Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 10

Versão 0.9

Continuidade

Pontos interiores

Definição

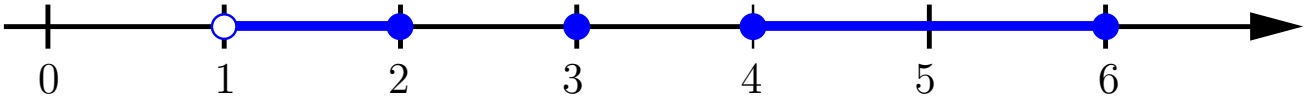
Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$

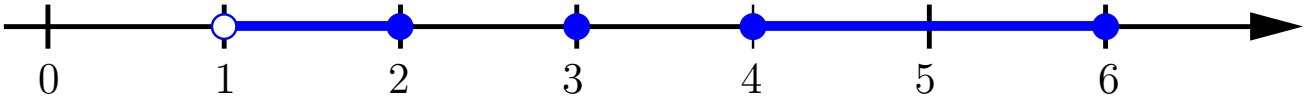


Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



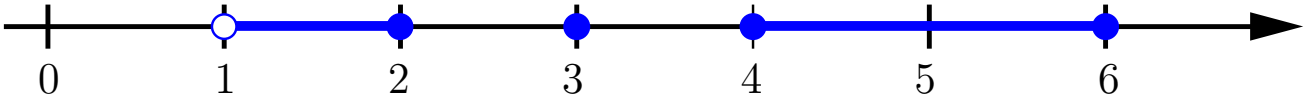
$p = 1.5$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



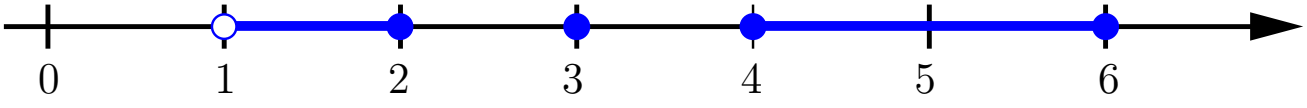
$$p = 1.00001$$

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



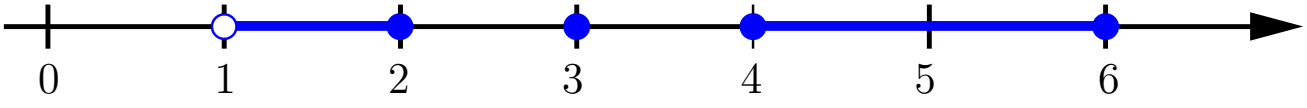
$p = 1.00001$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



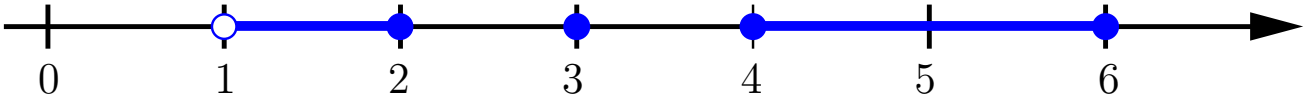
$$p = 1$$

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



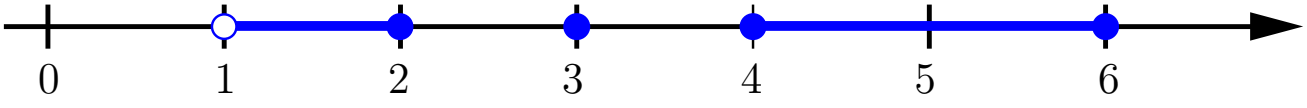
$p = 1$ não é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



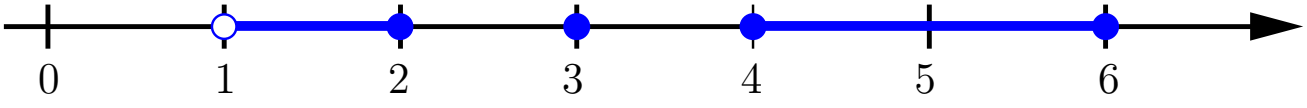
$$p = 2$$

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



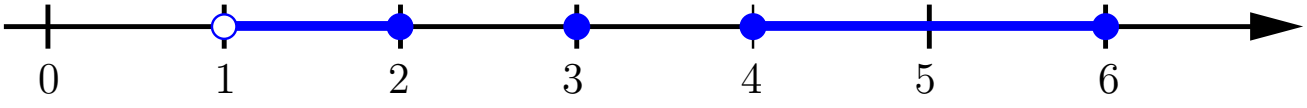
$p = 2$ não é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



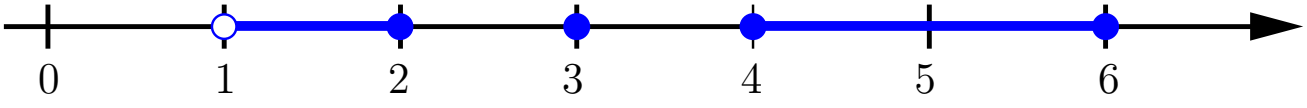
$p = 1.9999999999999999$

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



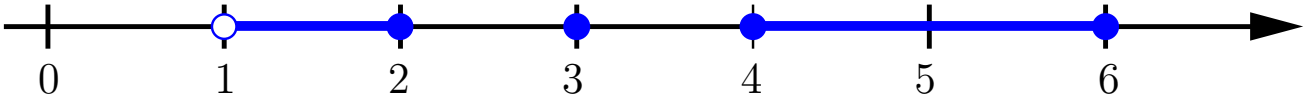
$p = 1.9999999999999999$ é um ponto interior de D.

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



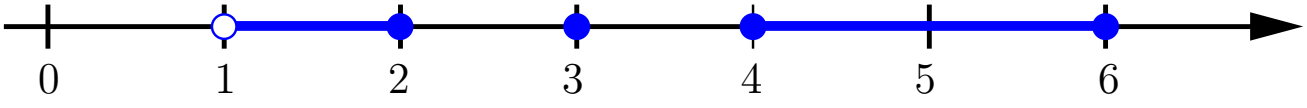
$$p = 3$$

Pontos interiores

Definição

Dizemos p é um ponto do interior de um conjunto D, se existe pelo menos um intervalo aberto I contendo p tal que $I \subseteq D$.

$$D = (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 6]$$



$p = 3$ não é um ponto interior de D.

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. Neste caso, dizemos que f é contínua no ponto p se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p).$$

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. Neste caso, dizemos que f é contínua no ponto p se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p).$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim!

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$.

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x^2+1}$$

Exemplo

$$\text{A função } y = f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1} \text{ é contínua em } p = 1?$$

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2$$

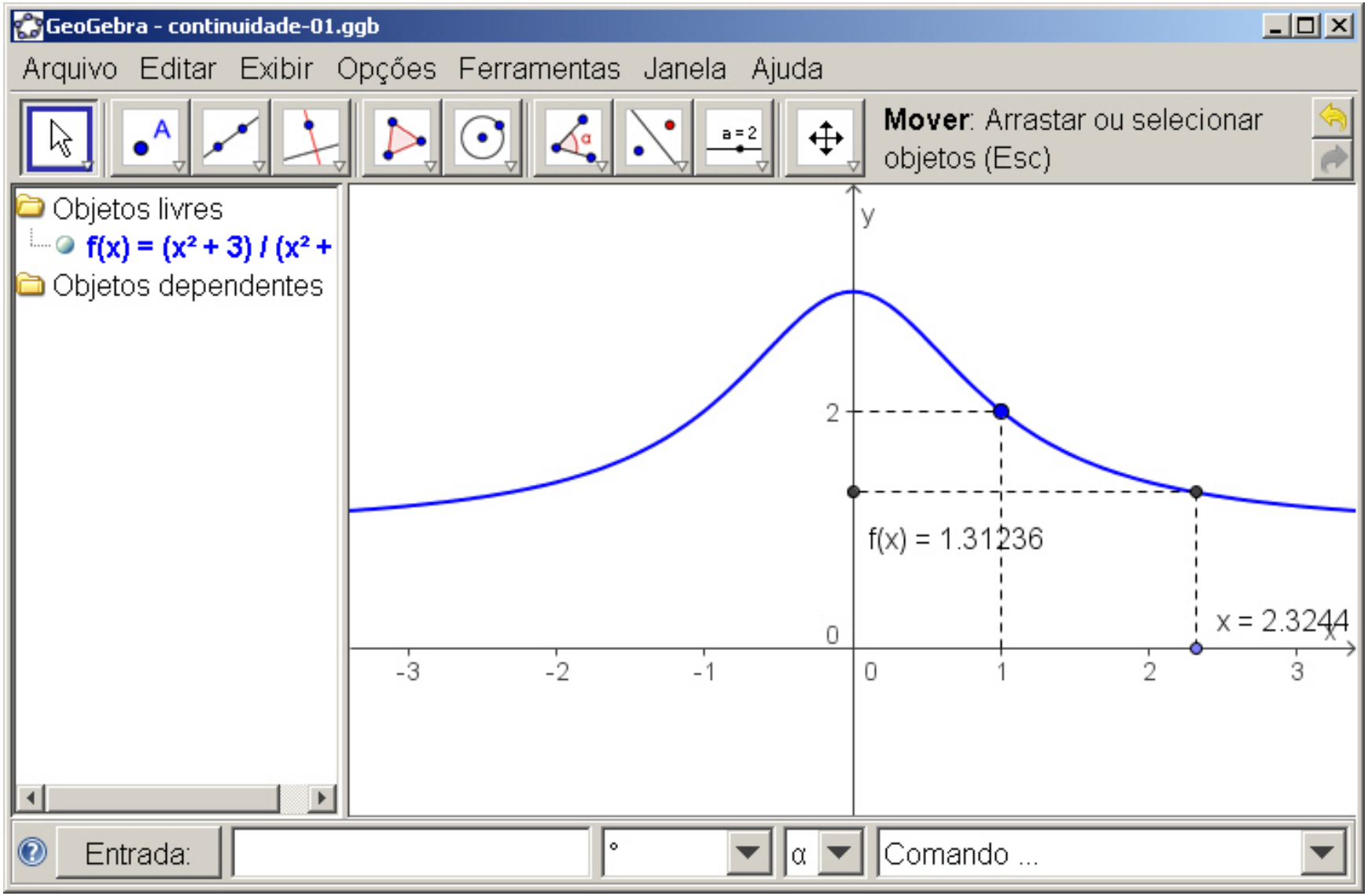
Exemplo

A função $y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Sim! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2 = f(1) = f(p).$$

Exemplo


GeoGebra - continuidade-01.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)
Objetos livres
f(x) = (x² + 3) / (x² +
Objetos dependentes
y
2
0
f(x) = 1.31236
x = 2.3244
x
-3
-2
-1
0
1
2
3
Entrada:
Comando ...

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não!

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$.

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq 3$$

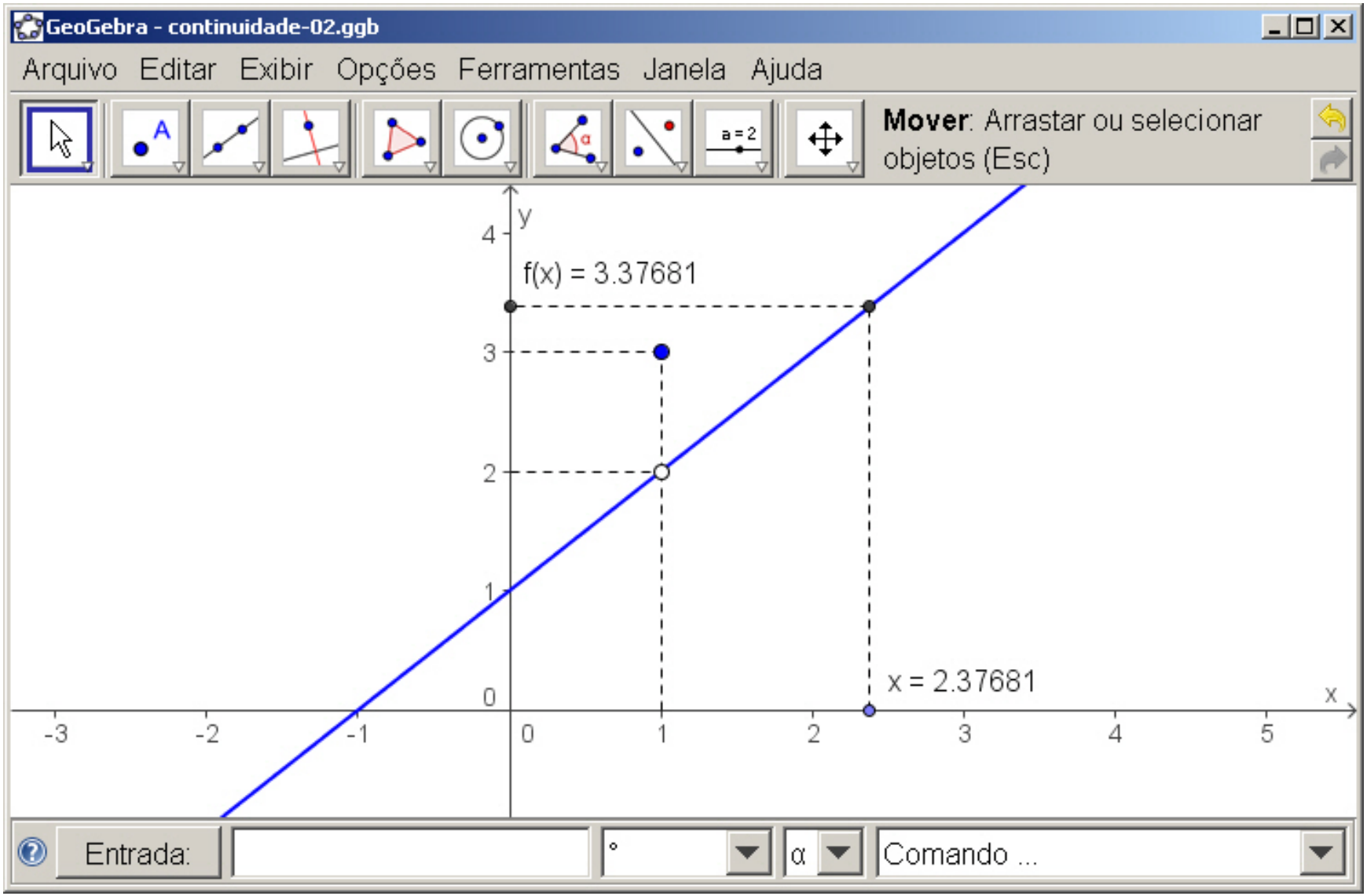
Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases}$ é contínua em $p = 1$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = 1$ é um ponto interior de D, mas

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq 3 = f(1).$$

Exemplo


GeoGebra - continuidade-02.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)
f(x) = 3.37681
x = 2.37681
Entrada:
Comando ...

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não!

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$.

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x \to \pi} f(x)$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{|x-\pi|}{x-\pi}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{-(x-\pi)}{x-\pi}$$

Exemplo

A função $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}, & \text{se } x \neq \pi, \\ 2, & \text{se } x = \pi, \end{cases}$ é contínua em $p = \pi$?

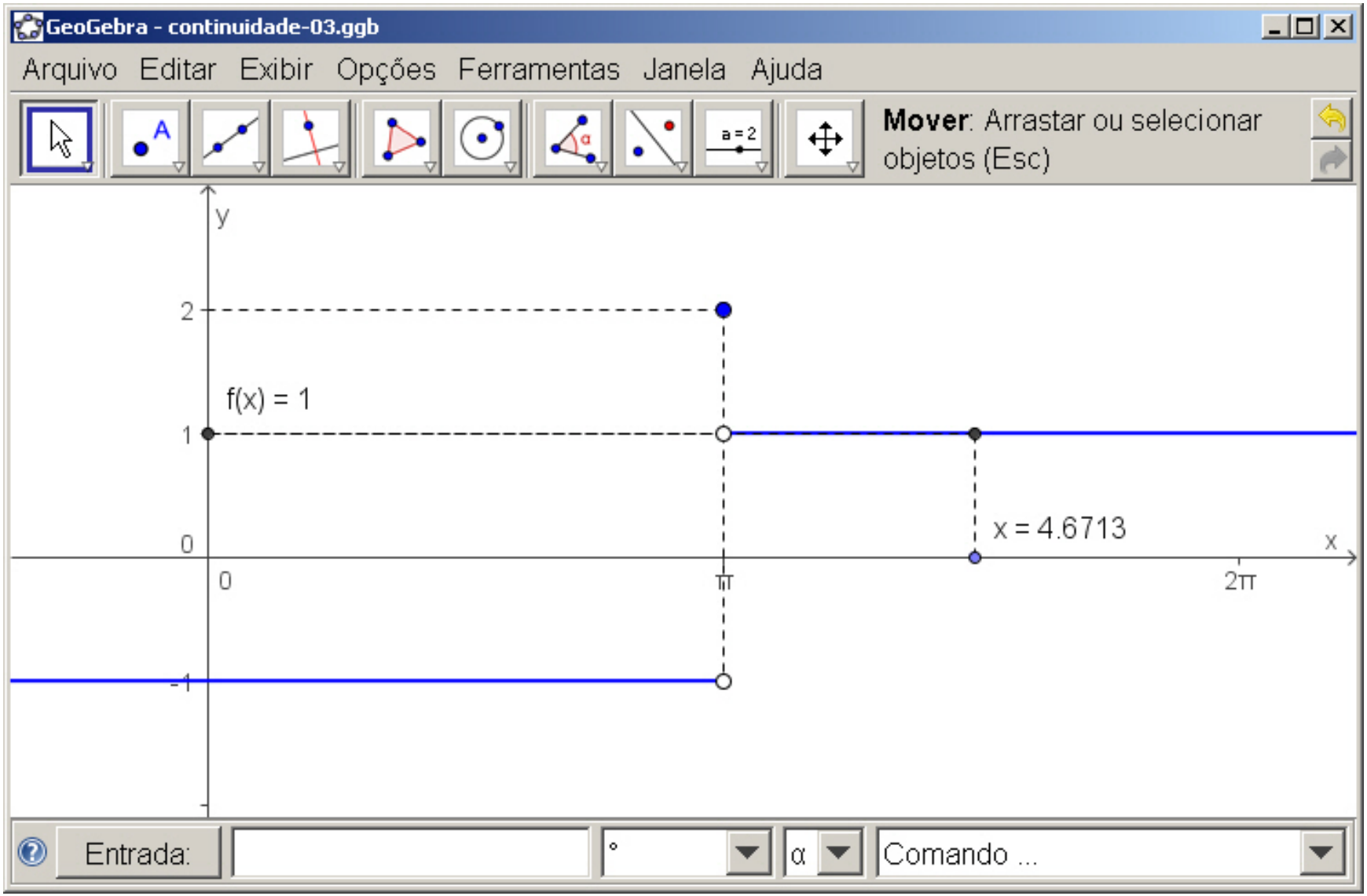
Solução. Não! O domínio natural de f é $D = \mathbb{R}$. O ponto $p = \pi$ é um ponto interior de D, mas não existe $\lim_{x\to\pi} f(x)$, pois

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x-\pi}{x-\pi} = +1,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{|x-\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{-(x-\pi)}{x-\pi} = -1.$$

Exemplo


GeoGebra - continuidade-03.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)
y
2
1
0
-1
f(x) = 1
x = 4.6713
x
0
π
2π
Entrada:
Comando ...

Continuidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

(3) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

(3) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidade em intervalos

Definição

(1) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma (a, b) (incluindo os casos em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$.

(2) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b)$ (incluindo o caso em que $b = +\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

(3) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $(a, b]$ (incluindo o caso em que $a = -\infty$) se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

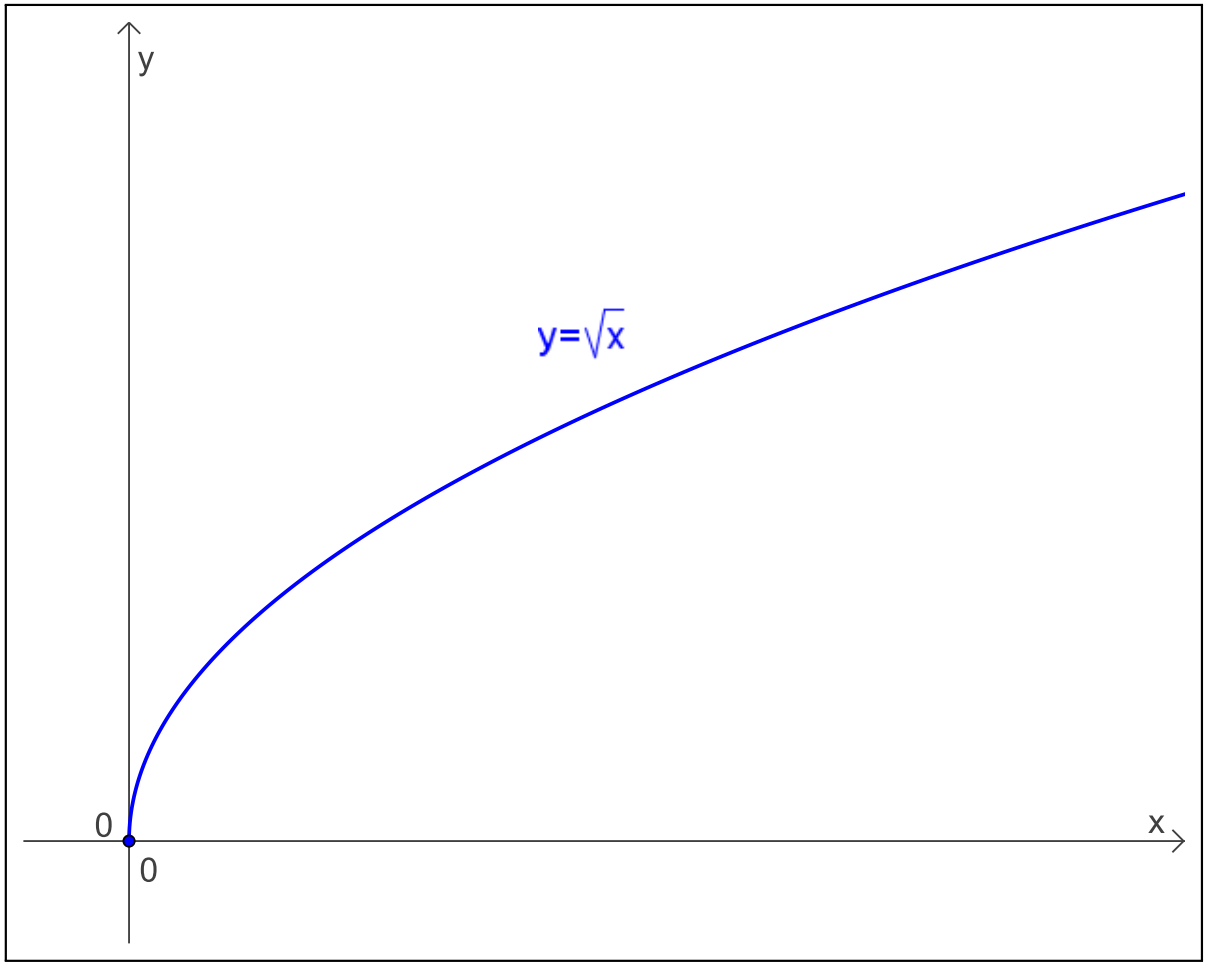
Definição

(4) Dizemos que f é contínua em um intervalo da forma $[a, b]$ se f é contínua em cada ponto $p \in (a, b)$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

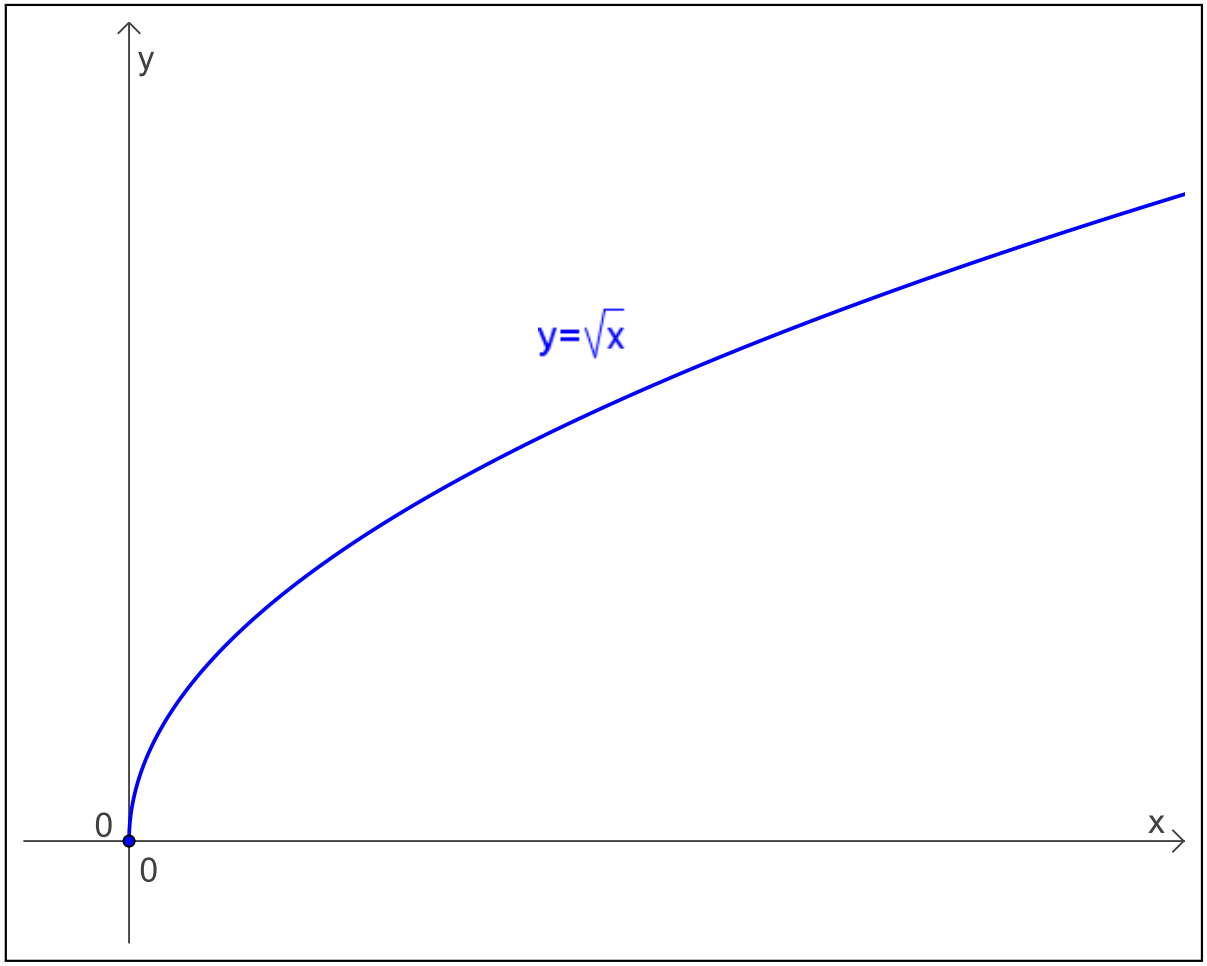
Exemplo

A função $y = \sqrt{x}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$



Exemplo

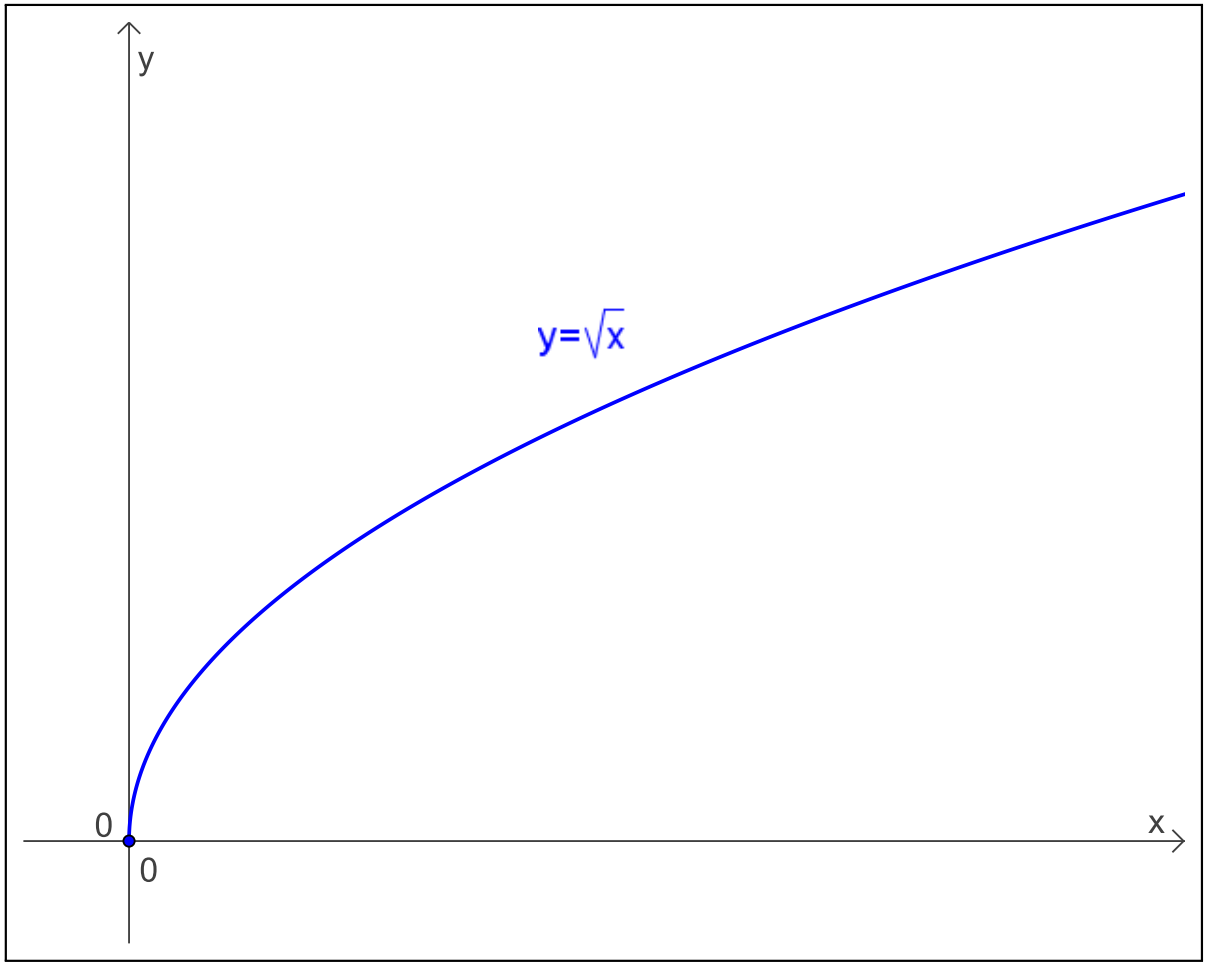
A função $y = \sqrt{x}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$, pois para todo $p > 0$, $\lim_{x \to p} \sqrt{x} = \sqrt{p}$



Exemplo

A função $y = \sqrt{x}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$, pois

para todo $p > 0$, $\lim_{x \to p} \sqrt{x} = \sqrt{p}$ e $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0}$.



Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f+g, \qquad f-g \qquad \text{e} \qquad f\cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f+g, \qquad f-g \qquad \text{e} \qquad f\cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f+g, \qquad f-g \qquad \text{e} \qquad f\cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f+g, \qquad f-g \qquad \text{e} \qquad f\cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Teorema

(1) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p. Então

$$f+g, \qquad f-g \qquad \text{e} \qquad f\cdot g$$

também são funções contínuas em p.

(2) Sejam f e g duas funções contínuas no ponto p, com $g(p) \neq 0$. Então f/g também é uma função contínua em p.

(3) Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em p e f é contínua em $g(p)$. Então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.

Em outras palavras, soma, diferença, produto, composição e divisão de funções contínuas são funções contínuas (onde, no caso da divisão, estamos considerando pontos onde o denominador é diferente de zero).

Exemplo

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{|x-1|+5}{x^2+1}}$$ é uma função contínua

Exemplo

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{|x-1|+5}{x^2+1}}$$ é uma função contínua

como soma, diferença, produto, divisão e composição de funções contínuas.

Teorema

Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e g é uma função contínua em L, então

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to p} f(x)\right) = g(L).$$

Exemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4\,x^2 + 1}{x^2 + 5}}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \quad = \quad \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}}$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4\,x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2+5}{x^2}}}$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{4\,x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}}$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{4\,x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}} = \sqrt{\frac{4+0}{1+0}}$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4\,x^2+1}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{4\,x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}} = \sqrt{\frac{4+0}{1+0}}$$

$$= \sqrt{4} = 2.$$

(*) pois $y = g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua.

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções trigonométricas

Teorema

As funções trigonométricas são contínuas. Mais precisamente, se p é um ponto no domínio natural da função trigonométrica, então

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(p), \qquad \lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p),$$

$$\lim_{x\to p} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}(p),$$

$$\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p), \qquad \lim_{x\to p} \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(p).$$

Continuidade das funções elementares

Teorema

Também são contínuas as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas.

Exemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2 + 1}{x^2 + 5}\right)$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \quad = \quad \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right)$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right)$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\pi\, x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\pi\, x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

$$= \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}\right)$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\pi\, x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

$$= \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi+0}{1+0}\right)$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) \overset{(*)}{=} \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi\, x^2+1}{x^2+5}\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\pi\, x^2+1}{x^2}}{\dfrac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

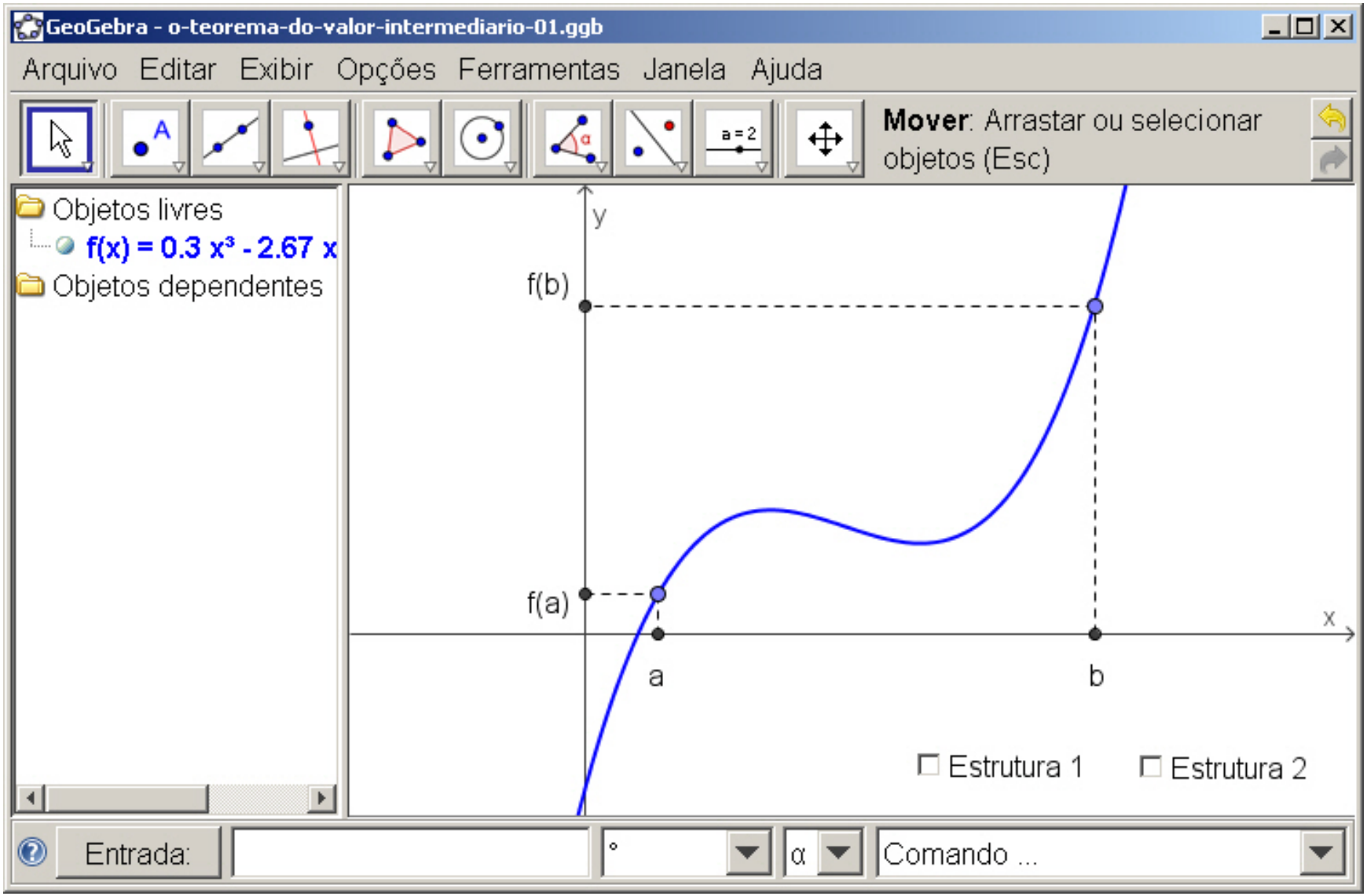
$$= \cos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x^2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi+0}{1+0}\right)$$

$$= \cos(\pi) = -1.$$

(*) pois $y = g(x) = \cos(x)$ é uma função contínua.

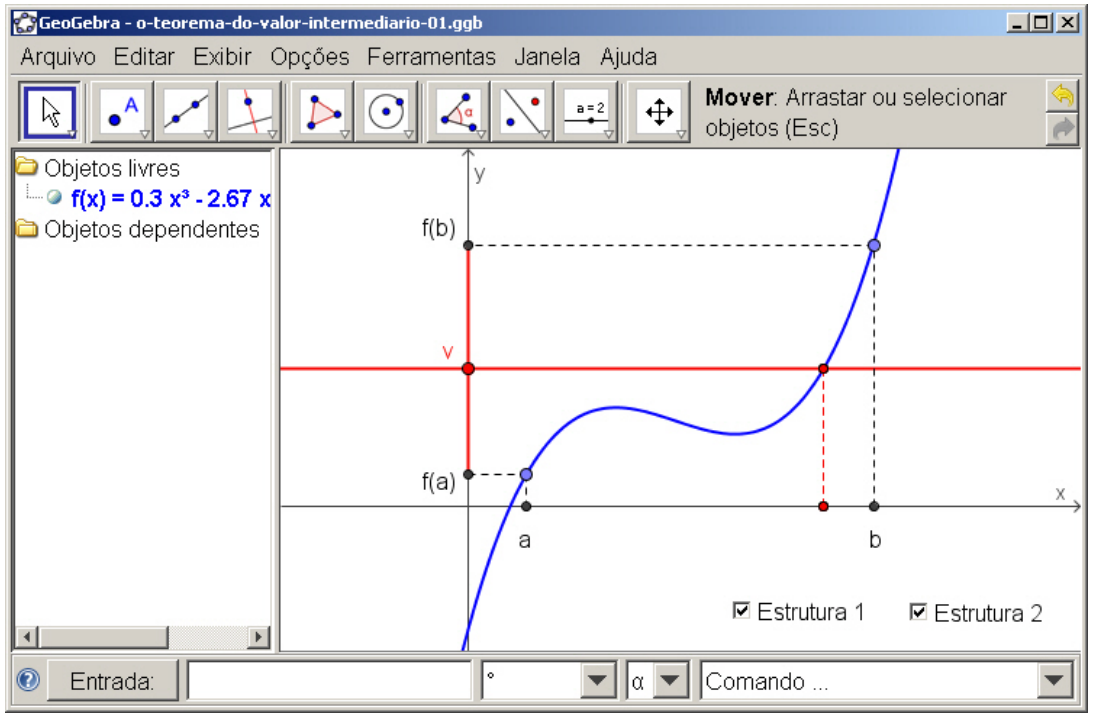
O teorema do valor intermediário

O Teorema do Valor Intermediário



Teorema

Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja v um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = v$.



Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução.

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas.

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas. Agora,

$$f(1) = 4\,(1)^3 - 6\,(1)^2 + 3\,(1) - 2 = -1 < 0$$

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas. Agora,

$$f(1) = 4\,(1)^3 - 6\,(1)^2 + 3\,(1) - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 4\,(2)^3 - 6\,(2)^2 + 3\,(2) - 2 = 12 > 0.$$

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas. Agora,

$$f(1) = 4\,(1)^3 - 6\,(1)^2 + 3\,(1) - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 4\,(2)^3 - 6\,(2)^2 + 3\,(2) - 2 = 12 > 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$

Exemplo

Mostre que existe uma raiz da equação $4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2 = 0$ entre 1 e 2.

Solução. A função $y = f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 3\,x - 2$ é contínua no intervalo $[1, 2]$ como soma, diferença e multiplicação de funções contínuas. Agora,

$$f(1) = 4\,(1)^3 - 6\,(1)^2 + 3\,(1) - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 4\,(2)^3 - 6\,(2)^2 + 3\,(2) - 2 = 12 > 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, isto é, existe $c \in (1, 2)$ tal que

$$4\,c^3 - 6\,c^2 + 3\,c - 2 = 0.$$

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000		-1.00000	12.00000	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000		$-$ 1.00000	2.50000	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000		$-$ 1.00000	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000		$-$ 0.52343	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	$-$ 0.52343	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	$-$ 0.52343	0.18750	$-$ 0.20019

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	$-$ 0.52343	0.18750	$-$ 0.20019
1.18750	1.25000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000		– 0.20019	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	$-$ 0.52343	0.18750	$-$ 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	$-$ 0.20019	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000		– 0.01477	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437		– 0.01477	0.08421	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656		– 0.01477	0.03418	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265		– 0.01477	0.00957	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	– 0.00262

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	– 0.00262
1.22070	1.22265				

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	– 0.00262
1.22070	1.22265		– 0.01477	0.00957	

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	$-$ 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	$-$ 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	$-$ 1.00000	0.18750	$-$ 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	$-$ 0.52343	0.18750	$-$ 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	$-$ 0.20019	0.18750	$-$ 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	$-$ 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	$-$ 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	$-$ 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	$-$ 0.01477	0.00957	$-$ 0.00262
1.22070	1.22265		$-$ 0.01477	0.00957	

Raiz exata: $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2}$

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	– 0.00262
1.22070	1.22265		– 0.01477	0.00957	

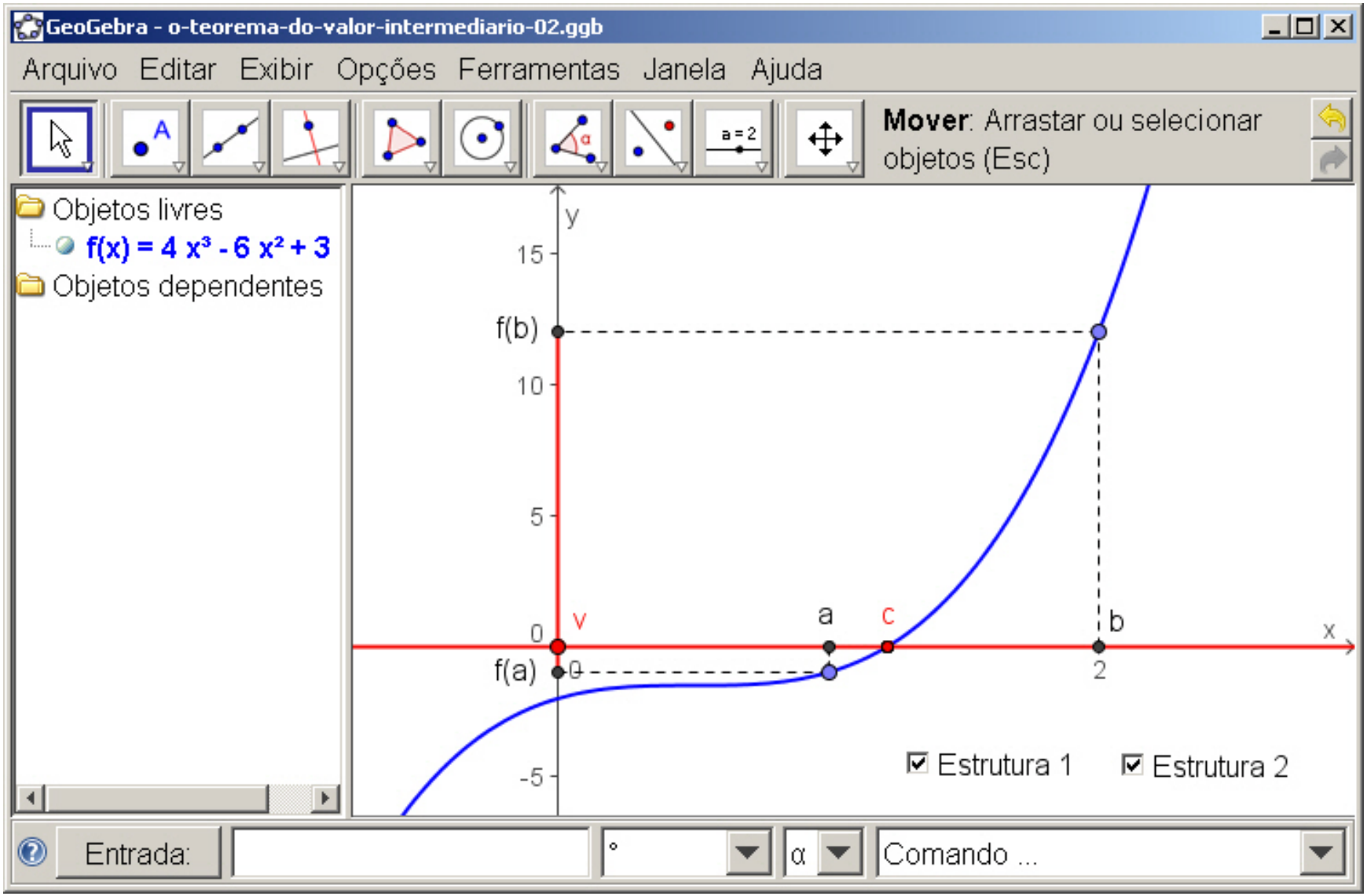
Raiz exata: $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2} = 1.22112478\ldots$

Como calcular a raiz? Use o método da bisseção!

a	b	$m = \dfrac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$
1.00000	2.00000	1.50000	– 1.00000	12.00000	2.50000
1.00000	1.50000	1.25000	– 1.00000	2.50000	0.18750
1.00000	1.25000	1.12500	– 1.00000	0.18750	– 0.52343
1.12500	1.25000	1.18750	– 0.52343	0.18750	– 0.20019
1.18750	1.25000	1.21875	– 0.20019	0.18750	– 0.01477
1.21875	1.25000	1.23437	– 0.01477	0.18750	0.08421
1.21875	1.23437	1.22656	– 0.01477	0.08421	0.03418
1.21875	1.22656	1.22265	– 0.01477	0.03418	0.00957
1.21875	1.22265	1.22070	– 0.01477	0.00957	– 0.00262
1.22070	1.22265		– 0.01477	0.00957	

Raiz exata: $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2} = 1.22112478\ldots$ (fórmula de Cardano).

Exemplo


GeoGebra - o-teorema-do-valor-intermediario-02.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Mover: Arrastar ou selecionar objetos (Esc)
Objetos livres
f(x) = 4 x³ - 6 x² + 3
Objetos dependentes
y
15
f(b)
10
5
0
V
a
c
b
x
f(a)
0
2
-5
Estrutura 1
Estrutura 2
Entrada:
Comando ...

Cuidado: a hipótese de continuidade é importante!