -1$ quando $x \to +\infty$.

Problemas de organização e erros frequentes

Problemas de organização e erros frequentes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \frac{\overset{3}{3 \cdot 1} - \overset{0^+}{\frac{1}{x}} - \overset{0^+}{\frac{2}{x^2}}}{\underbrace{\underset{5}{5 \cdot 1} + \underset{0^+}{\frac{4}{x}} + \underset{0^+}{\frac{1}{x^2}}}_{\to 5^+}} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3^-}{5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3^-}{5} \quad //$$

Problemas de organização e erros frequentes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\frac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \frac{\overset{3}{(3 \cdot 1)} - \overset{0^+}{\left(\frac{1}{x}\right)} - \overset{0^+}{\left(\frac{2}{x^2}\right)}}{\underbrace{\underset{5}{(5 \cdot 1)} + \underset{0^+}{\left(\frac{4}{x}\right)} + \underset{0^+}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}_{\to 5^+}} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3^-}{5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3^-}{5} \quad //$$

Problemas de organização e erros frequentes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{3}{3\cdot 1} - \overset{0^+}{\frac{1}{x}} - \overset{0^+}{\frac{2}{x^2}}}{\underbrace{\underset{5}{5\cdot 1} + \underset{0^+}{\frac{4}{x}} + \underset{0^+}{\frac{1}{x^2}}}_{\to 5^+}} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3^-}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3^-}{5} \quad //$$

Problemas de organização e erros frequentes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3^-}{5}$$

Alinhar!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3^-}{5}$$