

# Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

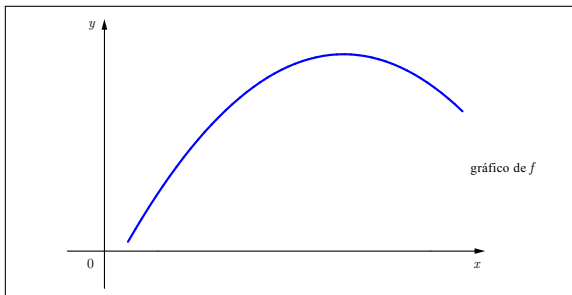
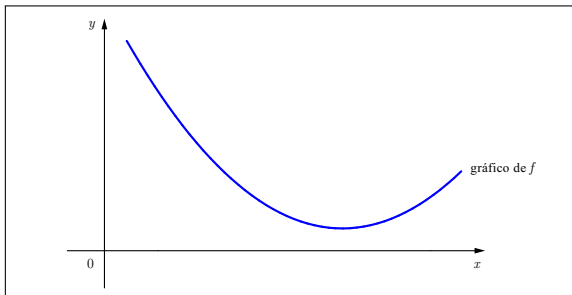
Departamento de Matemática Aplicada  
Universidade Federal Fluminense

Parte 21

Versão 0.9

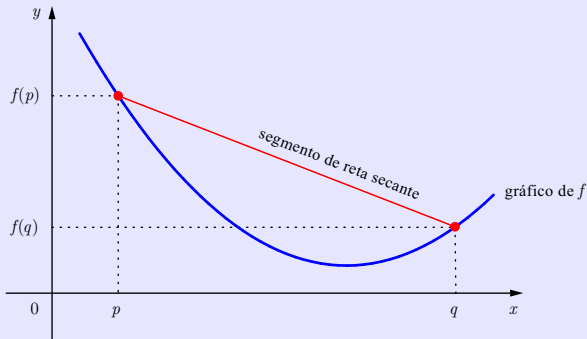
# Convexidade, concavidade e pontos de inflexão

# O que estas funções têm de diferente?



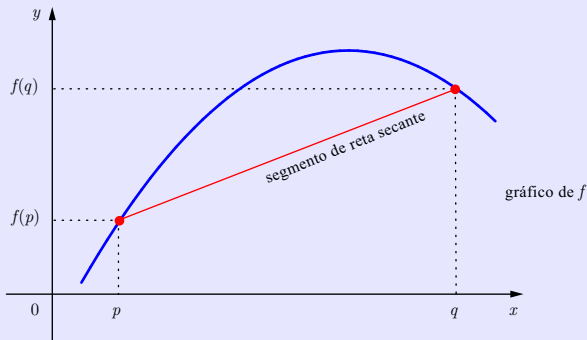
## Definição

Dizemos que uma função  $f$  definida em um intervalo  $I$  é **convexa** (ou **côncava para cima**), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos  $(p, f(p))$  e  $(q, f(q))$  sempre está *acima* ou *coincide* com o gráfico de  $f$  para qualquer escolha de pontos  $p$  e  $q$  em  $I$ .



## Definição

Dizemos que uma função  $f$  definida em um intervalo  $I$  é **côncava** (ou **côncava para baixo**), se o segmento de reta secante que passa pelos pontos  $(p, f(p))$  e  $(q, f(q))$  sempre está *abaixo* ou *coincide* com o gráfico de  $f$  para qualquer escolha de pontos  $p$  e  $q$  em  $I$ .



## Teorema

Seja  $I$  um **intervalo** contido no domínio de uma função  $f$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas em  $I$ .

- (1) Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função côncava para cima no intervalo  $I$ .
- (2) Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função côncava para baixo no intervalo  $I$ .

## Teorema

Seja  $I$  um **intervalo** contido no domínio de uma função  $f$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas em  $I$ .

- (1) Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função **côncava para cima** no intervalo  $I$ .
- (2) Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função **côncava para baixo** no intervalo  $I$ .

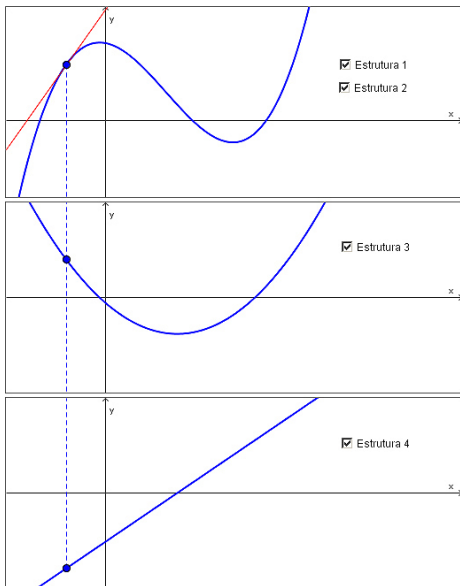
## Teorema

Seja  $I$  um **intervalo** contido no domínio de uma função  $f$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas em  $I$ .

- (1) Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função **côncava para cima** no intervalo  $I$ .
- (2) Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  é uma função **côncava para baixo** no intervalo  $I$ .



# Justificativa



$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução.

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) =$

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) =$

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ .

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

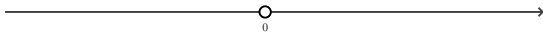


$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

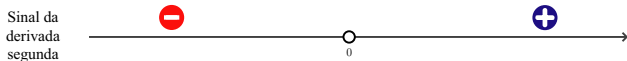
Sinal da  
derivada  
segunda



$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

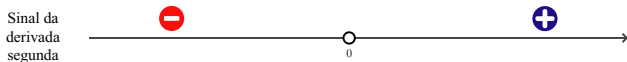
Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

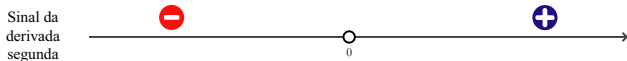


Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, 0)$

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



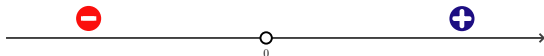
Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, 0)$  e  $f$  é côncava para cima no intervalo  $(0, +\infty)$ .

$$\text{Seja } y = f(x) = x^3 - 9x.$$

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

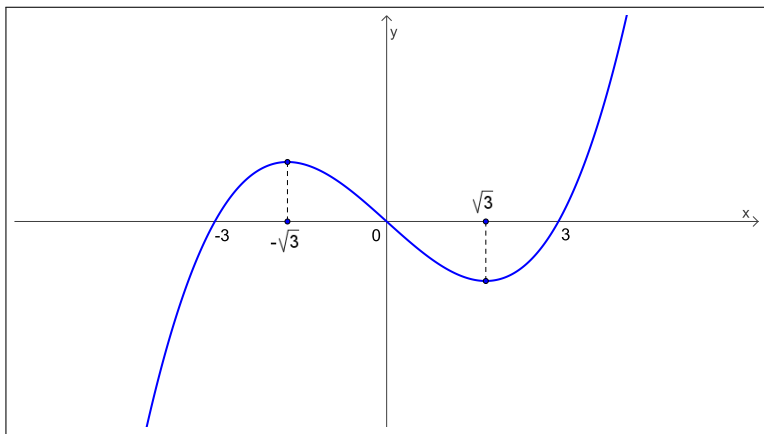
Sinal da  
derivada  
segunda



Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, 0)$  e  $f$  é côncava para cima no intervalo  $(0, +\infty)$ . Consequentemente,  $p = 0$  é o único ponto de inflexão de  $f$ .

# Estudo da concavidade da função $y = f(x) = x^3 - 9x$

$p = 0$  é o único ponto de inflexão de  $f$ .



Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução.



Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ .

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) =$

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x$

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ .

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, -2)$

Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, -2)$  e  $f$  é côncava para cima no intervalo  $(-2, +\infty)$ .



Seja  $y = f(x) = x e^x$ .

Determine os intervalos onde  $f$  é côncava para cima, os intervalos onde  $f$  é côncava para baixo e os **pontos de inflexão** de  $f$  (os pontos no domínio de  $f$  onde existe mudança de concavidade).

Solução. Já vimos que  $f'(x) = (x + 1) e^x$ . Logo,  $f''(x) = e^x + (x + 1) e^x = (x + 2) e^x$ . Vamos estudar o sinal da derivada segunda:



Assim,  $f$  é côncava para baixo no intervalo  $(-\infty, -2)$  e  $f$  é côncava para cima no intervalo  $(-2, +\infty)$ . Consequentemente,  $p = -2$  é o único ponto de inflexão de  $f$ .

# Classificando pontos críticos usando a derivada segunda

## Teorema

Sejam  $f: D \rightarrow C$ ,  $A$  um subconjunto do domínio  $D$  e  $p$  é um **ponto crítico** de  $f$  no interior de  $A$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas.

(1) Se  $f''(p) > 0$ , então  $p$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $A$ .

(2) Se  $f''(p) < 0$ , então  $p$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $A$ .

## Teorema

Sejam  $f: D \rightarrow C$ ,  $A$  um subconjunto do domínio  $D$  e  $p$  é um **ponto crítico** de  $f$  no interior de  $A$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas.

(1) Se  $f''(p) > 0$ , então  $p$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $A$ .

(2) Se  $f''(p) < 0$ , então  $p$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $A$ .

## Teorema

Sejam  $f: D \rightarrow C$ ,  $A$  um subconjunto do domínio  $D$  e  $p$  é um ponto crítico de  $f$  no interior de  $A$ . Suponha que  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sejam contínuas.

(1) Se  $f''(p) > 0$ , então  $p$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $A$ .

(2) Se  $f''(p) < 0$ , então  $p$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $A$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução.

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) =$



Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) =$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ . Do mesmo modo, como



Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ . Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\sqrt{3} > 0,$$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ . Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que  $q = +\sqrt{3}$  é

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x^3 - 9x$ .

Solução. Temos que  $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$  e, portanto,  $f''(x) = 6x$ . Vimos que  $p = -\sqrt{3}$  e  $q = +\sqrt{3}$  são os únicos pontos críticos de  $f$ . Como

$$f''(p) = f''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0,$$

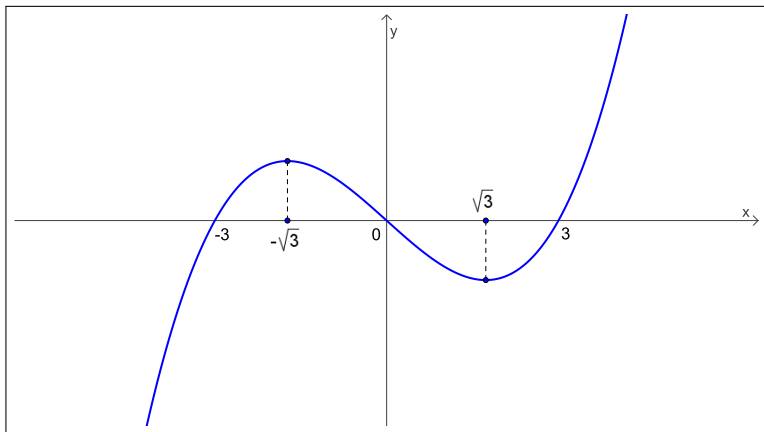
segue-se que  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ . Do mesmo modo, como

$$f''(q) = f''(+\sqrt{3}) = +6\sqrt{3} > 0,$$

segue-se que  $q = +\sqrt{3}$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

# Exemplo: $y = f(x) = x^3 - 9x$ , $A = \mathbb{R}$

A função  $f$  possui apenas extremos locais em  $A$ :  $p = -\sqrt{3}$  é ponto de máximo local e  $q = +\sqrt{3}$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $A$ .



Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução.

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ .

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ .



Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

$$f''(p) =$$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

$$f''(p) = f''(-1)$$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1 + 2) e^{-1}$$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1 + 2) e^{-1} = e^{-1}$$

Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

$$f''(p) = f''(-1) = (-1 + 2) e^{-1} = e^{-1} > 0$$

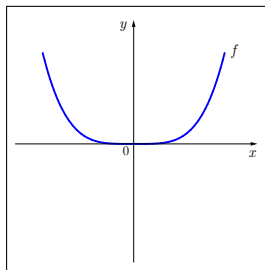
Use o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos de  $y = f(x) = x e^x$ .

Solução. Já vimos que  $p = -1$  é o único ponto crítico de  $f$ . Também já vimos que  $f''(x) = (x + 2) e^x$ . Como

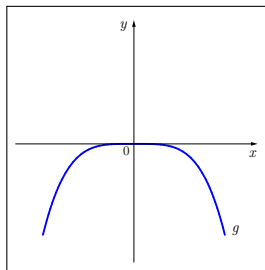
$$f''(p) = f''(-1) = (-1 + 2) e^{-1} = e^{-1} > 0,$$

segue-se que  $p = -1$  é ponto de mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

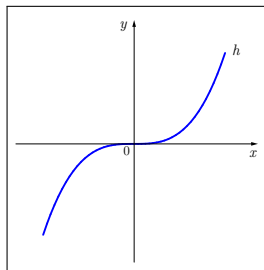
Se  $f''(p) = 0$ , nada podemos afirmar sobre o ponto  $p$ :  
ele pode ser um ponto de mínimo local, um ponto de máximo local  
ou um ponto de sela.



$$f(x) = +x^4$$



$$g(x) = -x^4$$



$$h(x) = +x^3$$

Como fazer um bom esboço do gráfico de uma função?

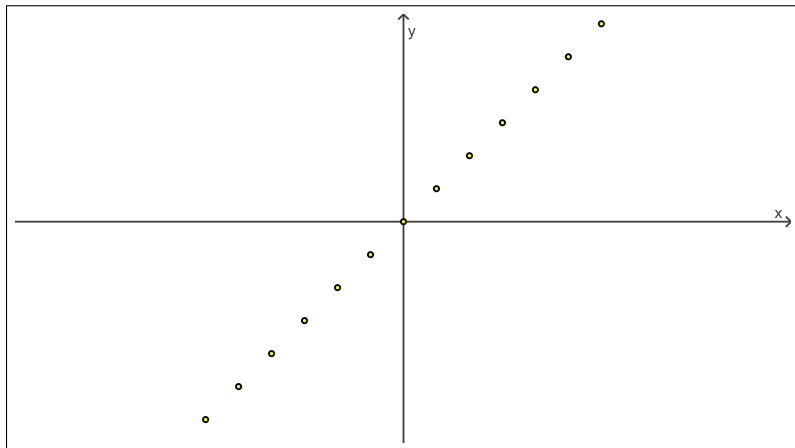


Tente fazer um esboço do gráfico da função

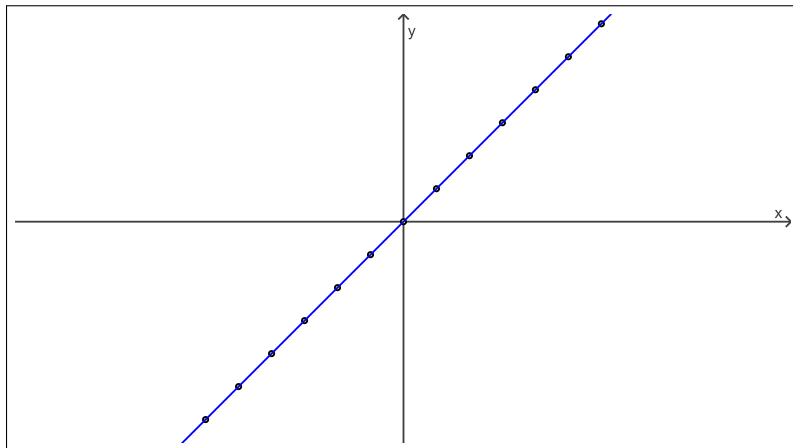
$$y = f(x) = x e^x.$$

Faça cada gráfico em um sistema de eixos coordenados diferente.  
Use o que quiser, inclusive a sua calculadora!

# Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



# Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



# Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!

