Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 17

Versão 0.9

A regra de L'Hôpital

Teorema

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis (deriváveis) e que $g'(x) \neq 0$ em uma vizinhança do ponto p. Suponha também que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to p} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to p} g(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

Então

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou se ele é $-\infty$ ou $+\infty$).

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) =$$

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}[\ln(x)]}{\dfrac{d}{dx}[x-1]}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x-1]} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x-1]} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x}$$

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}.$$

Solução. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0,$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}[x - 1]} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

- A regra de L'Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite do quociente das derivadas do numerador e do denominador, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É importante verificar que as condições com respeito aos limites de f e g antes de usar a regra de L'Hôpital.

- A regra de L'Hôpital também é válida para limites laterais ou para limites no infinito, isto é, "$x \to p$" pode ser trocado por qualquer dos símbolos a seguir: $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Exemplo

Encontre $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x =$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 =$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 =$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x} =$$

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x}.$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Exemplo

Encontre $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) =$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} =$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x} =$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{3}\,x^{-2/3}}.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

Note que $1/x \to 0$ e $x^{-2/3}/3 \to 0$ quando $x \to \infty$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

Note que $1/x \to 0$ e $x^{-2/3}/3 \to 0$ quando $x \to \infty$ mas, ao invés de aplicar novamente a regra de L'Hôpital, vamos simplificar a expressão e calcular o limite diretamente:

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}}.$$

Note que $1/x \to 0$ e $x^{-2/3}/3 \to 0$ quando $x \to \infty$ mas, ao invés de aplicar novamente a regra de L'Hôpital, vamos simplificar a expressão e calcular o limite diretamente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}\,x^{-2/3}} =$$

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

Note que $1/x \to 0$ e $x^{-2/3}/3 \to 0$ quando $x \to \infty$ mas, ao invés de aplicar novamente a regra de L'Hôpital, vamos simplificar a expressão e calcular o limite diretamente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Exemplo

Encontre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}$.

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\mathrm{tg}(x) - x \to$ e $x^3 \to$ quando $x \to 0$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to$ quando $x \to 0$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\text{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3} =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\mathrm{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} =$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\text{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\text{tg}(x)}{6\,x}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\text{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\text{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\text{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\,\sec^2(x)\,\text{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x}$$

Exemplo

$$\text{Encontre } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{4\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}^2(x) + 2\,\sec^4(x)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sec(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{6\,x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2(x)\operatorname{tg}^2(x) + 2\sec^4(x)}{6} = \frac{2}{6}\end{aligned}$$

$$\text{Encontre } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução. Temos que $\operatorname{tg}(x) - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2}.$$

Note que $\sec^2(x) - 1 \to 0$ e $3\,x^2 \to 0$ quando $x \to 0$. Assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital mais uma vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x}.$$

Mas $2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x) \to 0$ e $6\,x \to 0$ quando $x \to 0$, assim, podemos aplicar a regra de L'Hôpital outra vez:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3\,x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec(x)\,\sec(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}(x)}{6\,x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\,\sec^2(x)\,\operatorname{tg}^2(x) + 2\,\sec^4(x)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução.

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1 - \cos(x)} =$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = -\infty.$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1-\cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$.

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1-\cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$. O limite pode ser calculado diretamente:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}(x)}{1-\cos(x)} =$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1-\cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$. O limite pode ser calculado diretamente:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{1-\cos(\pi)}$$

Cuidado!

$$\text{Encontre } \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1-\cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$. O limite pode ser calculado diretamente:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{1-\cos(\pi)} = \frac{0}{1-(-1)}$$

Cuidado!

$$\text{Encontre} \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

Solução. Se tentarmos usar cegamente a regra de L'Hôpital, sem verificar suas hipóteses, podemos obter um resultado completamente errado:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

O uso da regra de L'Hôpital está errado aqui, uma vez que $1-\cos(x) \to 2^-$ quando $x \to \pi^-$. O limite pode ser calculado diretamente:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{1-\cos(\pi)} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

Produtos indeterminados

Produtos indeterminados

Para usar a regra de L'Hôpital para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)]$$

com $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), basta reescrevê-lo em

$$\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to p} \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x))$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x =$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to$ e $1/x \to$ quando $x \to 0^+$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to$ quando $x \to 0^+$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Usando então a regra de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} =$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Usando então a regra de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)).$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Para usar a regra de L'Hôpital, vamos reescrever o limite na forma:

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Note que, no limite da direita, $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Usando então a regra de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Observação

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}.$$

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x\to 0^+} (x\ \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}.$$

Mas, ao usar a regra de L'Hôpital, obtemos um limite mais complicado do que o limite inicial:

Observação

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}.$$

Mas, ao usar a regra de L'Hôpital, obtemos um limite mais complicado do que o limite inicial:

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}$$

Observação

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}.$$

Mas, ao usar a regra de L'Hôpital, obtemos um limite mais complicado do que o limite inicial:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}}$$

Observação

No exemplo anterior, também podemos reescrever o limite na forma

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}}.$$

Mas, ao usar a regra de L'Hôpital, obtemos um limite mais complicado do que o limite inicial:

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\dfrac{1}{x\,(\ln(x))^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x\,(\ln(x))^2).$$

Diferenças indeterminadas

Diferenças indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)]$$

com

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to p} g(x) = +\infty,$$

é necessário converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização)
ou
colocar algum fator comum em evidência.

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec(x) =$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}(x) = \infty$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)]$$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)] = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right]$$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \mathrm{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \mathrm{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \mathrm{tg}(x)] &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)] &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)}
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)] &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} \\
&= \frac{-0}{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Calcule} \lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(\pi/2)^-} [\sec(x) - \operatorname{tg}(x)] &= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right] \\
&= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} \\
&= \frac{-0}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)].$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, usaremos um denominador comum:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to (\pi/2)^-} [\sec(x) - \text{tg}(x)] &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left[\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \right] \\
&= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \text{sen}(x)}{\cos(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos(x)}{-\text{sen}(x)} \\
&= \frac{-0}{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos a regra de L'Hôpital, o que é permitido, já que $1 - \text{sen}(x) \to 0$ e $\cos(x) \to 0$ quando $x \to (\pi/2)^-$.

Potências indeterminadas

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$,

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ ou

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{\ln\left[[f(x)]^{g(x)}\right]}$$

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x \to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to p} e^{\ln\left[[f(x)]^{g(x)}\right]} = \lim_{x \to p} e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$$

Potências indeterminadas

Para estudar um limite na forma

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)}$$

com

1. $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ ou
3. $\lim_{x\to p} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$),

basta reescrevê-lo
fazendo uma mudança de base:

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to p} e^{\ln\left[[f(x)]^{g(x)}\right]} = \lim_{x\to p} e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]} = e^{\lim_{x\to p}[g(x)\cdot\ln[f(x)]]}.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x \;=$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln[x^x]}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]}.$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} [x \cdot \ln(x)]$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+} [x\cdot\ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} [x\cdot\ln(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln[x^x]} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]}.$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}$.

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x)) =$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotg}(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{cotg}(x) =$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x \to 0^+}(1 + \operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\text{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))}
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\text{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \text{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1 + \text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+} [\text{cotg}(x) \cdot \ln(1 + \text{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \text{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+} [\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} [\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]$$

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{cotg}(x) \cdot \ln(1 + \operatorname{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{cotg}(x) \cdot \ln(1 + \operatorname{sen}(4\,x))] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen}(4\,x))}{\operatorname{tg}(x)}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\text{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\text{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\text{sen}(4\,x))^{\text{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}[\text{cotg}(x)\cdot\ln(1+\text{sen}(4\,x))] &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\text{sen}(4\,x))}{\text{tg}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos(4\,x)}{1+\text{sen}(4\,x)}}{\sec^2(x)}
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule} \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} [\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))] &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))}{\operatorname{tg}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos(4\,x)}{1+\operatorname{sen}(4\,x)}}{\sec^2(x)} = 4.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Calcule } \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}.$$

Solução. Temos que $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x)) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cotg}(x) = \infty$. Para calcular o limite, faremos uma mudança de base:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)}\right]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]}.
\end{aligned}$$

Agora, para calcular, $\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]$ usaremos a regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))}{\operatorname{tg}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{4\cos(4\,x)}{1+\operatorname{sen}(4\,x)}}{\sec^2(x)} = 4.
\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4\,x))^{\operatorname{cotg}(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\operatorname{cotg}(x)\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(4\,x))]} = e^4$.