

Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada
Universidade Federal Fluminense

Parte 20

Versão 0.9

Na última aula

Teorema

Sejam $f: D \rightarrow C$ uma função e A um subconjunto do domínio D . Se $A = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado e f é contínua em A , então f possui pelo menos um ponto de mínimo global e pelo menos um ponto de máximo global em A .

Teorema

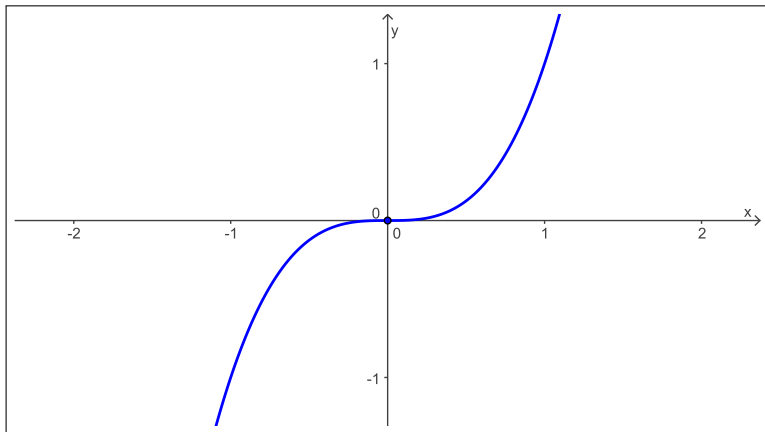
Sejam $f: D \rightarrow C$ e A um subconjunto do domínio D . Se p é um extremo local de f em A , f é diferenciável em p e p é ponto interior de A , então p é um ponto crítico de f , isto é,

$$f'(p) = 0.$$

Classificando pontos críticos

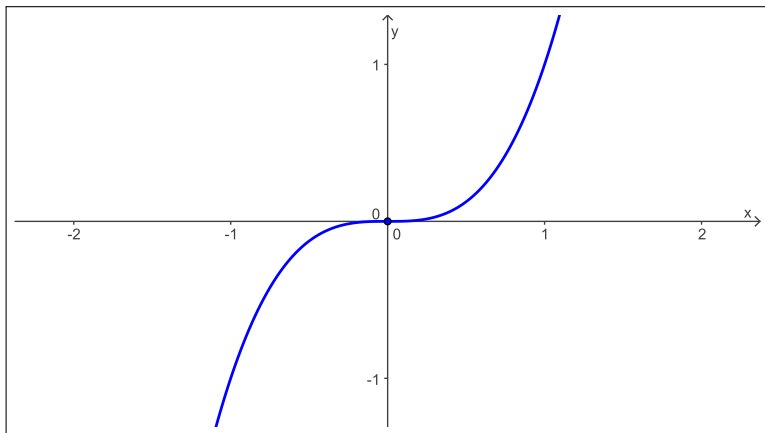
Cuidado!

A recíproca da regra de Fermat é falsa!
Nem todo ponto crítico de uma função é extremo local da função.



Cuidado!

$p = 0$ é ponto crítico de $y = f(x) = x^3$ (pois $f'(p) = f'(0) = 0$),
mas $p = 0$ **não é** um extremo local de f em $A = \mathbb{R}$.



Precisamos de um classificador de pontos críticos!

Teorema

Sejam $f: D \rightarrow C$, A um subconjunto do domínio D e p é um **ponto crítico** de f no interior de A .

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de máximo local de f em A .

Teorema

Sejam $f: D \rightarrow C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A .

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de máximo local de f em A .

Teorema

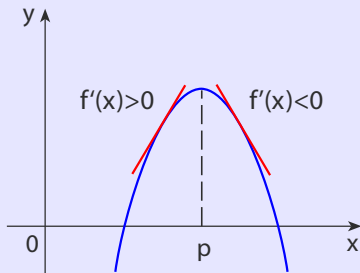
Sejam $f: D \rightarrow C$, A um subconjunto do domínio D e p é um ponto crítico de f no interior de A .

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de máximo local de f em A .

Teorema

Sejam $f: D \rightarrow C$, A um subconjunto do domínio D e p é um **ponto crítico** de f no interior de A .

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é **ponto de máximo local** de f em A .



Teorema

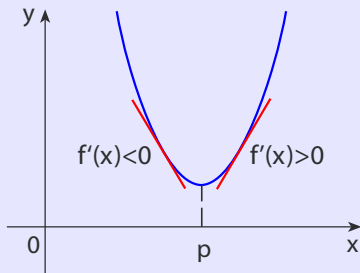
(2) Se $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de mínimo local de f em A .

Teorema

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de mínimo local de f em A .

Teorema

- (2) Se $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p , então p é ponto de mínimo local de f em A .



Teorema

- (3) Se $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

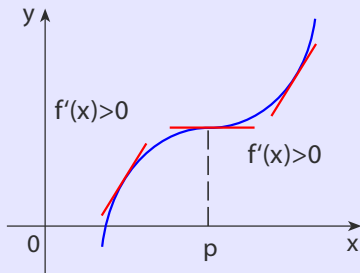
- (3) Se $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

- (3) Se $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

- (3) Se $f'(x) > 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) > 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .



Teorema

- (4) Se $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

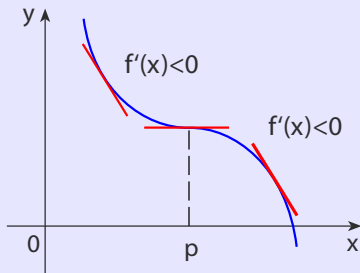
- (4) Se $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

- (4) Se $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .

Teorema

- (4) Se $f'(x) < 0$ para todo x à direita de p e suficientemente próximo de p e $f'(x) < 0$ para todo x à esquerda de p e suficientemente próximo de p , então p não é ponto de mínimo local nem ponto de máximo local de f em A . Neste caso dizemos que p é um ponto de sela de f em A .



Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução.

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) =$

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9$

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$.

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em \mathbb{R} .

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em \mathbb{R} . Como, no ponto crítico $p = +\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de - para +

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em \mathbb{R} . Como, no ponto crítico $p = +\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de - para +, segue-se que $p = +\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local de f em \mathbb{R} .

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em \mathbb{R} . Como, no ponto crítico $p = +\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de - para +, segue-se que $p = +\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local de f em \mathbb{R} . Note que estes extremos **não são** globais

Exemplo

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 9x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$. Vamos estudar o sinal da derivada:

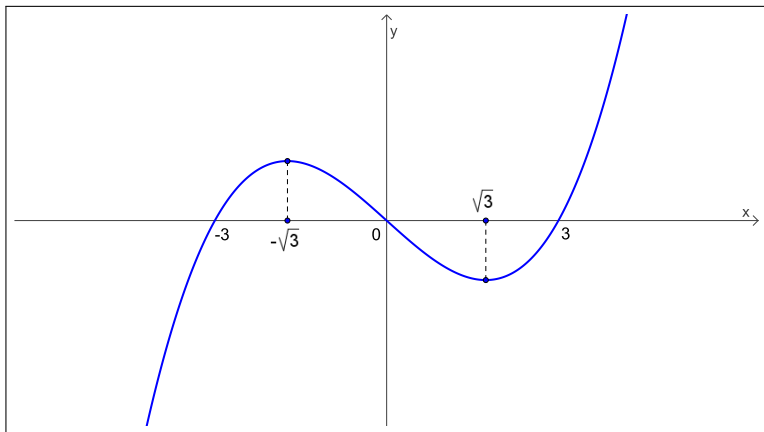


Como, no ponto crítico $p = -\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de + para -, segue-se que $p = -\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local de f em \mathbb{R} . Como, no ponto crítico $p = +\sqrt{3}$, o sinal da derivada muda de - para +, segue-se que $p = +\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local de f em \mathbb{R} . Note que estes extremos **não são** globais, pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 9x$, $A = \mathbb{R}$

A função f possui apenas extremos locais em A : $p = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local e $q = +\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local de f em A .



Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) =$

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:

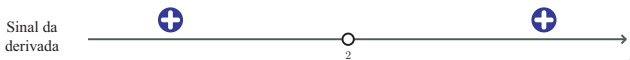
Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = 2$, o sinal da derivada não muda

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

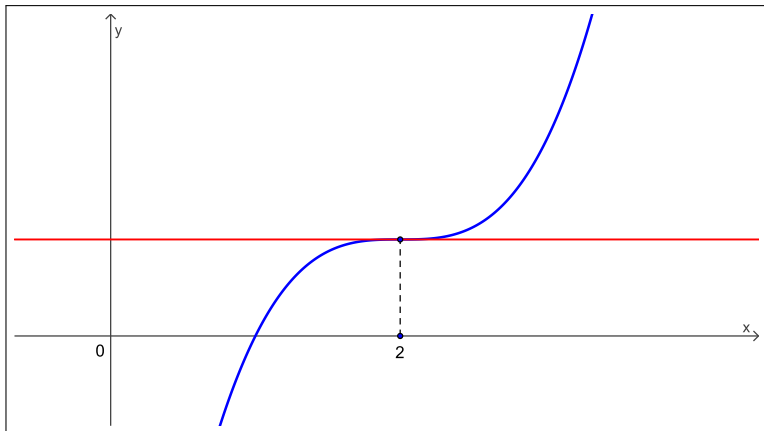
Solução. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. Vamos estudar o sinal da derivada:



Como, no ponto crítico $p = 2$, o sinal da derivada não muda, segue-se que $p = 2$ é um ponto de sela de f em \mathbb{R} .

Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$, $A = \mathbb{R}$

A função f não possui apenas extremos locais nem extremos globais em A .
O ponto crítico $p = 2$ é um ponto de sela de f .



Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$.

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f :

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f :



Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

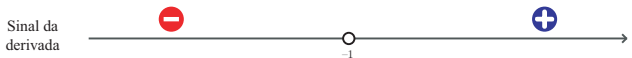
Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f :



Assim, $p = -1$ é o único ponto crítico de f .

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f :



Assim, $p = -1$ é o único ponto crítico de f . Como, no ponto crítico $p = -1$, o sinal da derivada muda de $-$ para $+$

Calcule os pontos críticos de $y = f(x) = x e^x$ e classifique-os como ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de sela.

Solução. Já vimos que $f'(x) = (x + 1) e^x$. Também já estudamos o sinal da derivada de f :



Assim, $p = -1$ é o único ponto crítico de f . Como, no ponto crítico $p = -1$, o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em \mathbb{R} .