

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

Parte 15

Versão 0.9

Mais derivadas

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) =$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[e^{x \cdot \ln(2)} \right]$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[e^{x \cdot \ln(2)} \right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(2)]$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[e^{x \cdot \ln(2)} \right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2)$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = 2^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[e^{x \cdot \ln(2)} \right] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(2)] = e^{x \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2) = 2^x \cdot \ln(2).$$

Mais geralmente, se $y = f(x) = a^x$, com $a > 0$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} [a^x] = a^x \cdot \ln(a).$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) =$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[e^{x \cdot \ln(x)} \right]$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} [e^{x \cdot \ln(x)}] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(x)]$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} [e^{x \cdot \ln(x)}] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = x^x$?

Solução. Temos que

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Assim, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} [e^{x \cdot \ln(x)}] = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx} [x \cdot \ln(x)] \\ &= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) =$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x) \right]$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x) \right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x}$$

Qual é a derivada de $y = f(x) = \log_{10}(x)$?

Solução. Temos que

$$f(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x).$$

Assim,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x) \right] = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}.$$

Mais geralmente, se $y = f(x) = \log_b(x)$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, então

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} [\log_b(x)] = \frac{1}{x \cdot \ln(b)}.$$

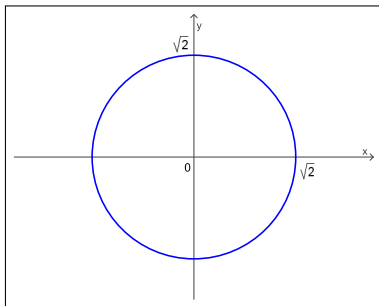
$$\frac{d}{dx} [a^u] = a^u \cdot \ln(a) \cdot \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx} [\log_b(u)] = \frac{1}{u \cdot \ln(b)} \cdot \frac{du}{dx}.$$

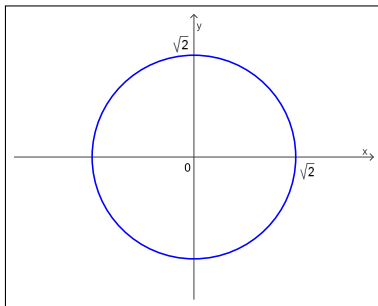
Diferenciação implícita

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$



$$x^2 + y^2 = 2$$



Este círculo **não é** gráfico de uma função que depende de x !

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

↓

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

↓

$$y^2 = 2 - x^2$$

↓

$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$

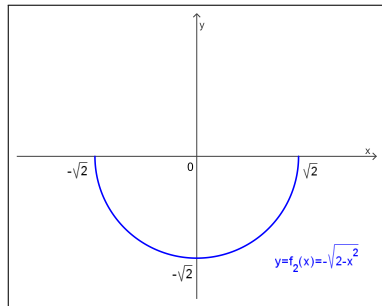
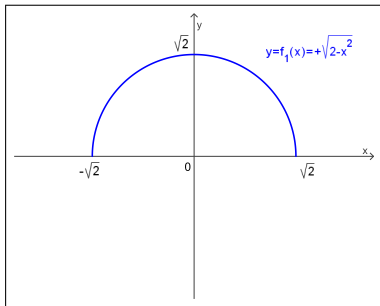
$$x^2 + y^2 = 2$$

⇓

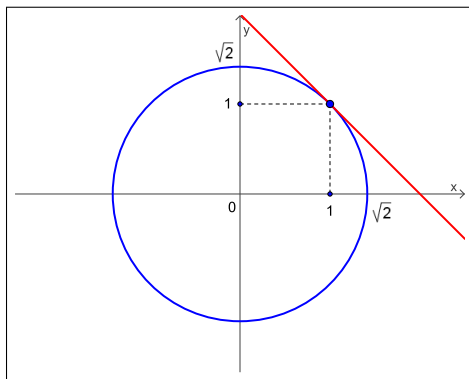
$$y^2 = 2 - x^2$$

⇓

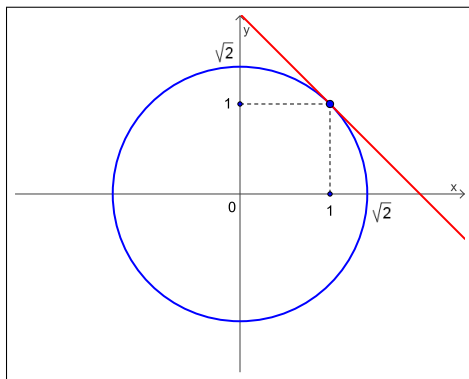
$$y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}.$$



Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Como calcular a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$?



Uma saída: use a função $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$!

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$
no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$
no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} \right] \Big|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$
no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} \right] \Big|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$
no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é:

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} \right] \Big|_{x=1} \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 1 + [-1] \cdot (x - 1)$$

↓

$$y = 2 - x.$$

Outra saída: use derivação implícita!

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2]$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Quando $x = 1$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2(1) + 2(1)y' = 0$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2(1) + 2(1)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2(1) + 2(1)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1)$$

Outra saída: use derivação implícita! Lembrando que y é uma função f_1 de x , temos que:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^2 + y^2] = \frac{d}{dx} [2] \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y y' = 0.$$

Quando $x = 1$, temos que $y = 1$ e, portanto,

$$2(1) + 2(1)y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(1) = -1.$$

Desta maneira, a equação da reta tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $\mathbf{p} = (1, 1)$ é dada por

$$y = f_1(1) + f_1'(1) \cdot (x - 1) = 1 + (-1) \cdot (x - 1) = 2 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes

$$x^3 + y^3 = 6xy \text{ no ponto } \mathbf{p} = (3, 3).$$

Solução.

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes

$$x^3 + y^3 = 6xy \text{ no ponto } \mathbf{p} = (3, 3).$$

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy]$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$3(3)^2 + 3(3)^2 y' = 6(3) + 6(3)y'$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$3(3)^2 + 3(3)^2 y' = 6(3) + 6(3)y' \Rightarrow 27 + 27y' = 18 + 18y'$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3(3)^2 + 3(3)^2 y' &= 6(3) + 6(3)y' \Rightarrow 27 + 27y' = 18 + 18y' \\ &\Rightarrow y' = f'_1(3) = -1. \end{aligned}$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3(3)^2 + 3(3)^2 y' &= 6(3) + 6(3)y' \Rightarrow 27 + 27y' = 18 + 18y' \\ &\Rightarrow y' = f'_1(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 3(3)^2 + 3(3)^2 y' &= 6(3) + 6(3)y' \Rightarrow 27 + 27y' = 18 + 18y' \\ &\Rightarrow y' = f'_1(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3)$$

Nem sempre é fácil isolar y !

Calcule a equação da reta tangente ao fólio de Descartes
 $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos que:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow \frac{d}{dx} [x^3 + y^3] = \frac{d}{dx} [6xy] \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'.$$

Quando $x = 3$, temos que $y = 3$ e, portanto,

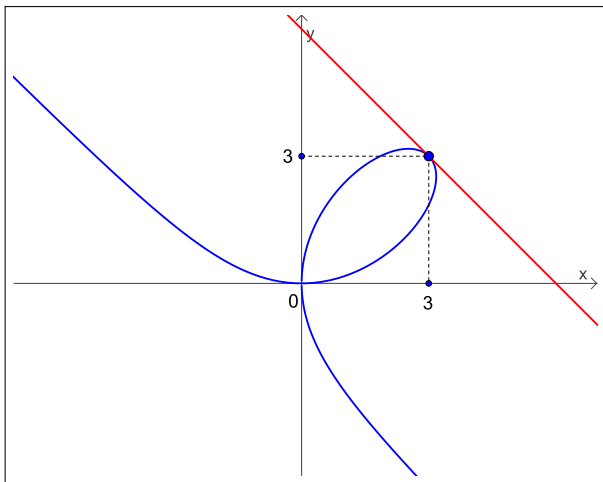
$$\begin{aligned} 3(3)^2 + 3(3)^2 y' &= 6(3) + 6(3)y' \Rightarrow 27 + 27y' = 18 + 18y' \\ &\Rightarrow y' = f'_1(3) = -1. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$ é dada por

$$y = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = 3 + (-1) \cdot (x - 3) = 6 - x.$$

Nem sempre é fácil isolar y !

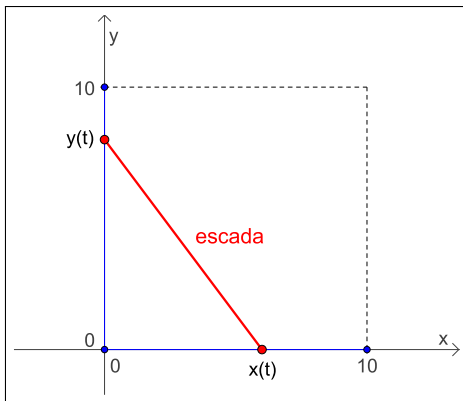
O fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ e a reta tangente $y = 6 - x$
no ponto $\mathbf{p} = (3, 3)$.



Taxas relacionadas

Exemplo

Uma escada de 10 m de comprimento está apoiada sobre uma parede. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade constante de 1 m/s, com que velocidade o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 6 m da parede?



Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100]$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100] \\ &\Rightarrow 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \end{aligned}$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100] \\ &\Rightarrow 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100] \\ &\Rightarrow 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6 \text{ m}$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m}.$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100] \\ &\Rightarrow 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6 \text{ m}$, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

Exemplo

Solução. De acordo com a figura anterior, seja $x = x(t)$ a distância da base da escada até a parede e seja $y = y(t)$ a altura do topo da escada. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \text{constante} = 1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 10^2 = 100.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } x(t) = 6 \text{ m.}$$

Agora, para $t \in [0, 10)$,

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 100 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = \frac{d}{dt} [100] \\ &\Rightarrow 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2y(t) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \frac{dx}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $x(t) = 6 \text{ m}$, temos que $y(t) = \sqrt{100 - [x(t)]^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ e, portanto,

$$\frac{dy}{dt}(t) = -\frac{6}{8} \cdot 1 = -\frac{3}{4} \text{ m/s.}$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [V(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \right]$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \Rightarrow \frac{d}{dt} [V(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4 \pi [r(t)]^2 \frac{dr}{dt}(t)$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [V(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4 \pi [r(t)]^2 \frac{dr}{dt}(t) \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4 \pi [r(t)]^2} \frac{dV}{dt}(t). \end{aligned}$$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [V(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4 \pi [r(t)]^2 \frac{dr}{dt}(t) \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4 \pi [r(t)]^2} \frac{dV}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $r(t) = 25 \text{ cm}$

Exemplo

Bombeia-se ar para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa constante de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. O quão rápido está crescendo o raio do balão quando o seu raio é 25 cm ?

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume e $r = r(t)$ o raio do balão no tempo t . Sabemos que:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \text{constante} = 100 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{e} \quad V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3.$$

O problema pede para calcular

$$\frac{dr}{dt}(t) \quad \text{no instante de tempo } t \text{ onde } r(t) = 25 \text{ cm}.$$

Agora

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 &\Rightarrow \frac{d}{dt} [V(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} \pi [r(t)]^3 \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t) = 4 \pi [r(t)]^2 \frac{dr}{dt}(t) \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4 \pi [r(t)]^2} \frac{dV}{dt}(t). \end{aligned}$$

Assim, quando $r(t) = 25 \text{ cm}$, temos que $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{1}{4 \pi [25]^2} 100 = \frac{1}{25 \pi} \text{ cm/s}$.