

# Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidade Federal Fluminense

Parte 14

Versão 0.9

# Derivadas de ordem superior

# Derivadas de ordem superior

Se  $f$  é uma função diferenciável, então  $f'$  também é uma função, de modo que  $f'$  também pode ter sua própria derivada, denotada por  $(f')' = f''$ .

Se  $f$  é uma função diferenciável, então  $f'$  também é uma função, de modo que  $f'$  também pode ter sua própria derivada, denotada por  $(f')' = f''$ .

A nova função  $f''$  é denominada **derivada segunda** de  $f$ , porque ela é a derivada da derivada de  $f$ .

Se  $f$  é uma função diferenciável, então  $f'$  também é uma função, de modo que  $f'$  também pode ter sua própria derivada, denotada por  $(f')' = f''$ .

A nova função  $f''$  é denominada **derivada segunda** de  $f$ , porque ela é a derivada da derivada de  $f$ .

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx}(x) \right) = \frac{d^2f}{dx^2}(x).$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução.



Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) =$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x))$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x \sin(x))$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x \sin(x)) \\ &= -\sin(x) - \left( \frac{d}{dx}(x) \sin(x) + x \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right) \end{aligned}$$

Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x \sin(x)) \\ &= -\sin(x) - \left( \frac{d}{dx}(x) \sin(x) + x \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right) \\ &= -\sin(x) - (\sin(x) + x \cos(x)) \end{aligned}$$



Se  $y = f(x) = x \cos(x)$ , calcule  $f''(x)$ .

Solução. Usando a regra do produto, temos que a derivada primeira de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cos(x) + x \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \cos(x) - x \sin(x).$$

Para calcular  $f''(x)$ , derivamos mais uma vez:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x \sin(x)) \\ &= -\sin(x) - \left( \frac{d}{dx}(x) \sin(x) + x \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right) \\ &= -\sin(x) - (\sin(x) + x \cos(x)) = -2 \sin(x) - x \cos(x). \end{aligned}$$

Se  $s = s(t)$  representa a **posição** de um objeto que se move em uma linha reta, então sua **velocidade** é dada por

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$$

e sua **aceleração** é dada por

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t).$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução.

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) =$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) =$$



A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

A posição de uma partícula é descrita pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

onde  $t$  é medido em segundos e  $s$  em metros.

Calcule a aceleração da partícula em função do tempo.

Solução. A velocidade da partícula em função do tempo é dada pela derivada primeira da posição com relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

e, portanto, sua aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 6t - 12.$$

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|------|-------------------------------------|
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |
|                   |      |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome     | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|----------|-------------------------------------|
| 0                 | position | –                                   |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome     | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|----------|-------------------------------------|
| 0                 | position | –                                   |
| 1                 | velocity | momentum                            |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |
|                   |          |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome         | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|--------------|-------------------------------------|
| 0                 | position     | –                                   |
| 1                 | velocity     | momentum                            |
| 2                 | acceleration | force                               |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome         | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|--------------|-------------------------------------|
| 0                 | position     | –                                   |
| 1                 | velocity     | momentum                            |
| 2                 | acceleration | force                               |
| 3                 | jerk         | yank                                |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome         | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|--------------|-------------------------------------|
| 0                 | position     | –                                   |
| 1                 | velocity     | momentum                            |
| 2                 | acceleration | force                               |
| 3                 | jerk         | yank                                |
| 4                 | snap         | tug                                 |
|                   |              |                                     |
|                   |              |                                     |



# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome         | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|--------------|-------------------------------------|
| 0                 | position     | –                                   |
| 1                 | velocity     | momentum                            |
| 2                 | acceleration | force                               |
| 3                 | jerk         | yank                                |
| 4                 | snap         | tug                                 |
| 5                 | crackle      | snatch                              |
|                   |              |                                     |

# Derivadas de ordem superior em cinemática

| Ordem da derivada | Nome         | Nome quando multiplicado pela massa |
|-------------------|--------------|-------------------------------------|
| 0                 | position     | –                                   |
| 1                 | velocity     | momentum                            |
| 2                 | acceleration | force                               |
| 3                 | jerk         | yank                                |
| 4                 | snap         | tug                                 |
| 5                 | crackle      | snatch                              |
| 6                 | pop          | shake                               |

Se  $y = f(x) = x^{100}$ , calcule  $f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$ .

Se  $y = f(x) = x^{100}$ , calcule  $f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$ .

Solução.

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) =$$

Se  $y = f(x) = x^{100}$ , calcule  $f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$ .

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}$$

Se  $y = f(x) = x^{100}$ , calcule  $f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$ .

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) =$$



Se  $y = f(x) = x^{100}$ , calcule  $f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x)$ .

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) =$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97}$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$
$$f^{(4)}(x) =$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$
$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96}$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

⋮

$$f^{(100)}(x) =$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

⋮

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^0$$

$$\text{Se } y = f(x) = x^{100}, \text{ calcule } f^{(100)}(x) = \frac{d^{100}f}{dx^{100}}(x).$$

Solução. Temos que:

$$f'(x) = 100 \cdot x^{99}, \quad f''(x) = 99 \cdot 100 \cdot x^{98}, \quad f'''(x) = 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{97},$$

$$f^{(4)}(x) = 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^{96},$$

⋮

$$f^{(100)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot x^0 = 100!.$$



# Classes de diferenciabilidade

## Definição

Seja  $f: D \rightarrow C$  uma função real.

- (1) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^0$  em  $D$  se  $f$  é contínua em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^0$ .
- (2) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $D$  se  $f'(x)$  existe para todo  $x \in D$  e se  $f$  e  $f'$  são contínuas em  $D$ . Notação:  $f \in C^1$ .
- (3) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$  existem para todo  $x \in D$  e se  $f, f', \dots, f^{(k)}$  são contínuas em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^k$ .
- (4) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $D$  se  $f^{(i)}(x)$  existe para todo  $i \in \mathbb{N}$  e para todo  $x \in D$  e se  $f^{(i)}$  é contínua em  $D$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .  
Notação:  $f \in C^\infty$ .

## Definição

Seja  $f: D \rightarrow C$  uma função real.

- (1) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^0$  em  $D$  se  $f$  é contínua em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^0$ .
- (2) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $D$  se  $f'(x)$  existe para todo  $x \in D$  e se  $f$  e  $f'$  são contínuas em  $D$ . Notação:  $f \in C^1$ .
- (3) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$  existem para todo  $x \in D$  e se  $f, f', \dots, f^{(k)}$  são contínuas em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^k$ .
- (4) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $D$  se  $f^{(i)}(x)$  existe para todo  $i \in \mathbb{N}$  e para todo  $x \in D$  e se  $f^{(i)}$  é contínua em  $D$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .  
Notação:  $f \in C^\infty$ .

## Definição

Seja  $f: D \rightarrow C$  uma função real.

- (1) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^0$  em  $D$  se  $f$  é contínua em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^0$ .
- (2) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $D$  se  $f'(x)$  existe para todo  $x \in D$  e se  $f$  e  $f'$  são contínuas em  $D$ . Notação:  $f \in C^1$ .
- (3) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$  existem para todo  $x \in D$  e se  $f, f', \dots, f^{(k)}$  são contínuas em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^k$ .
- (4) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $D$  se  $f^{(i)}(x)$  existe para todo  $i \in \mathbb{N}$  e para todo  $x \in D$  e se  $f^{(i)}$  é contínua em  $D$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .  
Notação:  $f \in C^\infty$ .

## Definição

Seja  $f: D \rightarrow C$  uma função real.

- (1) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^0$  em  $D$  se  $f$  é contínua em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^0$ .
- (2) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $D$  se  $f'(x)$  existe para todo  $x \in D$  e se  $f$  e  $f'$  são contínuas em  $D$ . Notação:  $f \in C^1$ .
- (3) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$  existem para todo  $x \in D$  e se  $f, f', \dots, f^{(k)}$  são contínuas em  $D$ .  
Notação:  $f \in C^k$ .
- (4) Dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$  em  $D$  se  $f^{(i)}(x)$  existe para todo  $i \in \mathbb{N}$  e para todo  $x \in D$  e se  $f^{(i)}$  é contínua em  $D$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .  
Notação:  $f \in C^\infty$ .

$f(x) = |x|$  é de classe  $C^0$ , mas não é de classe  $C^1$ .

$f(x) = |x|$  é de classe  $C^0$ , mas não é de classe  $C^1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1, \text{ mas não é de classe } C^2.$$

$f(x) = |x|$  é de classe  $C^0$ , mas não é de classe  $C^1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1, \text{ mas não é de classe } C^2.$$

$f(x) = x^{100}$  é de classe  $C^\infty$ .



$f(x) = |x|$  é de classe  $C^0$ , mas não é de classe  $C^1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1, \text{ mas não é de classe } C^2.$$

$f(x) = x^{100}$  é de classe  $C^\infty$ .

$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1}$  é de classe  $C^\infty$ .

$f(x) = |x|$  é de classe  $C^0$ , mas não é de classe  $C^1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \leq 0, \\ +\frac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{é de classe } C^1, \text{ mas não é de classe } C^2.$$

$f(x) = x^{100}$  é de classe  $C^\infty$ .

$f(x) = \frac{e^x \cdot \cos(x)}{x^4 + 1}$  é de classe  $C^\infty$ .

Quase que todas as funções que estudaremos são de classe  $C^\infty$ !

# Derivadas de funções inversas

## Teorema

Seja  $f: I \mapsto J$  uma função de classe  $C^1$ , onde  $I$  e  $J$  são intervalos abertos. Se  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  para todo  $x \in J$ , então  $f$  é inversível e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \forall x \in J.$$



$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

⇓ (derivando dos dois lados)

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

⇓ (derivando dos dois lados)

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

⇓ (usando a regra da cadeia)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$



$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in J$$

⇓ (derivando dos dois lados)

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x), \forall x \in J$$

⇓ (usando a regra da cadeia)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1, \forall x \in J$$

⇓

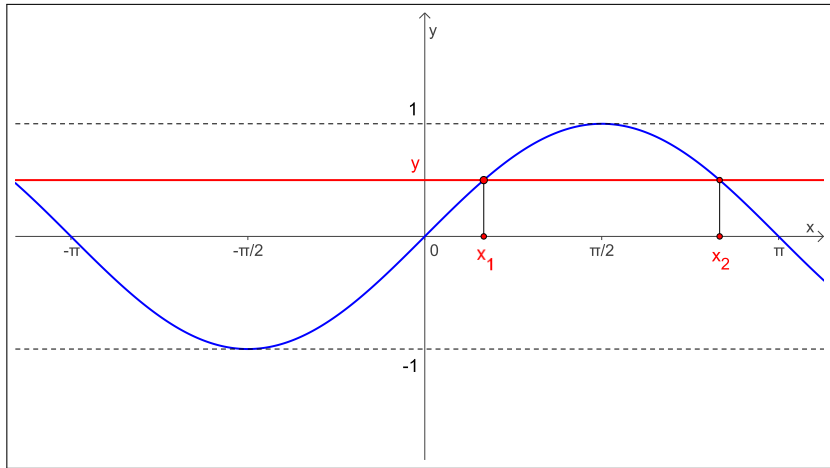
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \forall x \in J.$$

# Exemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

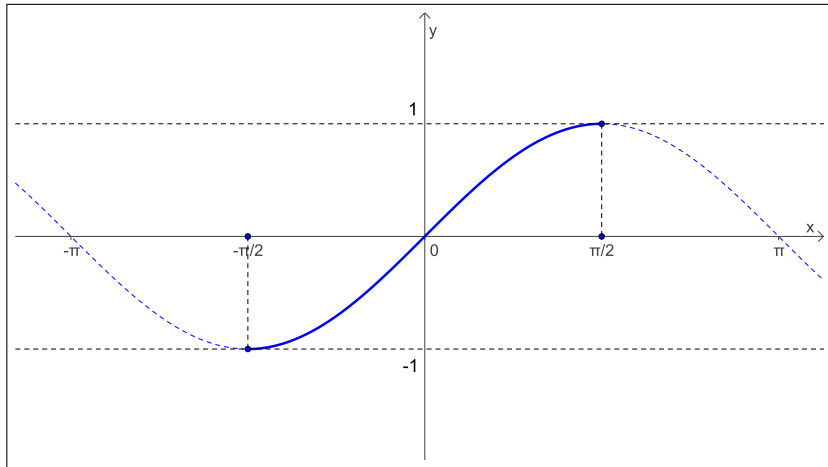
$$x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$$

não é inversível, pois não é injetiva.



# Exemplo

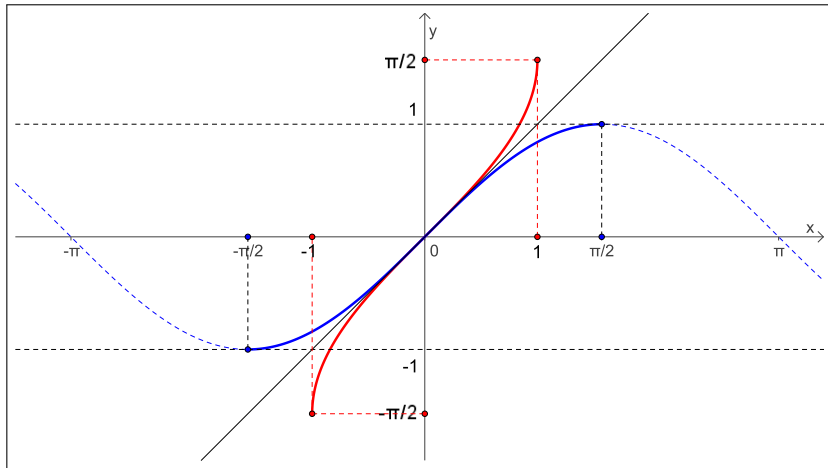
$f: [-\pi/2, +\pi/2] \rightarrow [-1, +1]$   
 $x \mapsto y = f(x) = \text{sen}(x)$  é inversível, pois é bijetiva.



# Exemplo

$$f^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, +\pi/2]$$

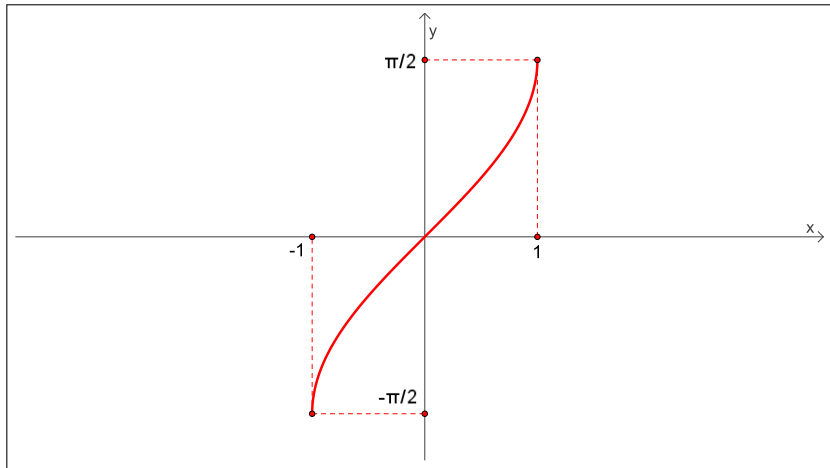
$x \mapsto y = f^{-1}(x) = \arcsen(x)$  é sua função inversa.



# Exemplo

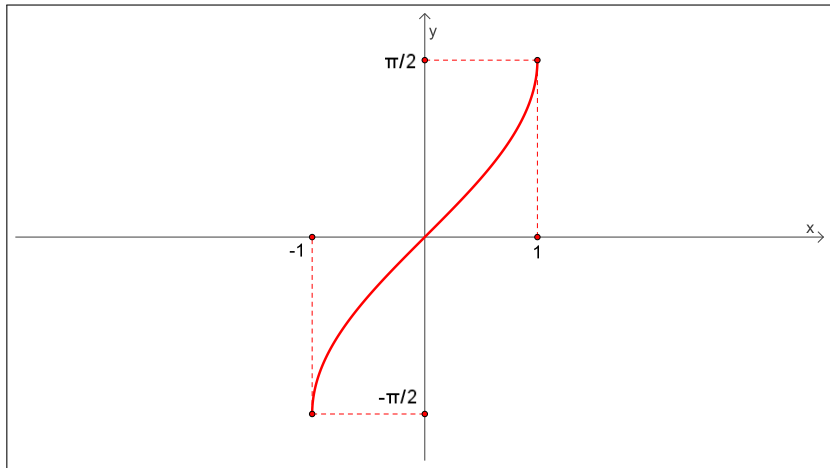
$$f^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, +\pi/2]$$

$x \mapsto y = f^{-1}(x) = \arcsen(x)$  é sua função inversa.



# A função arco seno é derivável?

O teorema da função inversa garante que  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$  é derivável no intervalo aberto  $(-1, +1)$ .



# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) =$$



# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$[\cos(\arcsen(x))]^2 + [\sen(\arcsen(x))]^2 = 1$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$[\cos(\arcsen(x))]^2 + [\sen(\arcsen(x))]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \sen(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arcsen(x))]^2 + [\sen(\arcsen(x))]^2 = 1 &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arcsen(x))]^2 + [\text{sen}(\arcsen(x))]^2 = 1 &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{[\cos(\arcsen(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arcsen(x))]^2 + [\text{sen}(\arcsen(x))]^2 = 1 &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{[\cos(\arcsen(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\cos(\arcsen(x))| = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$



# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arcsen(x))]^2 + [\text{sen}(\arcsen(x))]^2 = 1 &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{[\cos(\arcsen(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\cos(\arcsen(x))| = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco seno?

Qual é a derivada de  $y = \arcsen(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arcsen(x))]^2 + [\text{sen}(\arcsen(x))]^2 = 1 &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\cos(\arcsen(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{[\cos(\arcsen(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\cos(\arcsen(x))| = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

pois se  $x \in (-1, +1)$ , então  $\arcsen(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$  e, assim,  $\cos(\arcsen(x)) > 0$ .

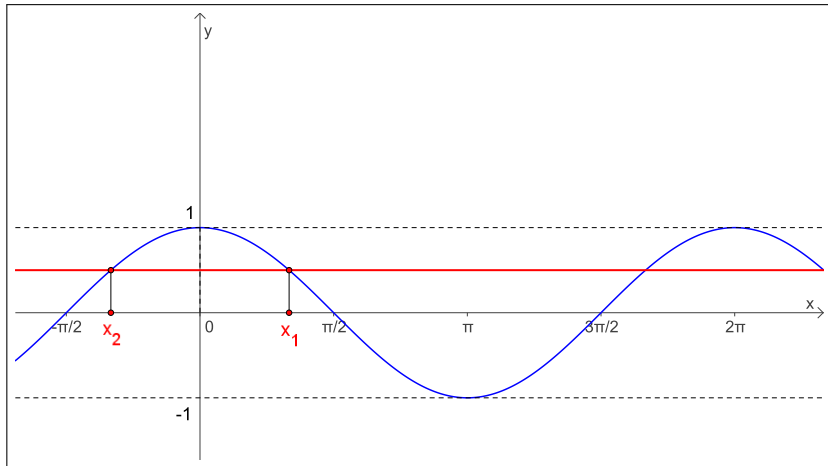
$$\frac{d}{dx} [\arcsen(u)] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

# A função arco cosseno

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

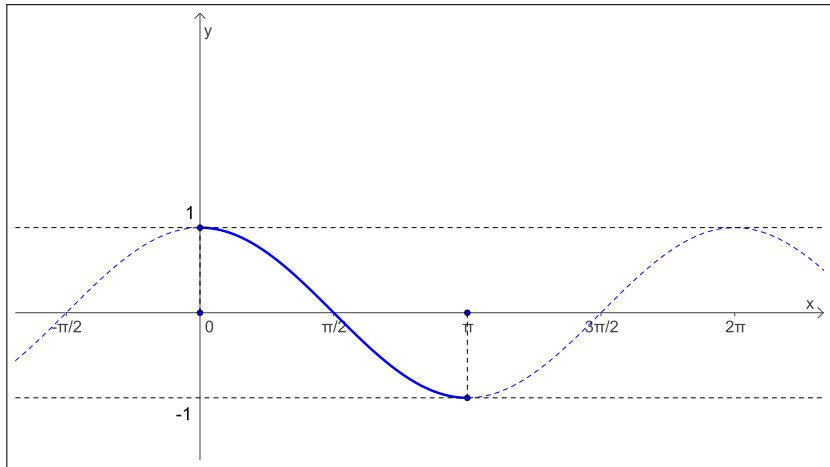
$$x \mapsto y = f(x) = \cos(x)$$

não é inversível, pois não é injetiva.



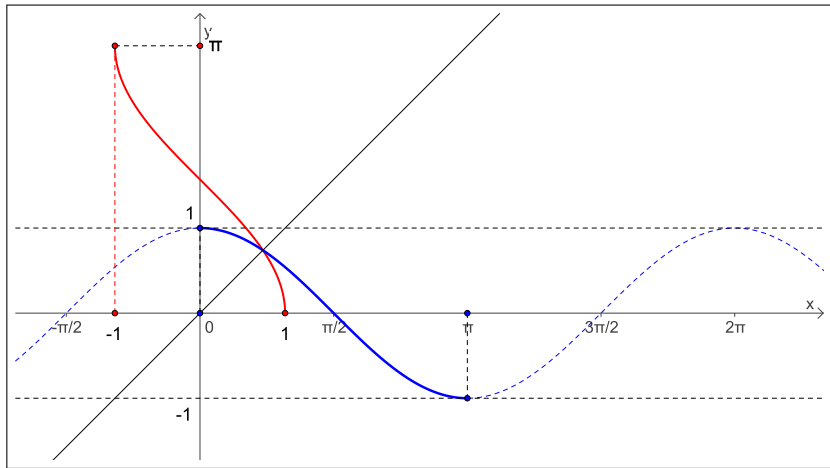
# A função arco cosseno

$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$   
 $x \mapsto y = f(x) = \cos(x)$  é inversível, pois é bijetiva.



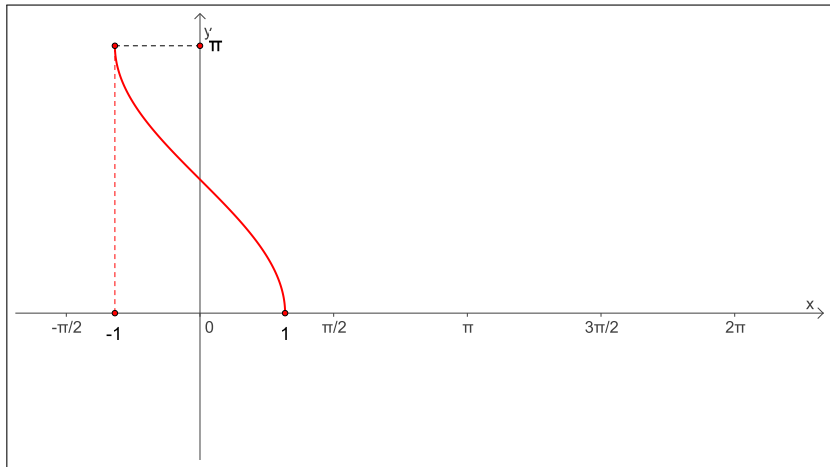
# A função arco cosseno

$f^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$   
 $x \mapsto y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$  é sua função inversa.



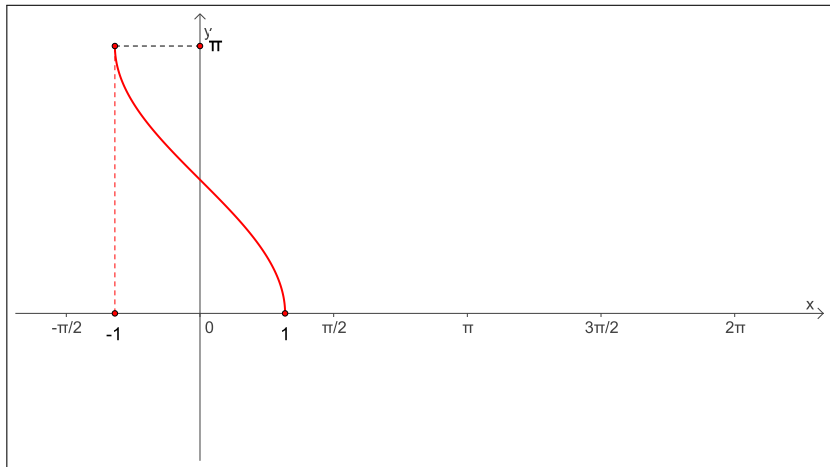
# A função arco cosseno

$f^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$   
 $x \mapsto y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$  é sua função inversa.



# A função arco cosseno é derivável?

O teorema da função inversa garante que  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$  é derivável no intervalo aberto  $(-1, +1)$ .





# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) =$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$[\cos(\arccos(x))]^2 + [\sin(\arccos(x))]^2 = 1$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$[\cos(\arccos(x))]^2 + [\sin(\arccos(x))]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + [\sin(\arccos(x))]^2 = 1$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 \Rightarrow x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$



# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 \Rightarrow x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 \\ &\Rightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{[\text{sen}(\arccos(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 &\Rightarrow x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 \\ &&\Rightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 - x^2 \\ &&\Rightarrow \sqrt{[\text{sen}(\arccos(x))]^2} &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\text{sen}(\arccos(x))| &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 &\Rightarrow x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 \\ &&\Rightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 - x^2 \\ &&\Rightarrow \sqrt{[\text{sen}(\arccos(x))]^2} &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\text{sen}(\arccos(x))| &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \text{sen}(\arccos(x)) &= \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco cosseno?

Qual é a derivada de  $y = \arccos(x)$ , para  $x \in (-1, +1)$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \cos(x)$  e  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\text{sen}(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\arccos(x))]^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 &\Rightarrow x^2 + [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 \\ &&\Rightarrow [\text{sen}(\arccos(x))]^2 &= 1 - x^2 \\ &&\Rightarrow \sqrt{[\text{sen}(\arccos(x))]^2} &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow |\text{sen}(\arccos(x))| &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \text{sen}(\arccos(x)) &= \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned}$$

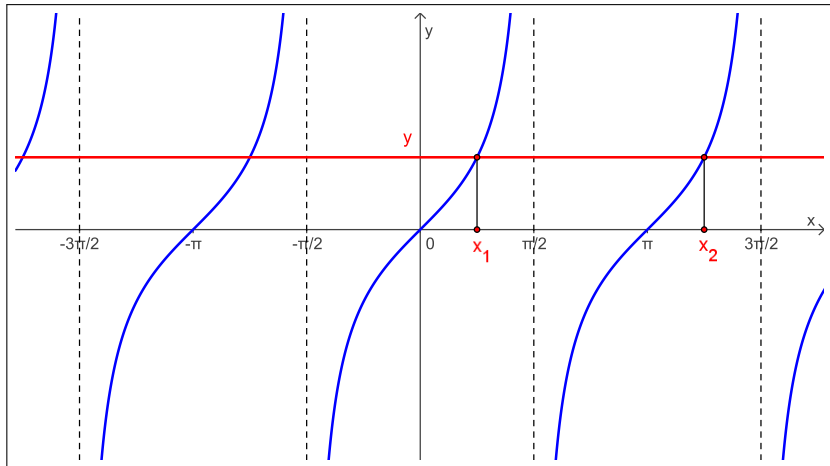
pois se  $x \in (-1, +1)$ , então  $\arccos(x) \in (0, \pi)$  e, assim,  $\text{sen}(\arccos(x)) > 0$ .

# Novo item na tabela de derivadas!

$$\frac{d}{dx} [\arccos(u)] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}.$$

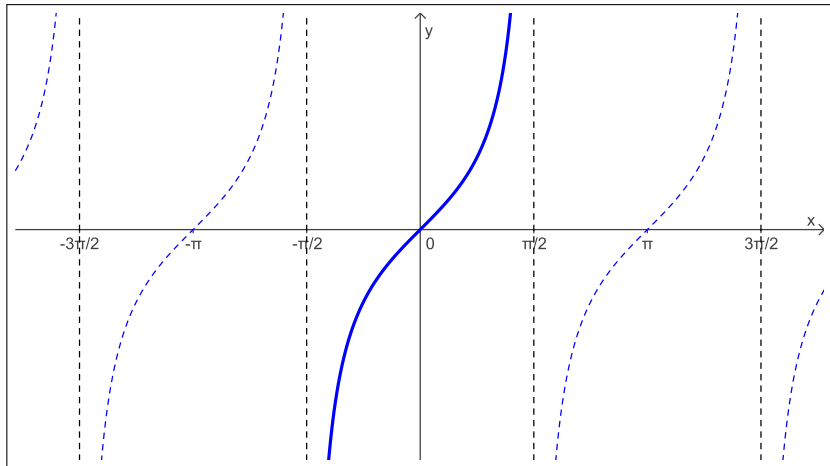
# A função arco tangente

$f: \mathbb{R} - \{\pi/2 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto y = f(x) = \text{tg}(x)$  não é inversível.



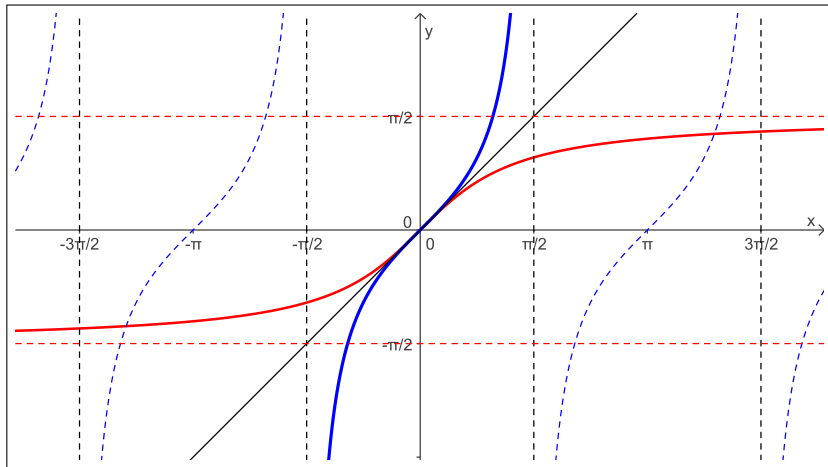
# A função arco tangente

$f: (-\pi/2, +\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto y = f(x) = \text{tg}(x)$  é inversível, pois é bijetiva.



# A função arco tangente

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, +\pi/2)$   
 $x \mapsto y = f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$  é sua função inversa.

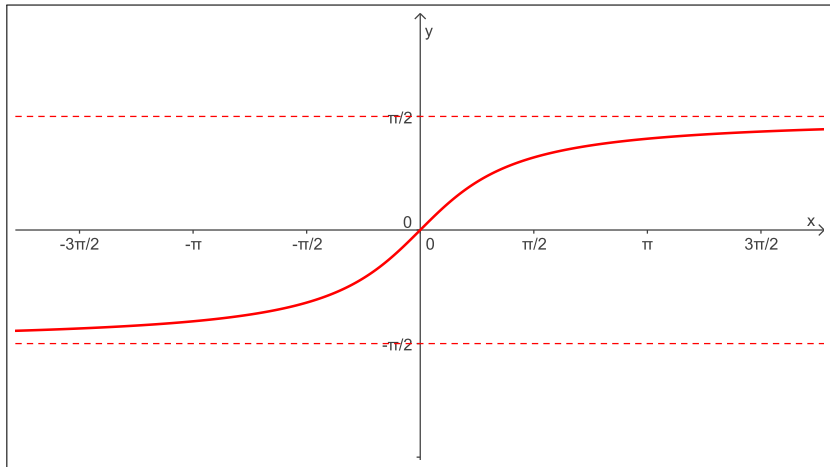




# A função arco tangente

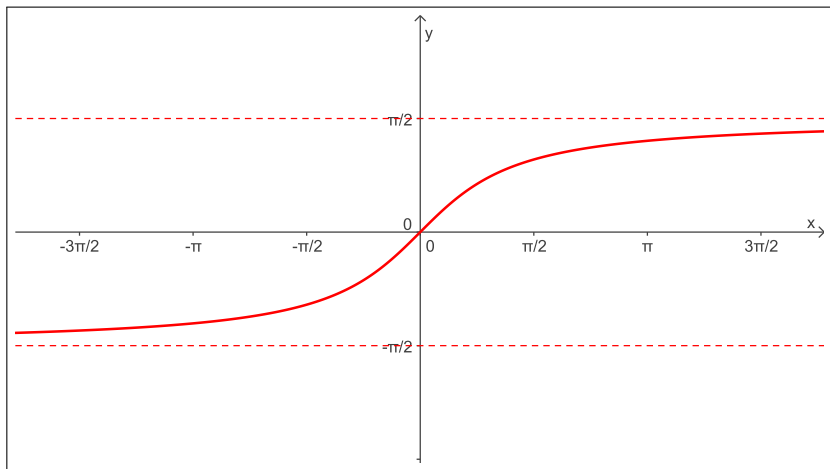
$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, +\pi/2)$$

$x \mapsto y = f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$  é sua função inversa.



# A função arco tangente é derivável?

O teorema da função inversa garante que  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .



# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \operatorname{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) =$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \operatorname{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \operatorname{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))}$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \operatorname{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$



# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$\begin{aligned} [\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 &= 1 \\ \Downarrow \\ \frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} &= \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))} \end{aligned}$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

↓

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

↓

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

↓

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

↓

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

↓

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

# Mas qual é a derivada da função arco tangente?

Qual é a derivada de  $y = \text{arctg}(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ?

Resposta. Se  $f(x) = \text{tg}(x)$  e  $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$ , então pelo teorema da função inversa segue-se que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora

$$[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2 = 1$$

↓

$$\frac{[\cos(\text{arctg}(x))]^2 + [\text{sen}(\text{arctg}(x))]^2}{\cos^2(\text{arctg}(x))} = \frac{1}{\cos^2(\text{arctg}(x))}$$

↓

$$1 + \text{tg}^2(\text{arctg}(x)) = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

↓

$$1 + x^2 = \sec^2(\text{arctg}(x))$$

↓

$$\sec^2(\text{arctg}(x)) = 1 + x^2.$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{arctg}(u)] = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

# Regras básicas de derivação com a regra da cadeia

| Função                 | Derivada  |
|------------------------|---|
| $y = u^c$              | $\frac{dy}{dx} = c \cdot u^{c-1} \cdot \frac{du}{dx}$         |
| $y = \text{sen}(u)$    | $\frac{dy}{dx} = +\cos(u) \cdot \frac{du}{dx}$                |
| $y = \text{cos}(u)$    | $\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(u) \cdot \frac{du}{dx}$          |
| $y = \text{tg}(u)$     | $\frac{dy}{dx} = +\sec^2(u) \cdot \frac{du}{dx}$              |
| $y = \text{arcsen}(u)$ | $\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$ |
| $y = \text{arccos}(u)$ | $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$ |
| $y = \text{arctg}(u)$  | $\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$        |
| $y = e^u$              | $\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$                     |
| $y = \ln(u)$           | $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$             |