Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 12

Versão 0.9

Na Última Aula

Definição

Seja p um ponto do interior do domínio D de uma função f. A derivada de f no ponto p, denotada por

$$f'(p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx}(p)$$

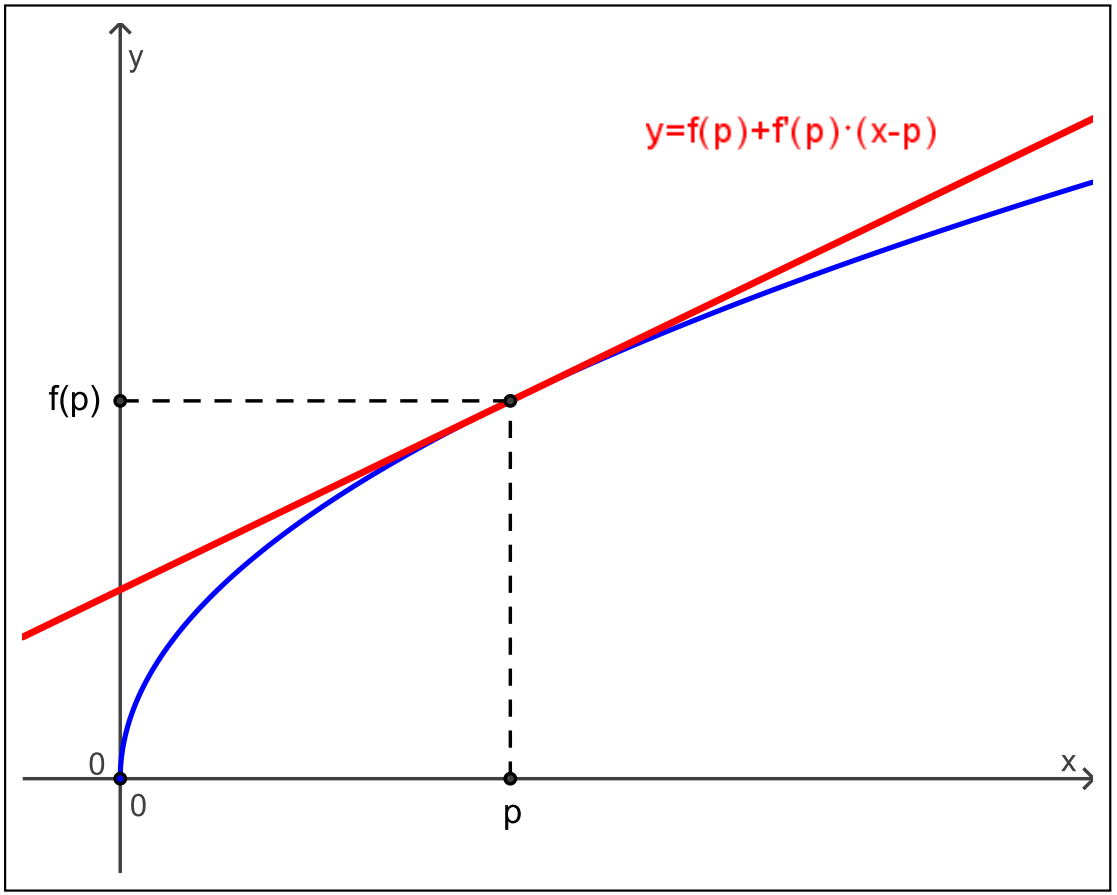
é o limite

$$f'(p) = \frac{df}{dx}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

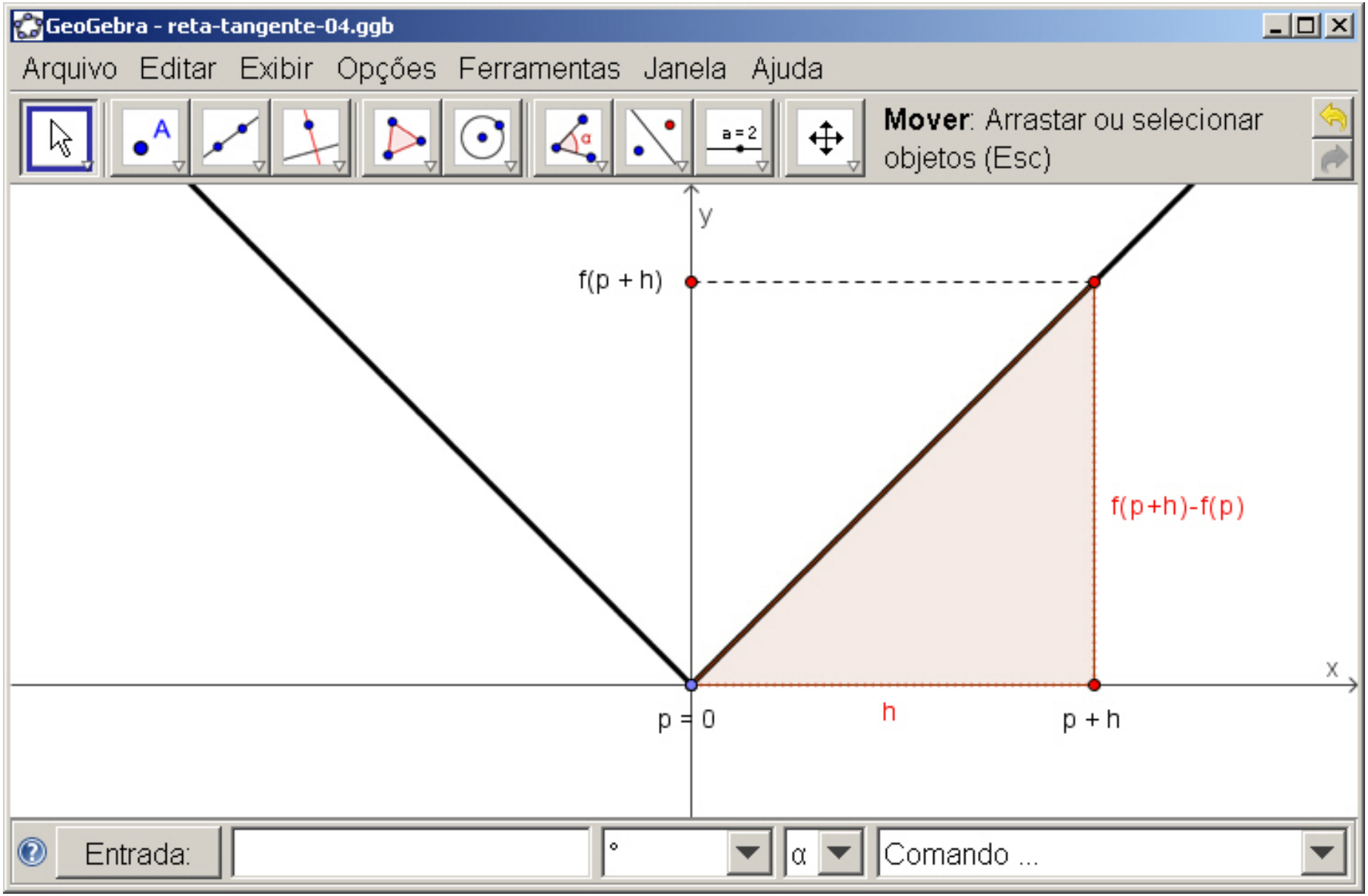
caso ele exista. Neste caso, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) no ponto p.

A equação da reta tangente

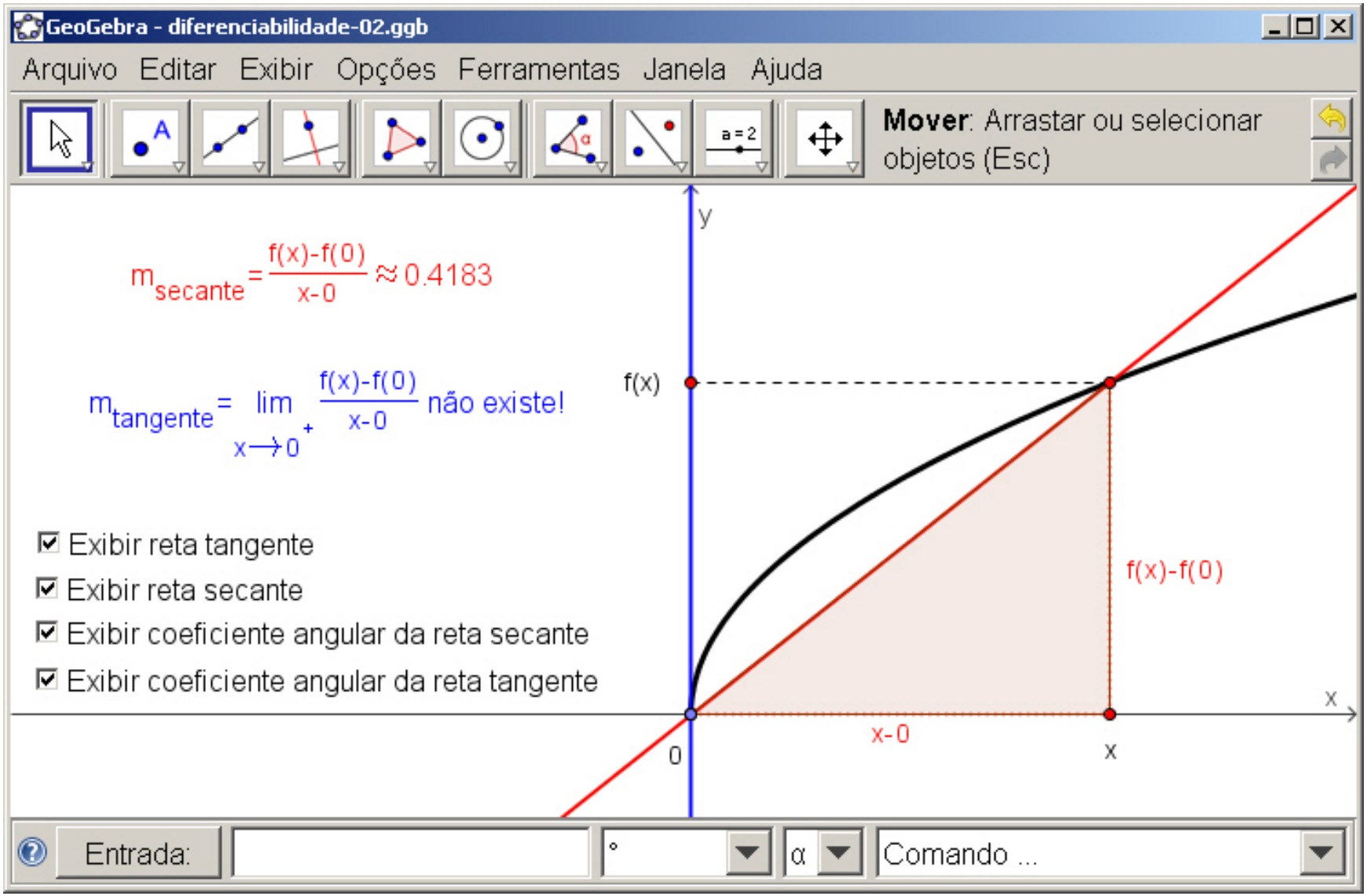
Se f é derivável no ponto p, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$.



A função $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$!



$y = f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $p = 0$



Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova.

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\lim_{x \to p} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)]$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\ &= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \end{aligned}$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0
\end{aligned}$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\
&= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\
&= f(p) + f'(p) \cdot 0 \;=\; f(p).
\end{aligned}$$

Diferenciabilidade implica em continuidade

Teorema

Se f é derivável (diferenciável) em p, então f é contínua em p.

Prova. Se f é derivável no ponto p, então existe o limite

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Agora

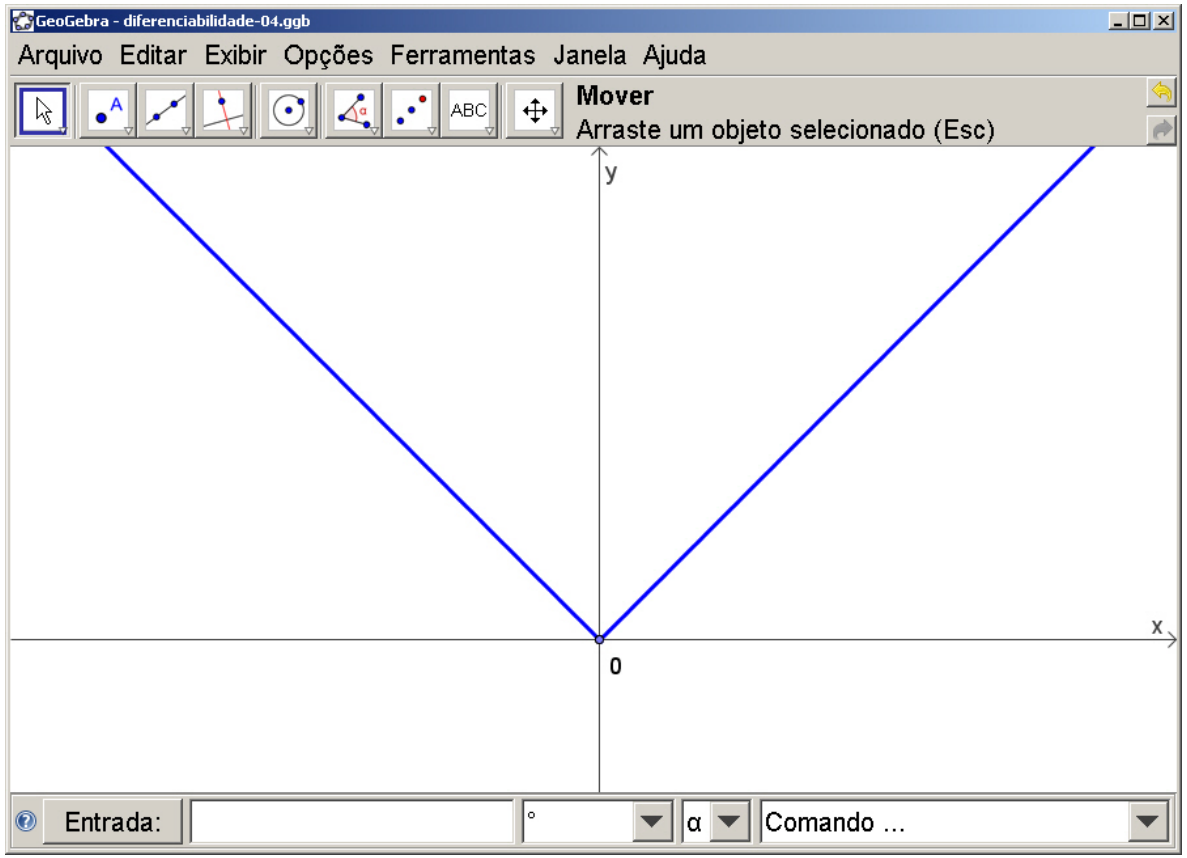
$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} f(x) &= \lim_{x \to p} [f(p) + f(x) - f(p)] \\ &= \lim_{x \to p} \left[f(p) + \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right] \\ &= f(p) + f'(p) \cdot 0 \;=\; f(p). \end{aligned}$$

Logo f é contínua em p.

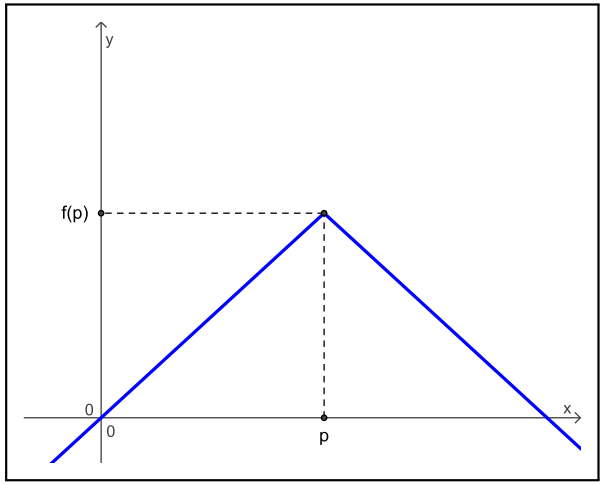
Continuidade não implica em diferenciabilidade

A recíproca do teorema é falsa!

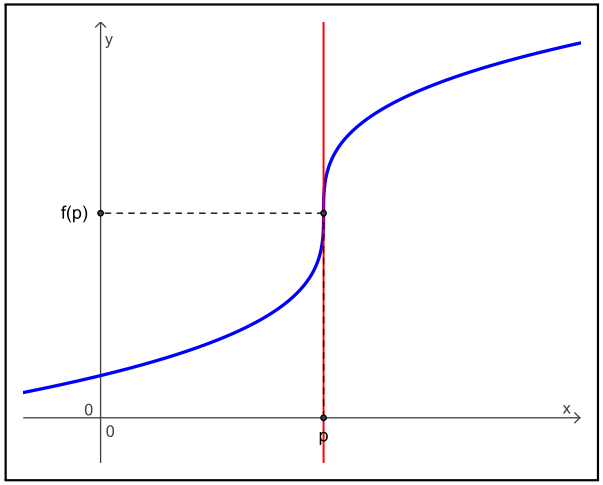
$y = f(x) = |x|$ é contínua em $p = 0$, mas $y = f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.



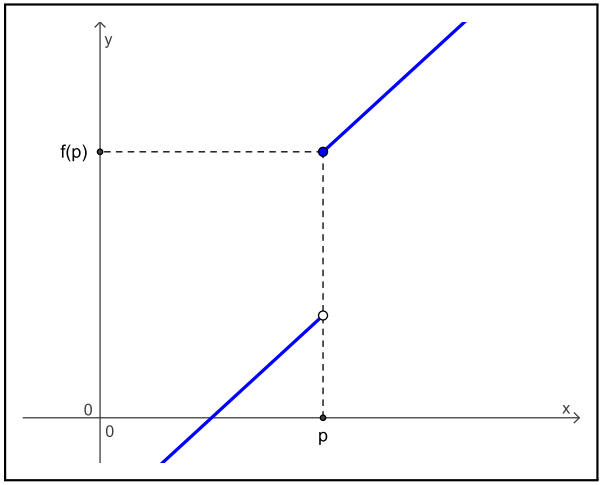
Quando uma função pode deixar de ser derivável?



(bico)



(tangente vertical)



(descontinuidade)

Diferenciação das funções básicas

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)] = c\cdot\frac{df}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{dg}{dx}(x)}{[g(x)]^2}.$$

Regras básicas de derivação

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x), \qquad [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),$$

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x), \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) =$

(b)

(c)

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b)

(c)

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' =$

(c)

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c)

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} =$

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d)

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) =$

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e)

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' =$

Exemplos

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6\,x^5$.

(b) Se $y = x^{1000}$, então $y' = 1000\,x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4\,t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3\,r^2$.

(e) Se $y = u^m$, então $y' = m\,u^{m-1}$.

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right)$

(b)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right)$

(b)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right)$

(b)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x)$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x) = \dfrac{d}{dx}\,[(-1)\,x]$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x) = \dfrac{d}{dx}\,[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x)$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x) = \dfrac{d}{dx}\,[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1)$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(3\,x^4\right) = 3\,\dfrac{d}{dx}\left(x^4\right) = 3\,\left(4\,x^3\right) = 12\,x^3.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\,(-x) = \dfrac{d}{dx}\,[(-1)\,x] = (-1)\,\dfrac{d}{dx}(x) = (-1)\,(+1) = -1.$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\left(x\right) + \frac{d}{dx}\left(5\right)$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\left(x\right) + \frac{d}{dx}\left(5\right)$$

$$\parallel$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^8 + 12\,x^5 - 4\,x^4 + 10\,x^3 - 6\,x + 5\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^8\right) + 12\,\frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\,\frac{d}{dx}\left(x^4\right) + 10\,\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - 6\,\frac{d}{dx}\left(x\right) + \frac{d}{dx}\left(5\right)$$

$$\parallel$$

$$8\,x^7 + 12\,(5\,x^4) - 4\,(4\,x^3) + 10\,(3\,x^2) - 6\,(1) + 0$$

$$\parallel$$

$$8\,x^7 + 60\,x^4 - 16\,x^3 + 30\,x^2 - 6.$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\right)$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\parallel$$

$$1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

Exemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x \cdot \operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\right)$$

$$\parallel$$

$$1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$\parallel$$

$$\operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$h'(x)$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left[x\,g(x)\right]$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$h'(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}\,[x\,g(x)] \quad = \quad \frac{d}{dx}\,(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}\,(g(x))$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x\,g(x)\right] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3)$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x\,g(x)] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3)$

Exemplo

Se $h(x) = x\,g(x)$, com $g(3) = 5$ e $g'(3) = 2$, calcule $h'(3)$.

Solução. Pela regra da derivada do produto, temos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x\,g(x)\right] = \frac{d}{dx}(x)\;g(x) + x\,\frac{d}{dx}(g(x)) \\ &= g(x) + x\,g'(x). \end{aligned}$$

Assim, $h'(3) = g(3) + 3\,g'(3) = 5 + 3\,(2) = 11$.

Exemplo

Se $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$, calcule y'.

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$y'$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)\left(x^3 + 6\right) - \left(x^2 + x - 2\right)\frac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{\left(x^3 + 6\right)^2}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Se } y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}, \text{ calcule } y'.$$

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x - 2\right)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 6\right)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x + 1)\,(x^3 + 6) - (x^2 + x - 2)\,(3\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2\,x^4 + x^3 + 12\,x + 6) - (3\,x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 6}{(x^3 + 6)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(b)

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$

(b)

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2}$

(b)

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b)

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c)

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) =$

Exemplos

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\,x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(c) Se $f(x) = x^{\pi}$, então $f'(x) = \pi\,x^{\pi-1}$.

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$f'(x)$$

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right)$$

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \end{aligned}$$

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Se $f(x) = \text{tg}(x)$, calcule $f'(x)$.

Solução. Pela regra da derivada do quociente, temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\text{tg}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen}(x))\cos(x) - \text{sen}(x)\frac{d}{dx}(\cos(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).
\end{aligned}
$$

Abusos de notação

Notações corretas

Seja $y = f(x)$ uma função derivável.

Notações corretas para a derivada de f no ponto x:

$$f'(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{df}{dx}(x).$$

Abusos de notação

- $y'(x)$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\dfrac{dy}{dx}(x)$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y'

Abusos de notação

- $y'(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{dy}{dx}(x)$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y).
- $\frac{df}{dx}$: omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- $\frac{dy}{dx}$: trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.
- y': trocar o nome da função (no caso, f), pela variável dependente (no caso, y) e omitir o ponto onde a derivada é calculada.

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções diferenciáveis.

Notações correta para a regra do produto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

e

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Abusos de notação para a regra do produto:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Demonstrações

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = c =$ constante, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad = \quad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.

Demonstração. Usando a fórmula para o binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 h^{n-1}\right) \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f + g$ é diferenciável e $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f + g$ é diferenciável e $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

onde, em $(*)$, usamos que o limite da soma é a soma dos limites, se estes existirem. Isto mostra que $f+g$ é diferenciável e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis,
então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} =$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se f e g são funções diferenciáveis, então $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Se f e g são diferenciáveis, então existem os limites

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora, lembrando que funções diferenciáveis são contínuas, segue-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $f \cdot g$ é diferenciável e $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h}
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right]
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right]
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Exercício teórico

Mostre que se $y = f(x) = \text{sen}(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\text{sen}(h)-\text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(h)-\text{sen}(x)}{h} + \frac{\cos(x)\cdot\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen}(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\cdot\frac{\text{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\text{sen}(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \left(\lim_{h\to 0}\cos(x)\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \text{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \;=\; \cos(x).
\end{aligned}$$