Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

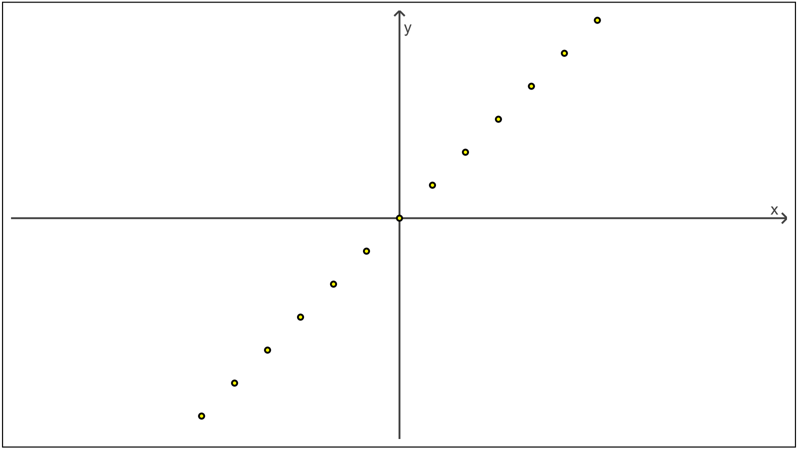
Universidade Federal Fluminense

Parte 22

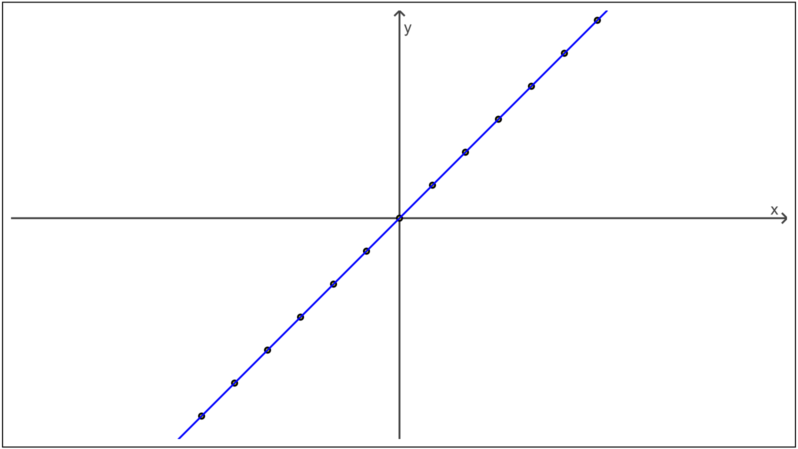
Versão 0.9

Como fazer um bom esboço do gráfico de uma função?

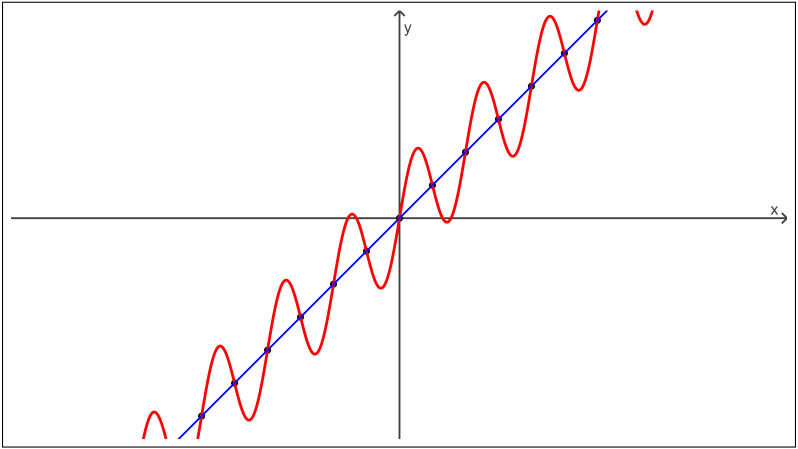
Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Cuidado: usar tabelas pode não ser suficiente!



Usando cálculo para fazer esboços de gráficos de funções

Roteiro

(1) Domínio da função.

(2) Interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

(3) Simetrias: função par, função ímpar, função periódica.

(4) Assíntotas horizontais e verticais.

(5) Pontos onde a função não é derivável.

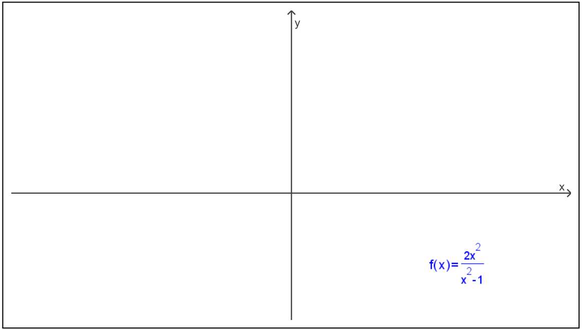
(6) Intervalos de crescimento e decrescimento.

(7) Máximos e mínimos locais.

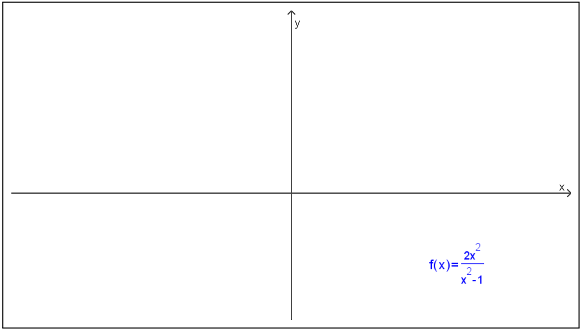
(8) Concavidade e pontos de inflexão.

Exemplo

$$y = f(x) = \frac{2\,x^2}{x^2 - 1}$$

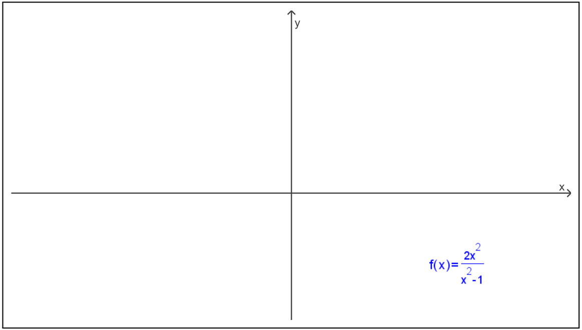

y
x
$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

(1) Domínio da função

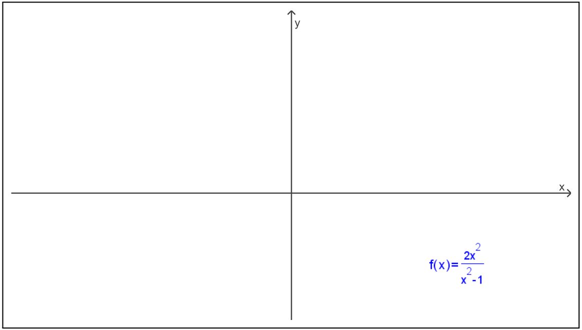


O domínio de f é

(1) Domínio da função

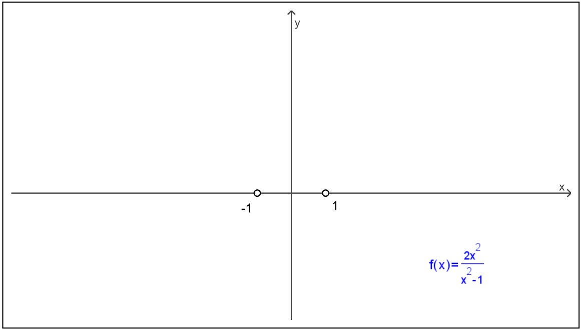


O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\}$



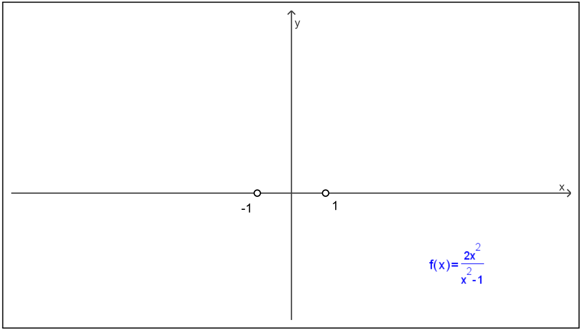
O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

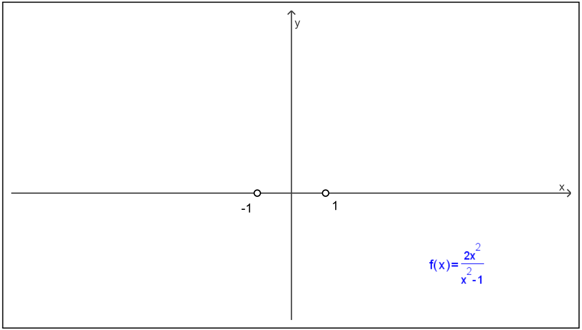
(1) Domínio da função



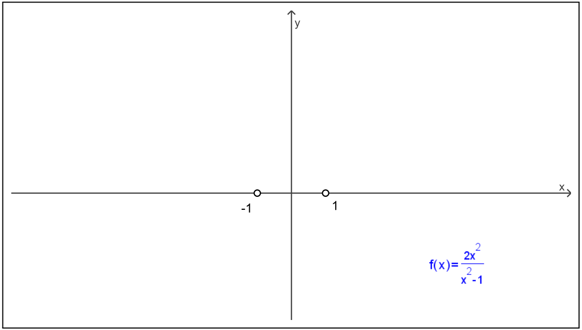
O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(2) Interseção com os eixos coordenados



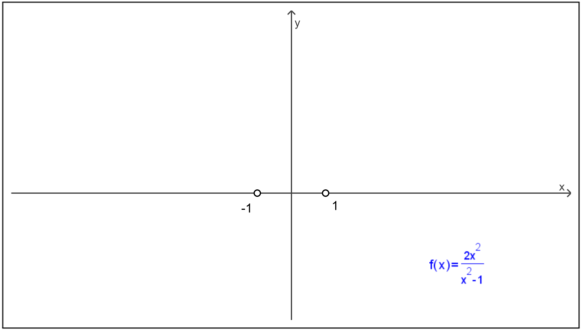


A interseção do gráfico com o eixo *y* é obtida fazendo-se

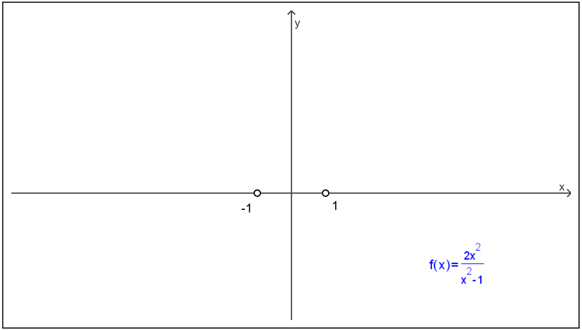


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

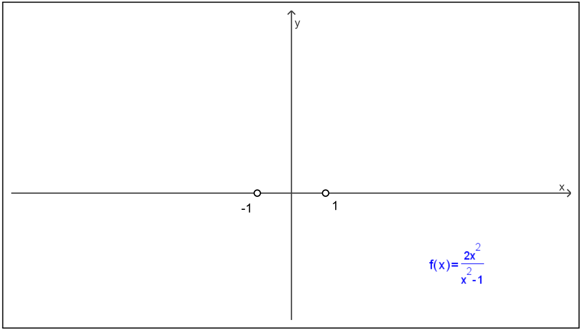


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$



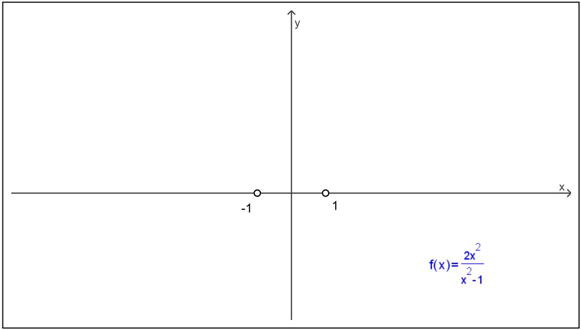
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto

(2) Interseção com os eixos coordenados

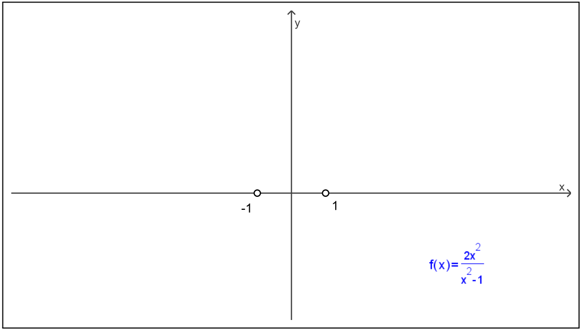


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

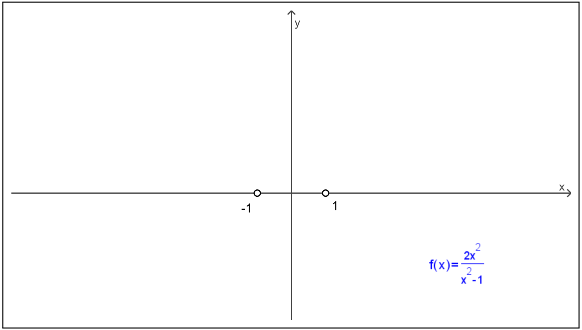


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se



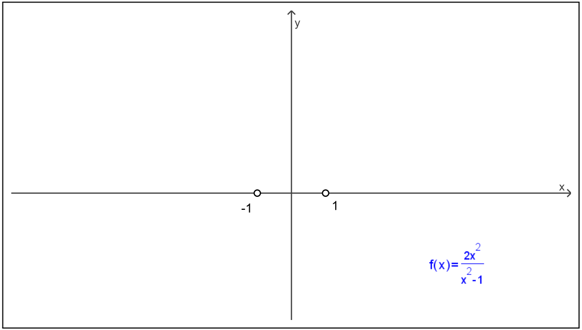
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$.

(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

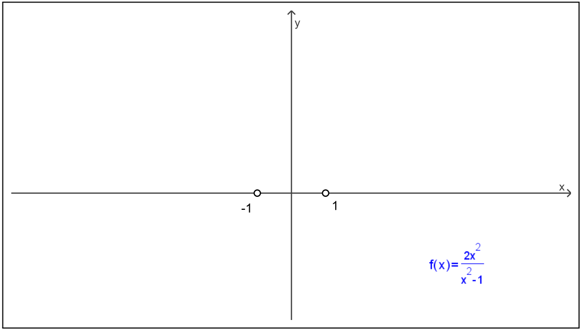
$$f(x) = 0$$



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = 0$$

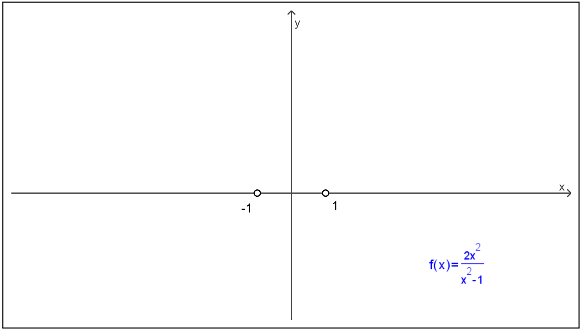
(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

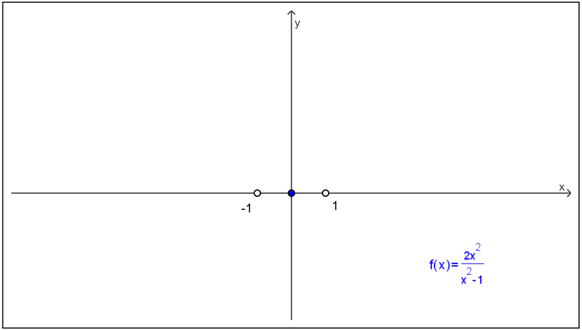
(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

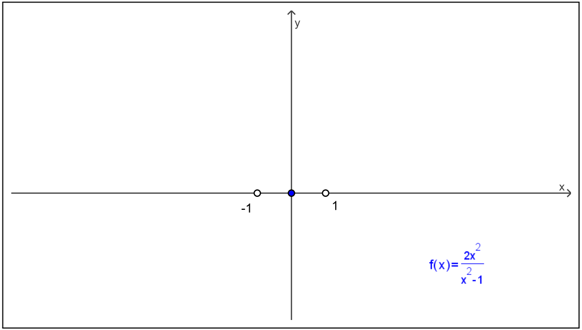
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.

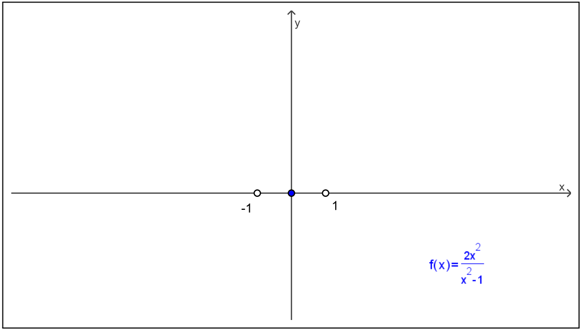


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

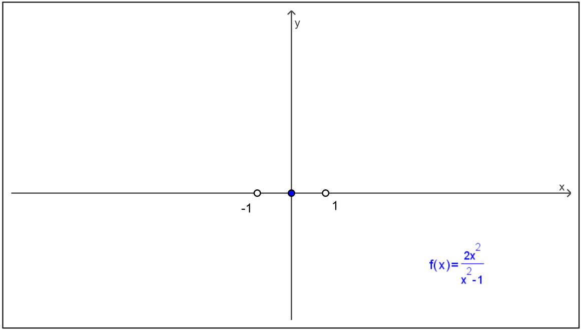
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.


y
x
-1
1
$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$



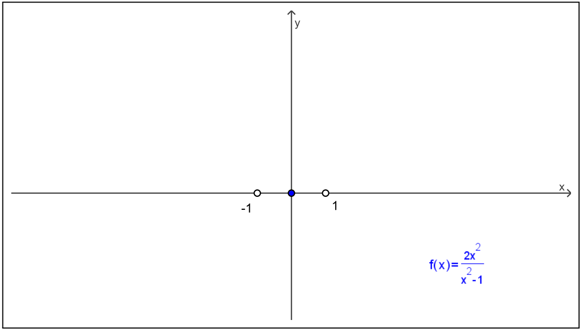
Como $f(-x) =$

(3) Simetrias



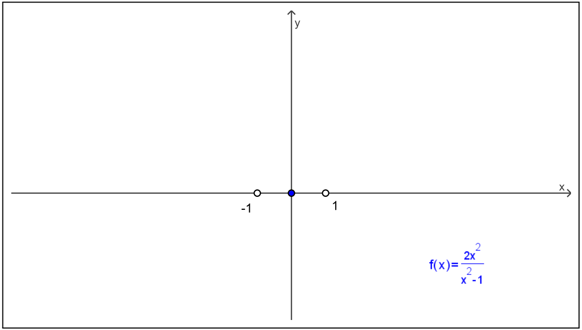
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1}$

(3) Simetrias

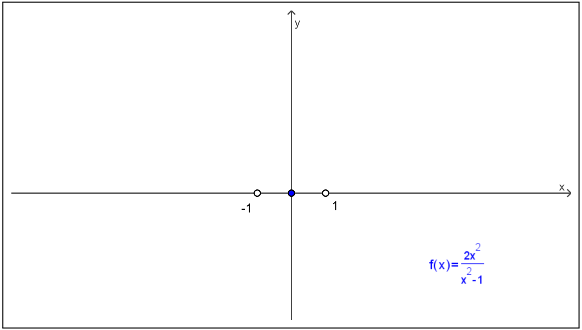


Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1}$

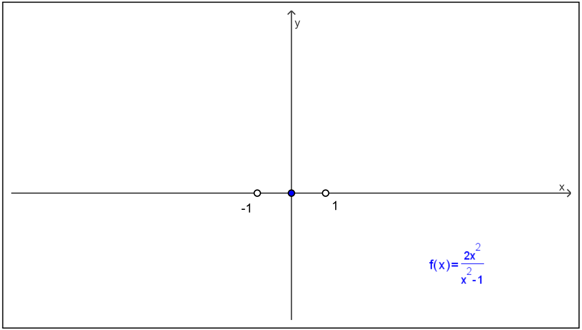
(3) Simetrias



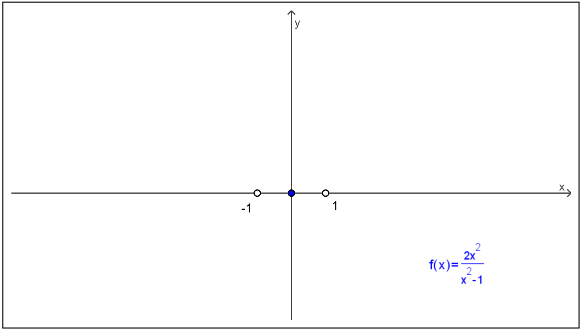
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$



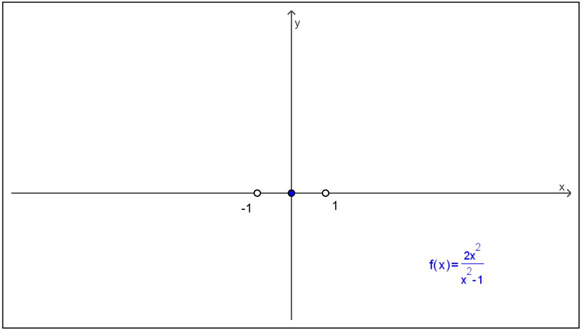
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$, concluímos que a função f é par.



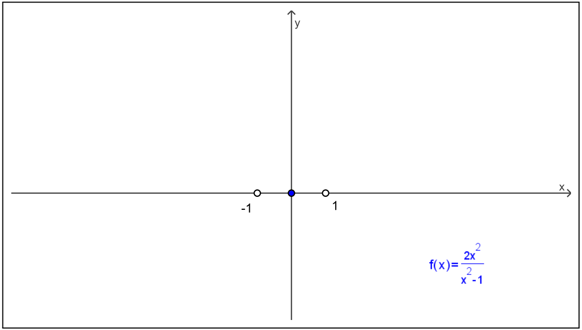
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$, concluímos que a função f é par. Logo, o seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y.



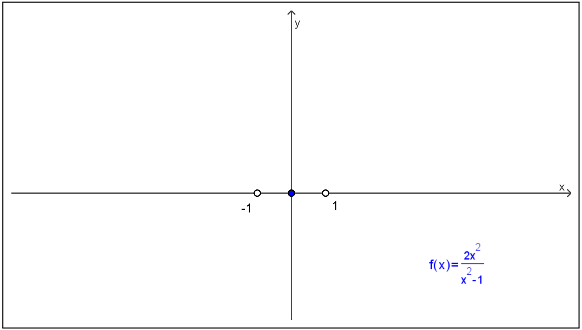
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$, concluímos que a função f é par. Logo, o seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y. A função f não é ímpar



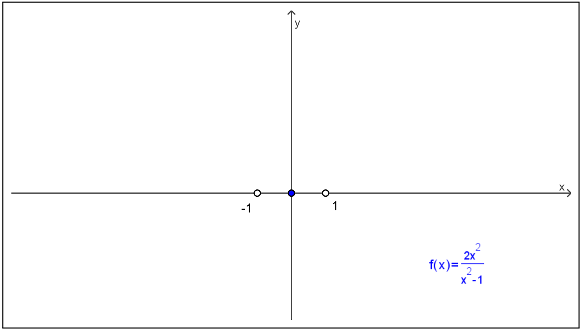
Como $f(-x) = \dfrac{2\,(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{2\,x^2}{x^2 - 1} = f(x), \forall x \in D$, concluímos que a função f é par. Logo, o seu gráfico é simétrico com relação ao eixo y. A função f não é ímpar, pois $f(-2) = 8/3 \neq -8/3 = -f(2)$.


y
x
-1
1
$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

(4) Assíntotas

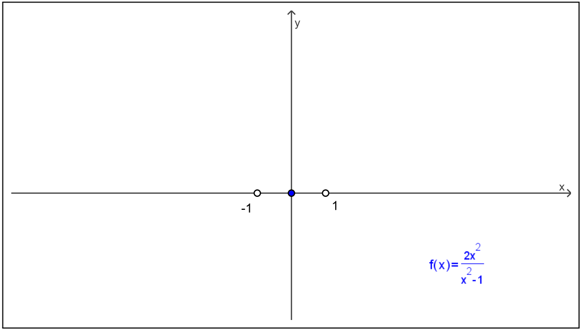


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais.



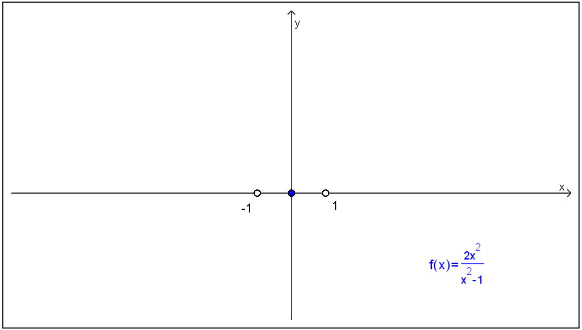
Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$



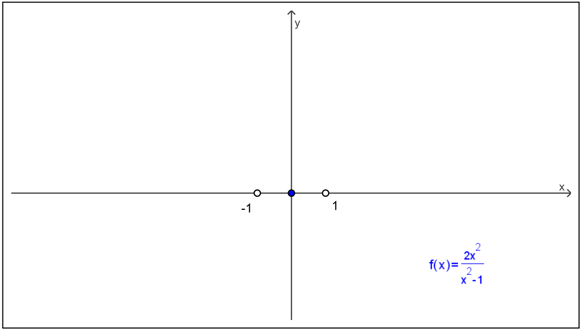
Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1}$$



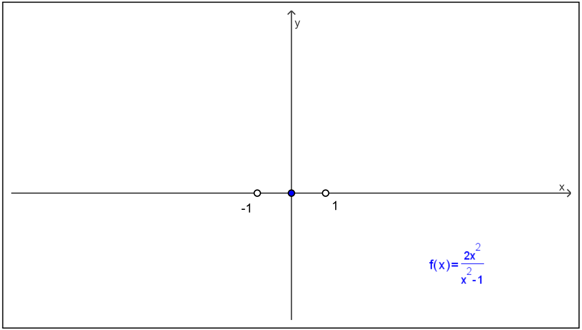
Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$$



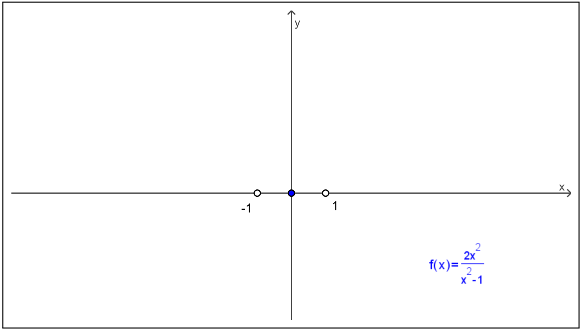
Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}}$$



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

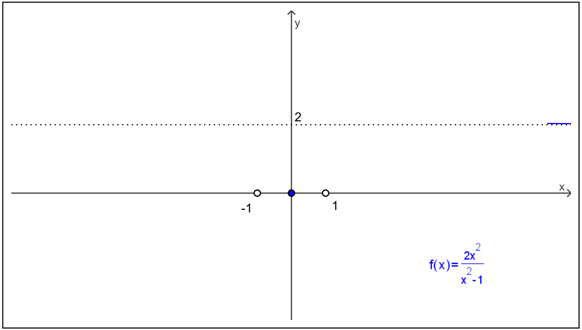
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 2^+$$



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 2^+,$$

concluímos que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

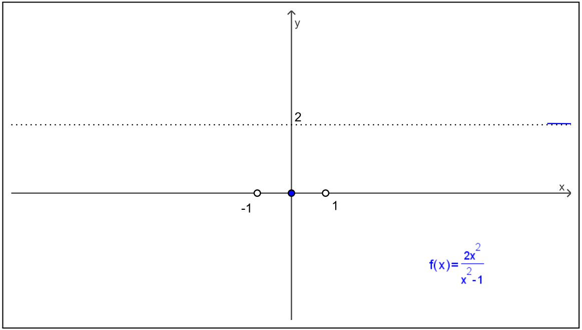


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 2^+,$$

concluímos que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

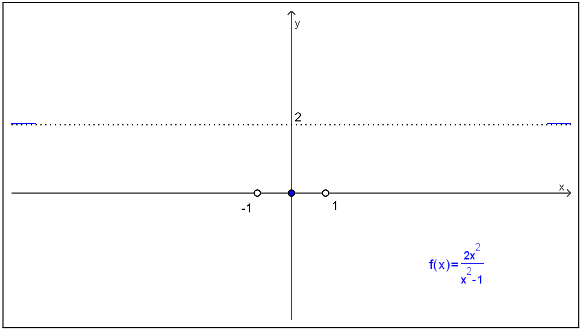
(4) Assíntotas



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 2^+,$$

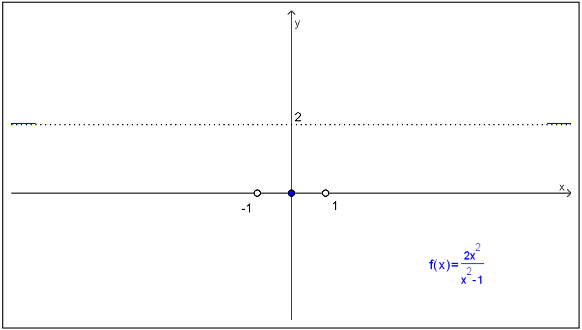
concluímos que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Por simetria, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2^+$.



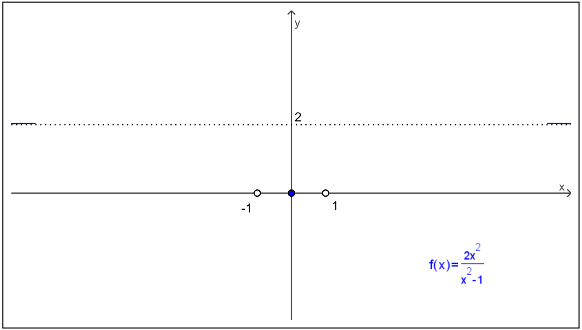
Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 2^+,$$

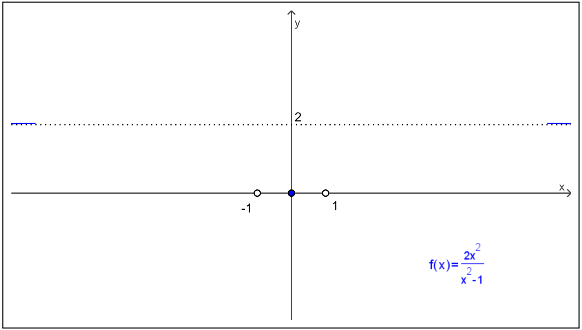
concluímos que a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Por simetria, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2^+$.



Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$.

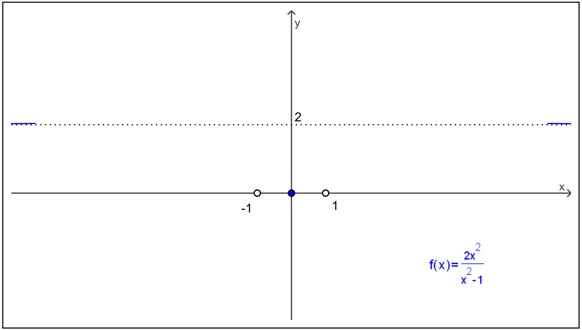


Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como



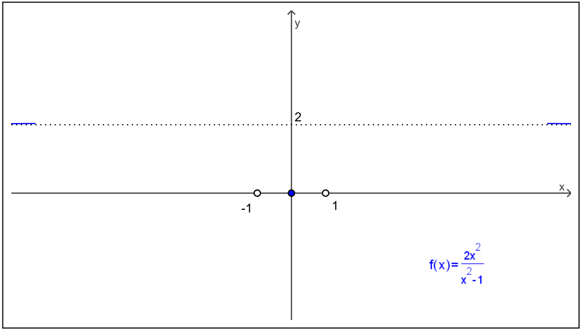
Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} =$$



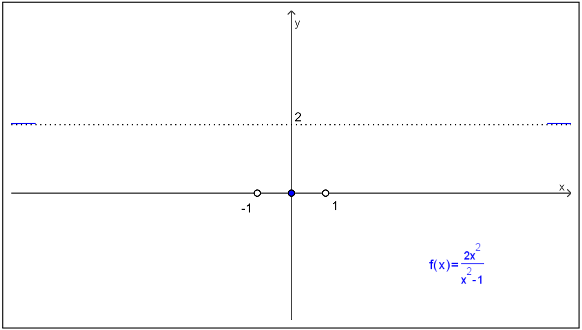
Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} =$$



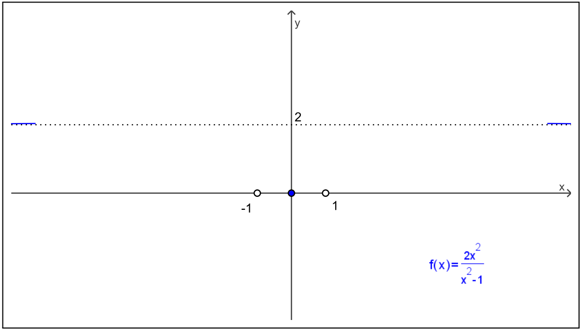
Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} =$$



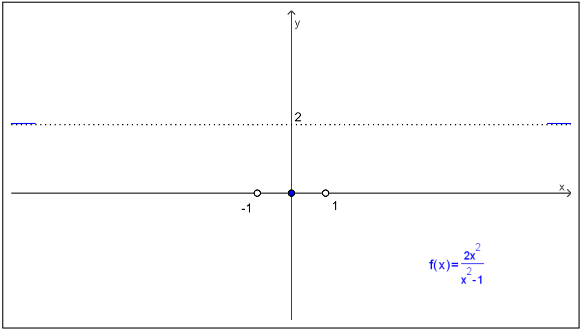
Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2-1} =$$



Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

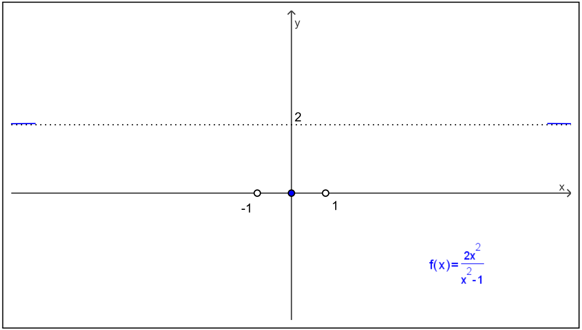
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$



Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

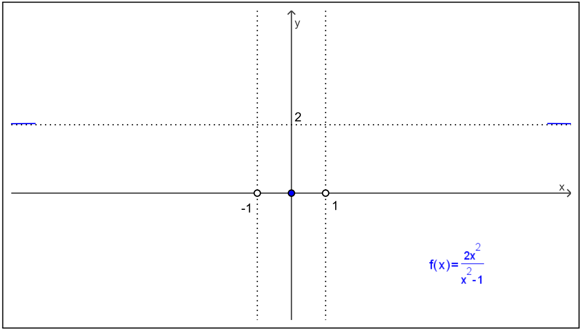
pois quando $x \to 1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$; quando $x \to 1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$.



Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

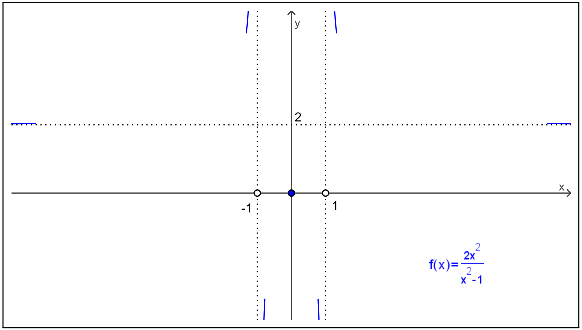
pois quando $x \to 1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$; quando $x \to 1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$. Concluímos assim que, de fato, as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.



Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois quando $x \to 1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$; quando $x \to 1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$. Concluímos assim que, de fato, as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.

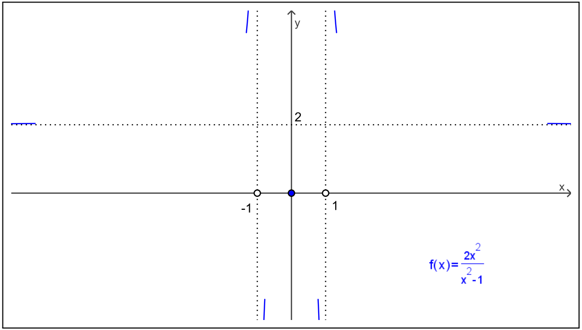


Como f é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ (como multiplicação, subtração e divisão de funções contínuas), segue-se que as candidatas à assíntota vertical são as retas $x = -1$ e $x = 1$. Agora, como

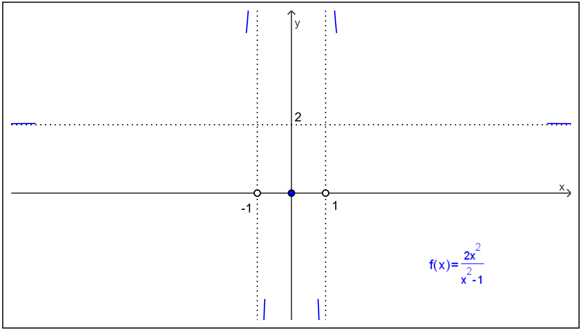
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2\,x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois quando $x \to 1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$; quando $x \to 1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^+$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^-$; quando $x \to -1^-$, $2\,x^2 \to 2$ e $x^2 - 1 \to 0^+$. Concluímos assim que, de fato, as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.

(5) Pontos onde a função não é derivável

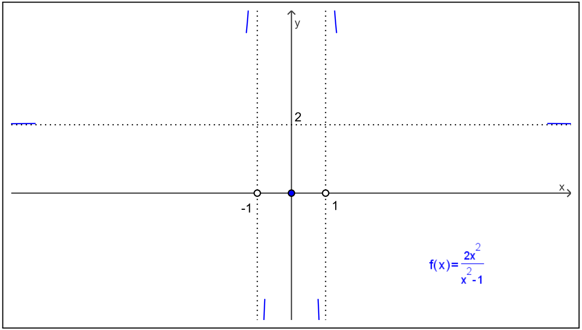


(5) Pontos onde a função não é derivável

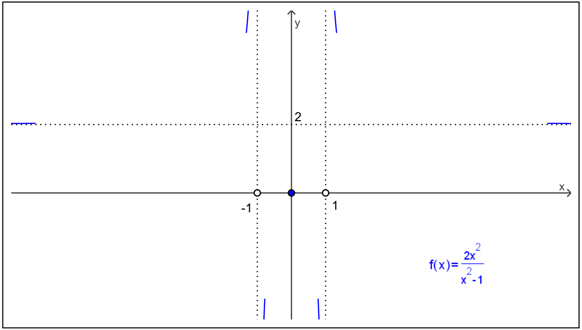


A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis.

(5) Pontos onde a função não é derivável

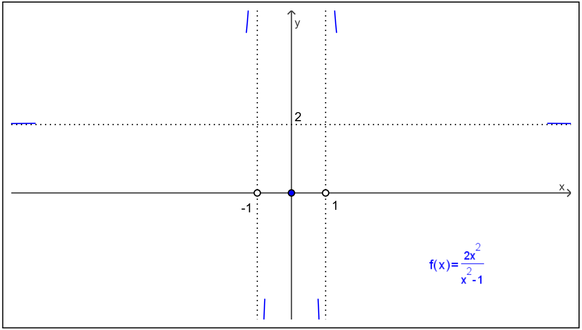


A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de f não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

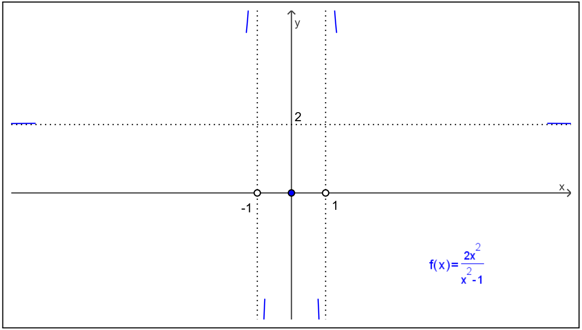


Temos que $f'(x) =$

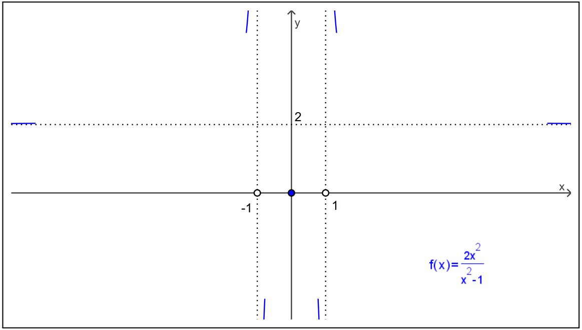
(6) Crescimento e decrescimento



Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2 - 1) - (2\,x^2)(2\,x)}{(x^2 - 1)^2}$

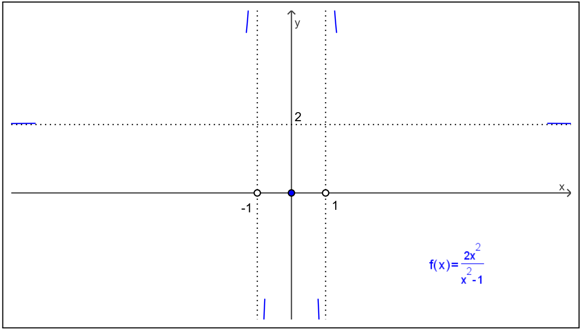


Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2 - 1) - (2\,x^2)(2\,x)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2 - 1)^2}$

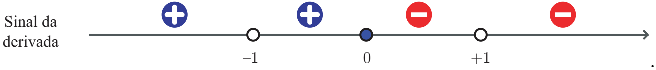


Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá

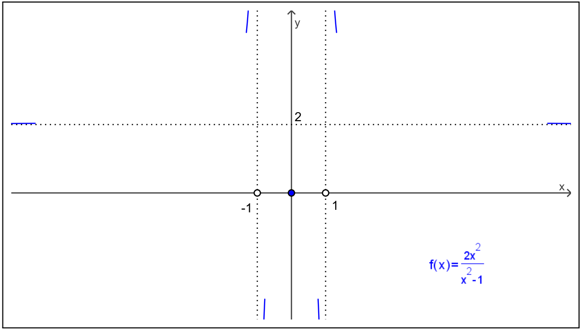
(6) Crescimento e decrescimento



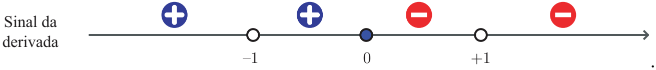
Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá



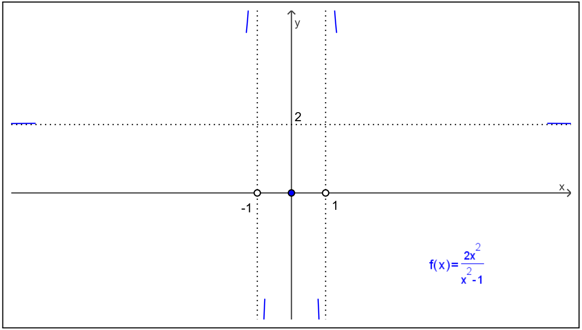
.



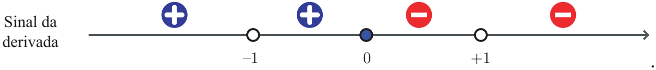
Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá



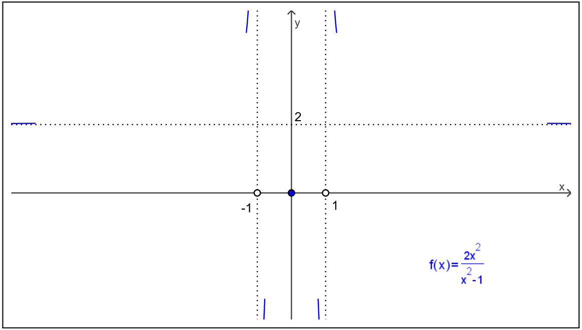
Assim, f é crescente em $(-\infty, -1)$



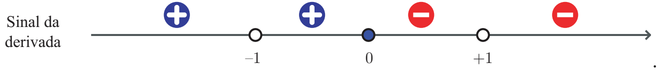
Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá



Assim, f é crescente em $(-\infty, -1)$, f é crescente em $(-1, 0)$,

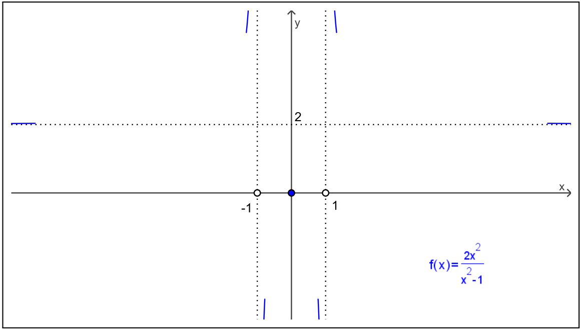


Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1) - (2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá

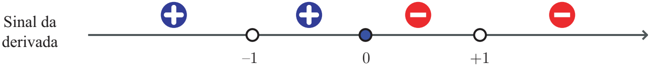


Assim, f é crescente em $(-\infty, -1)$, f é crescente em $(-1, 0)$, f é decrescente em $(0, 1)$

(6) Crescimento e decrescimento

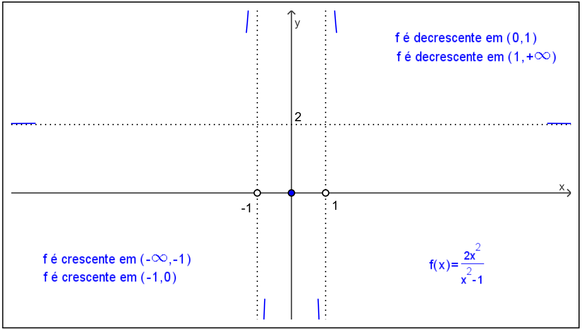


Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá

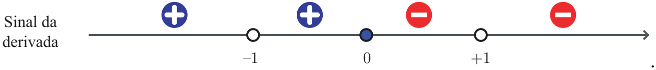


.

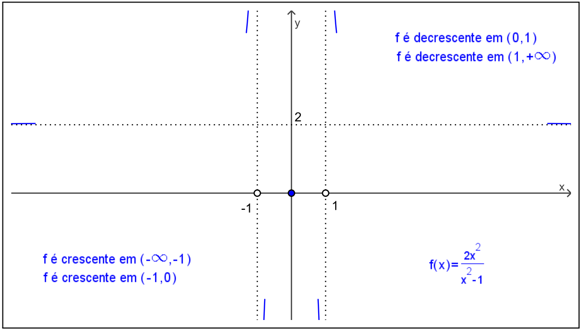
Assim, f é crescente em $(-\infty,-1)$, f é crescente em $(-1,0)$, f é decrescente em $(0,1)$ e f é decrescente em $(1,+\infty)$.

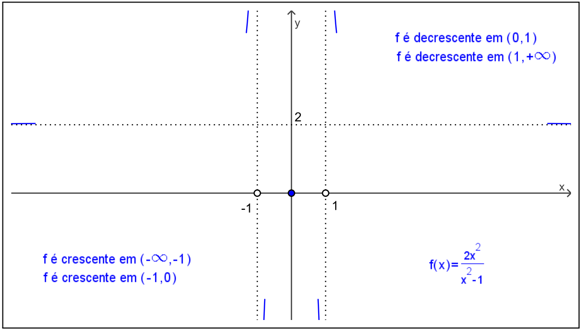


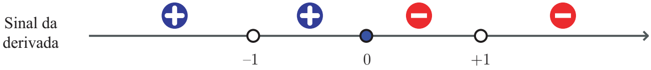
Temos que $f'(x) = \dfrac{(4\,x\,)(x^2-1)-(2\,x^2)(2\,x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4\,x}{(x^2-1)^2}$. O estudo do sinal da derivada nos dá

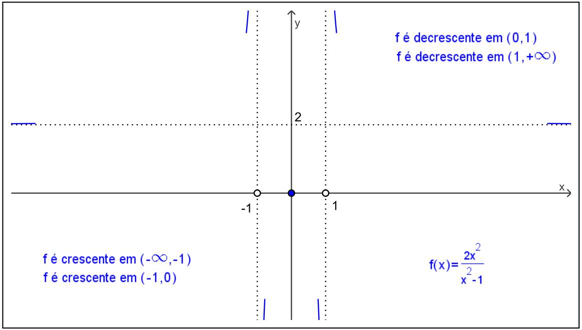


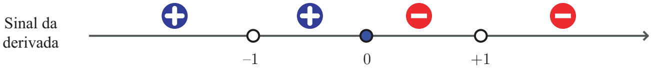
Assim, f é crescente em $(-\infty,-1)$, f é crescente em $(-1,0)$, f é decrescente em $(0,1)$ e f é decrescente em $(1,+\infty)$.


y
f é decrescente em (0,1)
f é decrescente em (1,+∞)
2
x
-1
1
f é crescente em (-∞,-1)
f é crescente em (-1,0)
$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$

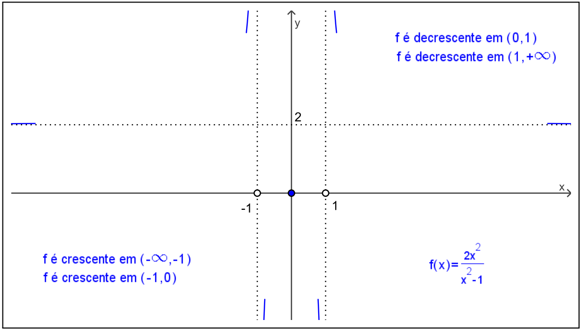

y
f é decrescente em (0,1)
f é decrescente em (1,+∞)
2
x
-1
1
f é crescente em (-∞,-1)
f é crescente em (-1,0)
f(x)= 2x^2 / (x^2 -1)

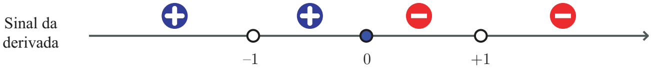

Sinal da derivada
−1
0
+1



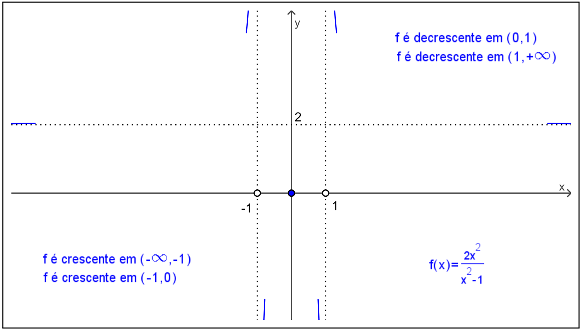


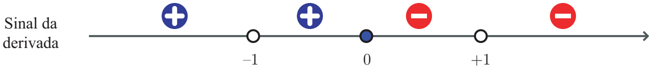
Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 0$.





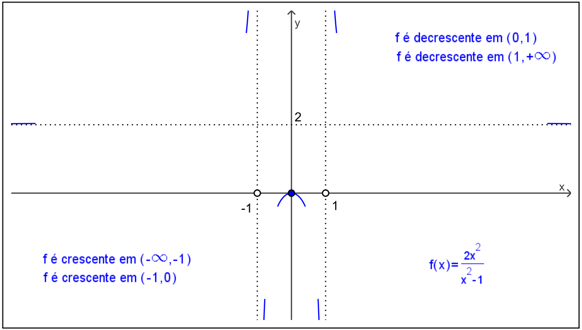
Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 0$. Como, em $p = 0$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$

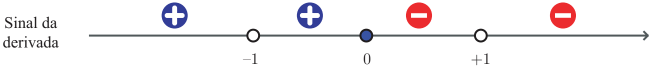




Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 0$. Como, em $p = 0$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = 0$ é ponto de máximo local de f em D.

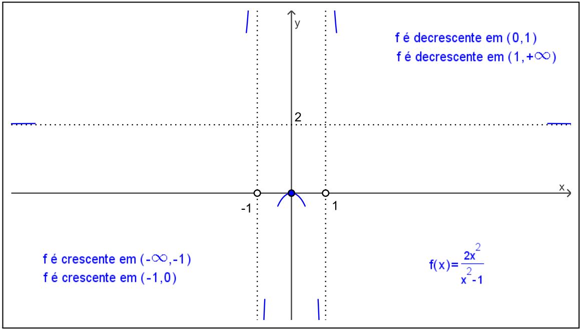
(7) Máximos e mínimos locais



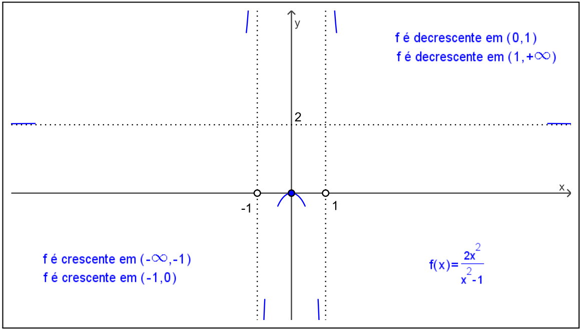


Vimos no item anterior que o único ponto crítico de f é $p = 0$. Como, em $p = 0$, o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, concluímos pelo teste da derivada primeira que $p = 0$ é ponto de máximo local de f em D.

(8) Concavidade e pontos de inflexão

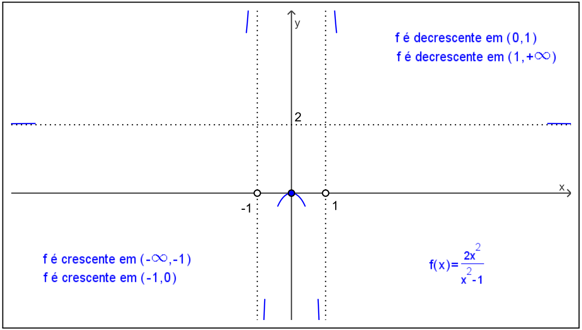


(8) Concavidade e pontos de inflexão

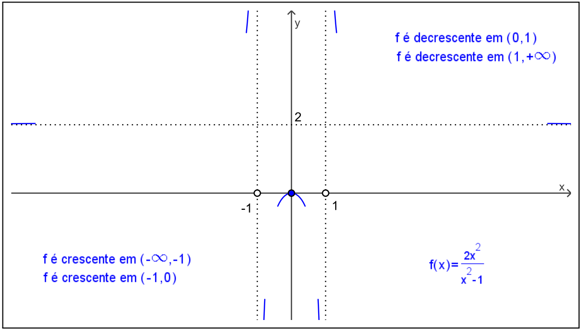


Temos que $f''(x) =$

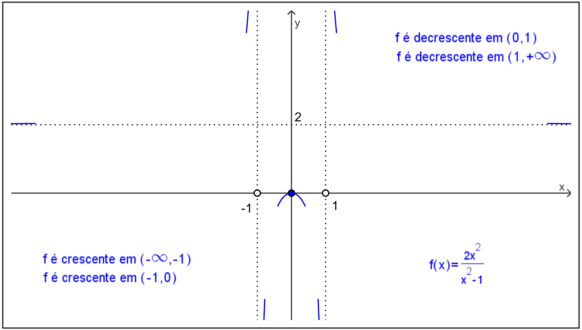
(8) Concavidade e pontos de inflexão



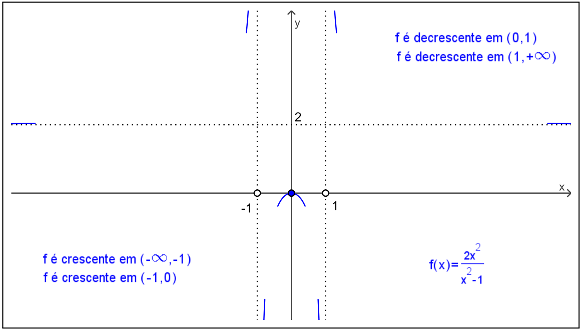
Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4}$



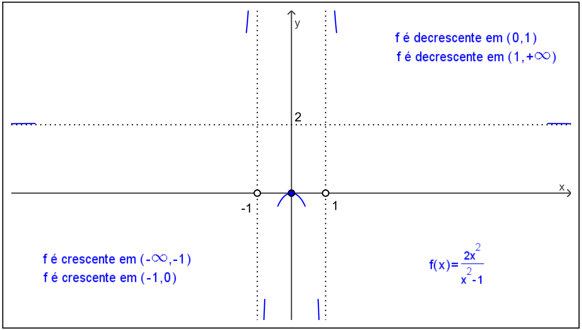
Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2 + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$



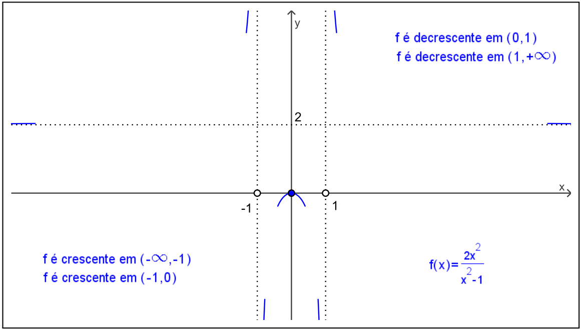
Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1.



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

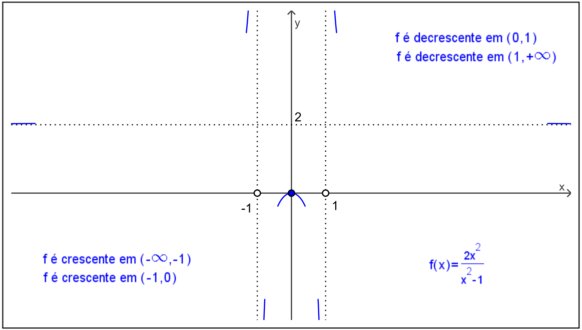
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

(8) Concavidade e pontos de inflexão



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

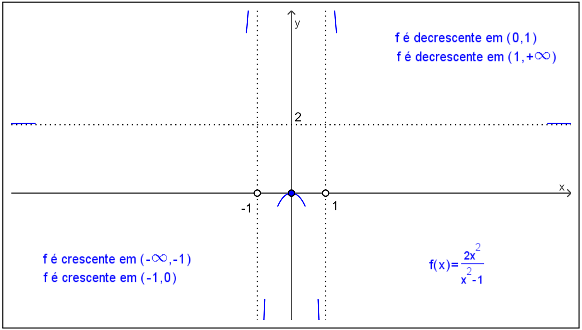
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

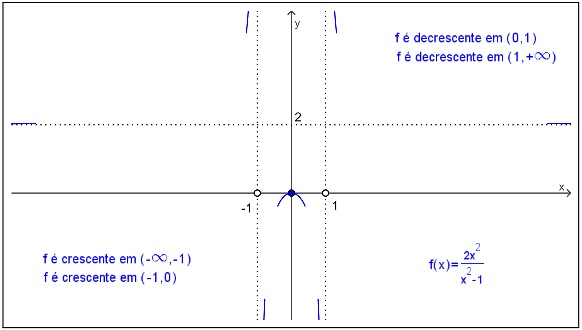
Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

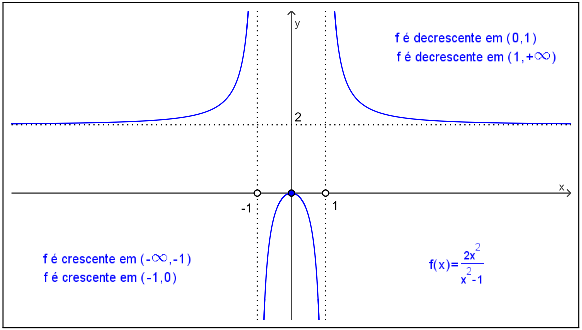
Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty,-1)$, f é côncava para baixo em $(-1,1)$



Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$, f é côncava para baixo em $(-1, 1)$ e f é côncava para cima em $(1, +\infty)$.

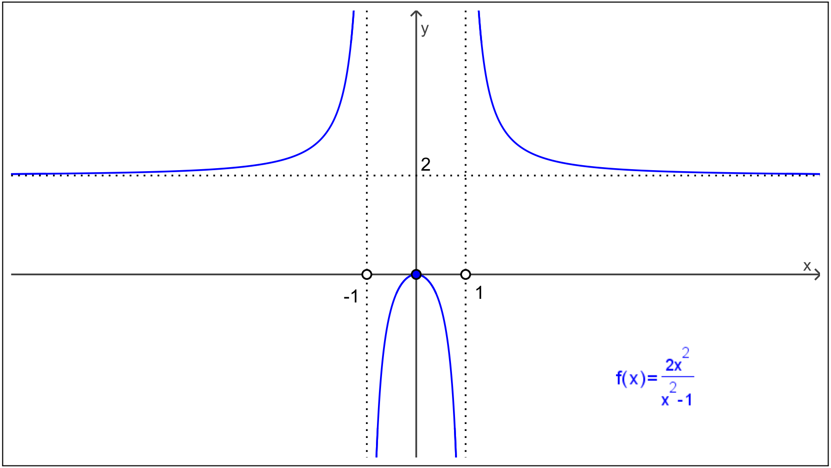


Temos que $f''(x) = \dfrac{(-4)((x^2-1)^2) - (-4\,x)(2\,(x^2-1)\,2\,x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12\,x^2+4}{(x^2-1)^3}$. Como $12\,x^2+4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal da derivada segunda é o sinal de x^2-1. Assim,

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \qquad \text{e} \qquad f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

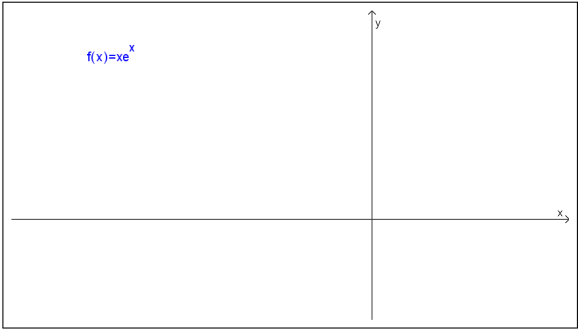
Consequentemente, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$, f é côncava para baixo em $(-1, 1)$ e f é côncava para cima em $(1, +\infty)$.

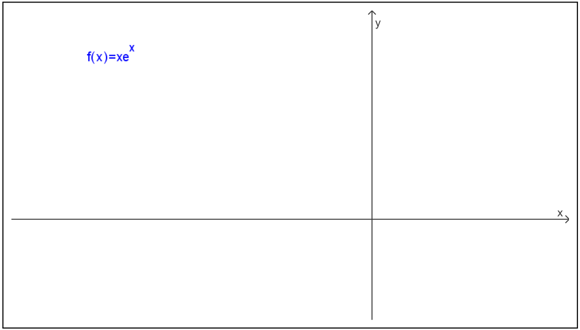
Pronto!



Seguindo o roteiro, faça um esboço do gráfico de $y = f(x) = x\, e^x$.

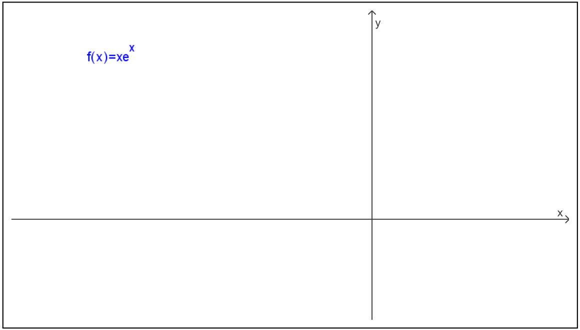
(1) Domínio da função





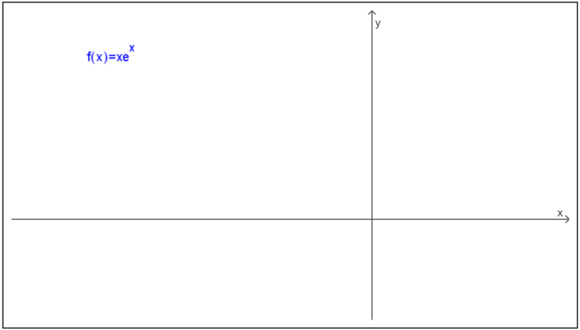
O domínio de f é

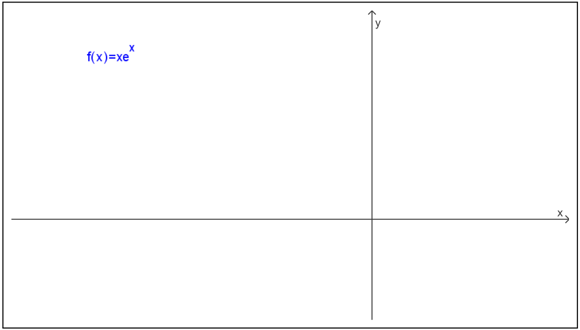
(1) Domínio da função



O domínio de f é $D = \mathbb{R}$.

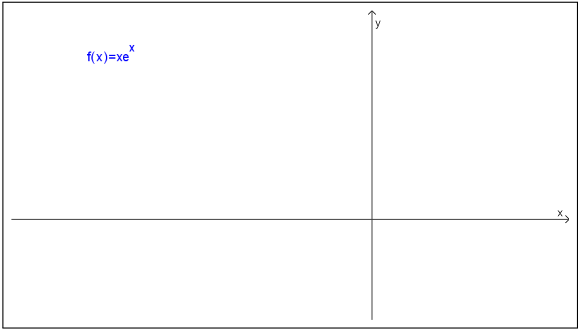
(2) Interseção com os eixos coordenados





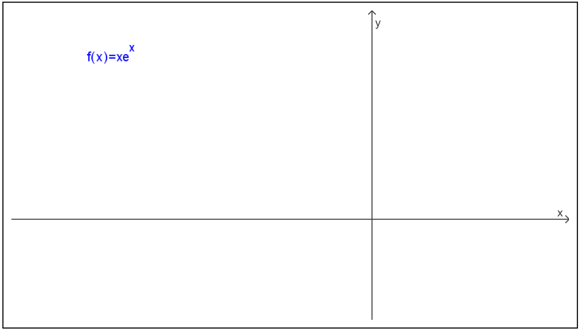
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se

(2) Interseção com os eixos coordenados



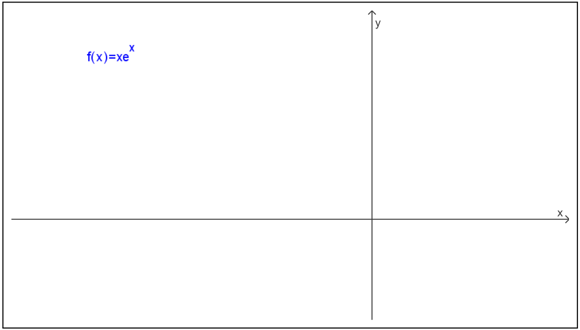
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

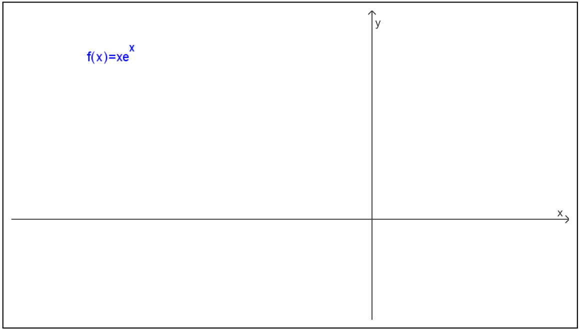


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$

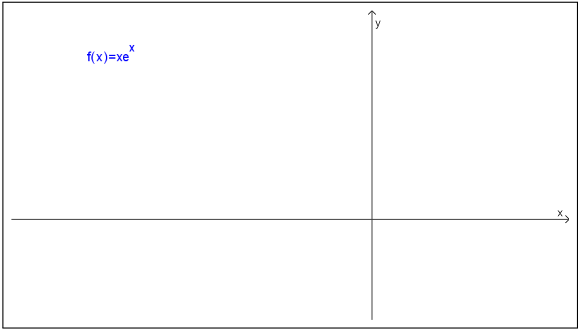
(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto

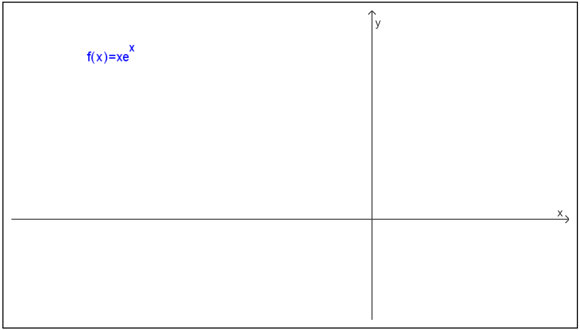


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$.



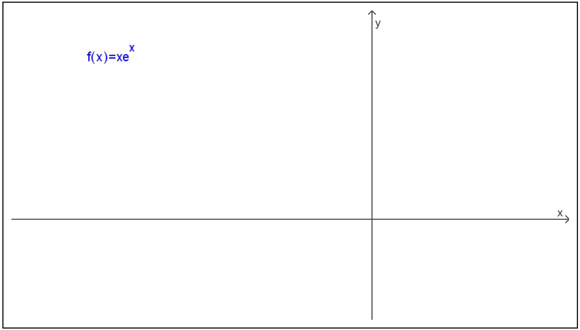
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se

(2) Interseção com os eixos coordenados



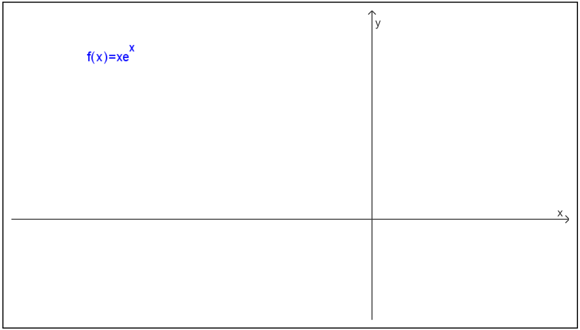
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$.

(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

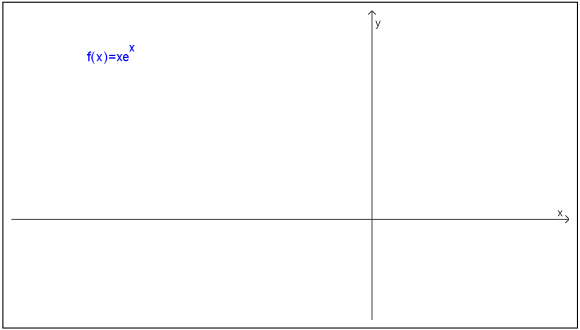
$$f(x) = 0$$



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

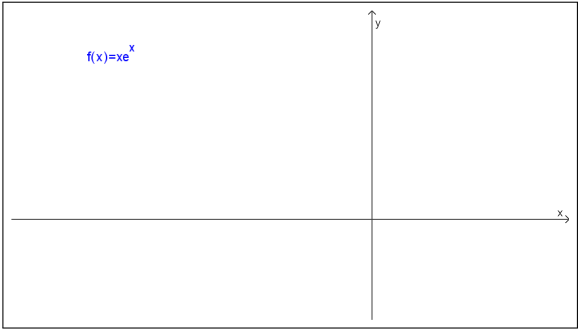
$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\, e^x = 0$$

(2) Interseção com os eixos coordenados



A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\, e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

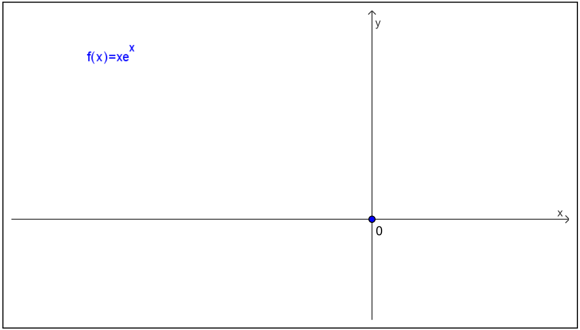


A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\, e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.

(2) Interseção com os eixos coordenados

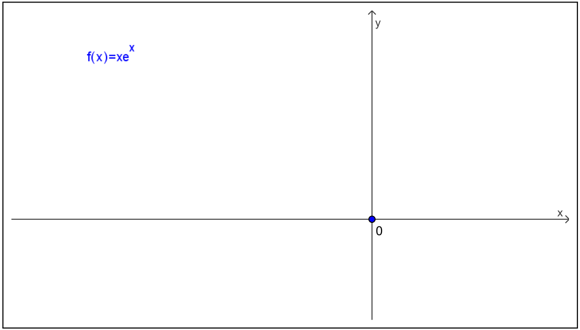


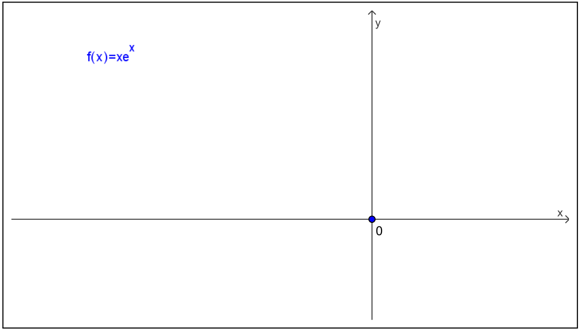
A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

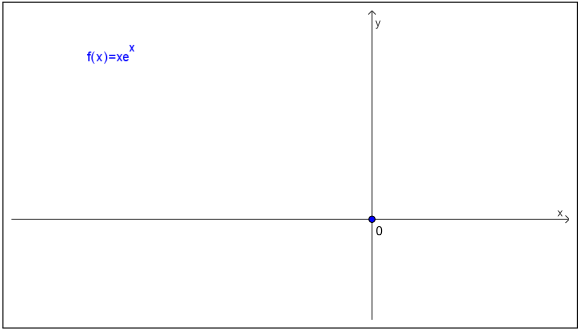
Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x também no ponto $(0, 0)$.

(3) Simetrias

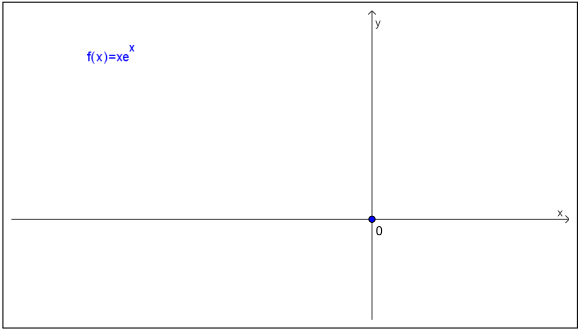




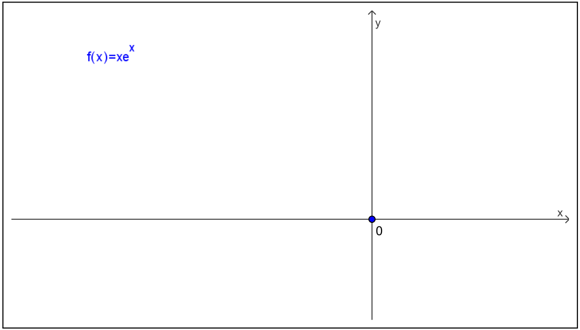
A função *f* não é par



A função f não é par, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq e^1 = f(1)$.

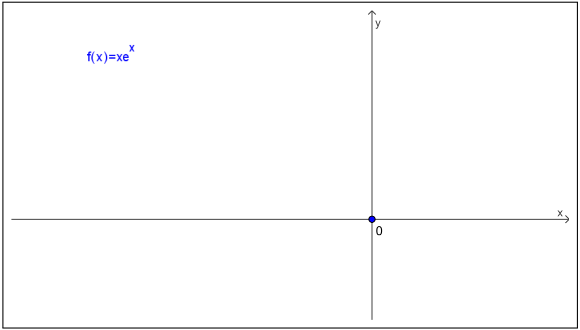


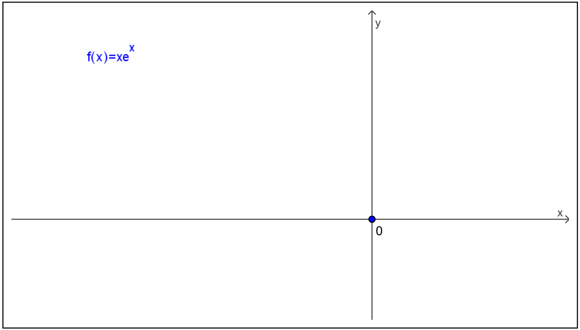
A função f não é par, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq e^{1} = f(1)$. A função f não é ímpar



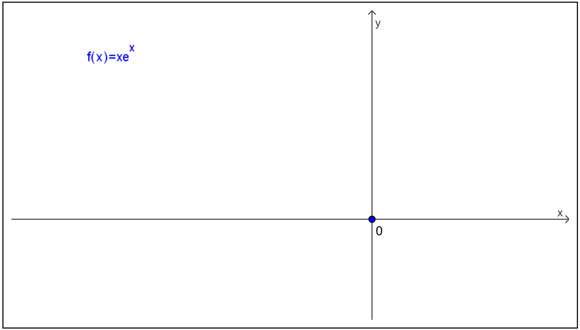
A função f não é par, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq e^{1} = f(1)$. A função f não é ímpar, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq -e^{1} = -f(1)$.

(4) Assíntotas



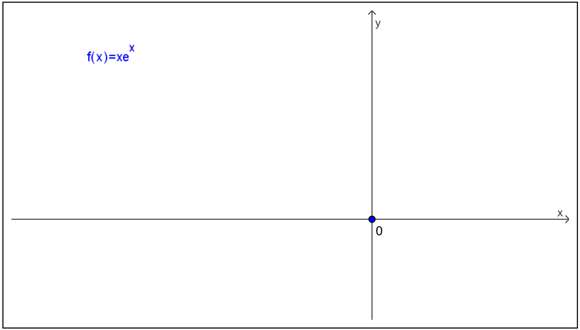


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais.



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

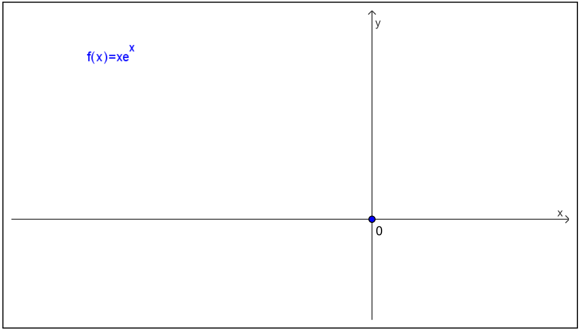
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

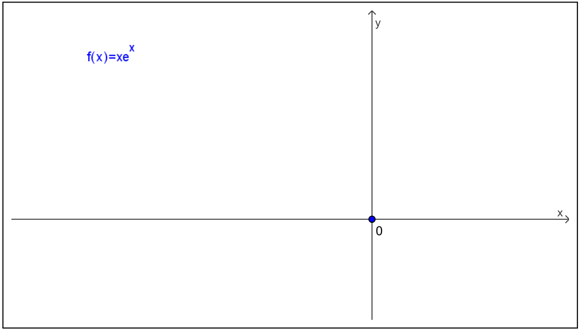
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x\, e^x)$$

(4) Assíntotas



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\,e^{x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

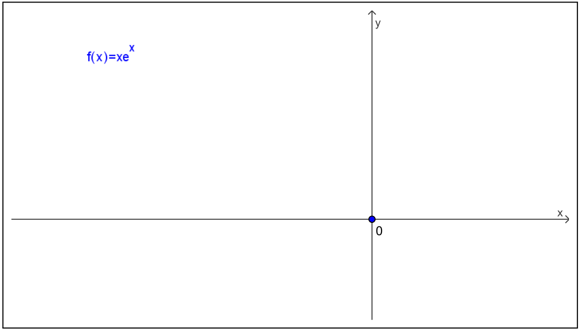


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x\, e^x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital.

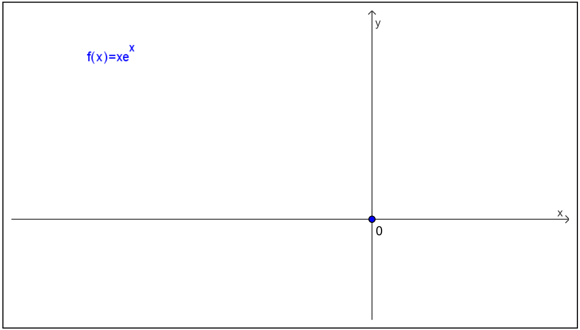
(4) Assíntotas



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x\, e^x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

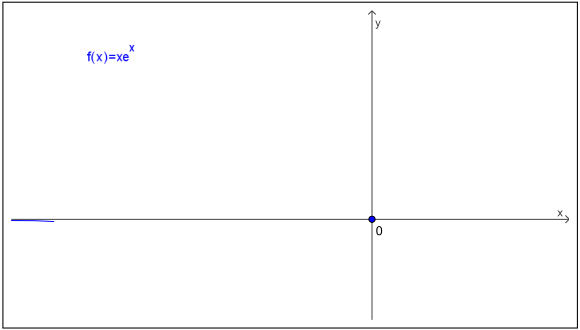
onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital.



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\, e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

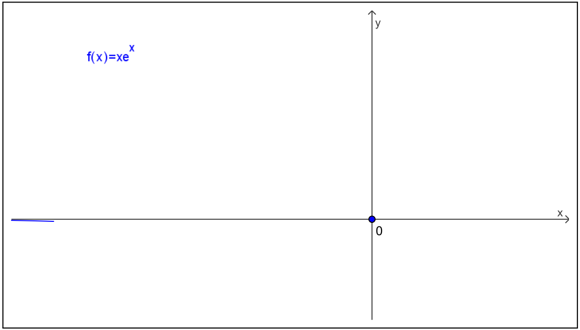
onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\, e^{x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^{-},$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

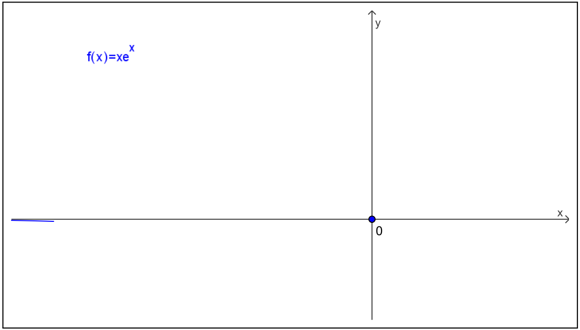


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x\, e^x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Observe também que, $\lim_{x \to +\infty} (x\, e^x) =$

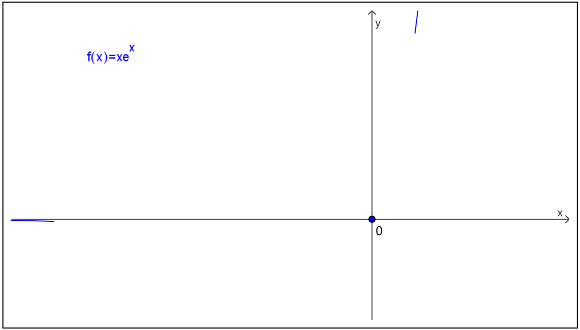
(4) Assíntotas



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\,e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

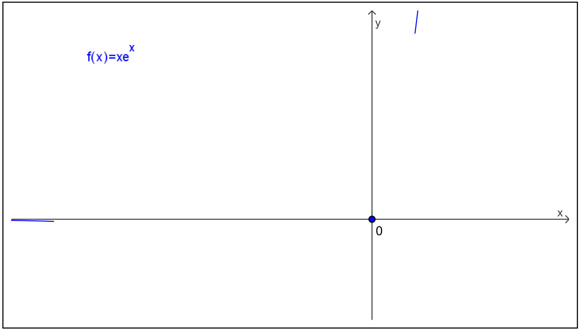
onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Observe também que, $\lim_{x\to+\infty}(x\,e^x) = +\infty$.



Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\,e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Observe também que, $\lim_{x\to+\infty}(x\,e^x) = +\infty$.

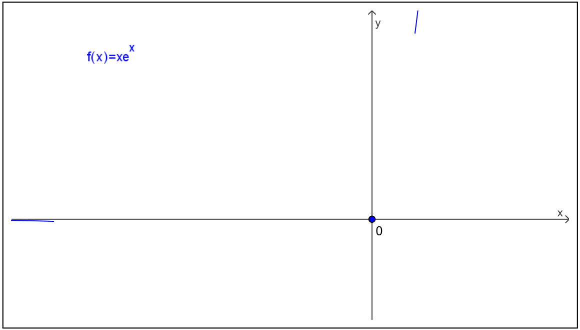


Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

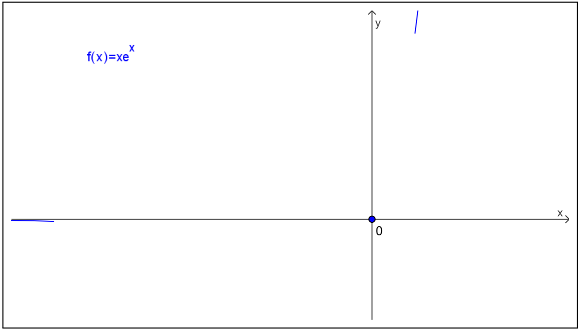
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x\, e^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0^-,$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Concluímos assim que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Observe também que, $\lim_{x\to+\infty}(x\, e^x) = +\infty$. A função f não possui assíntotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

(5) Pontos onde a função não é derivável

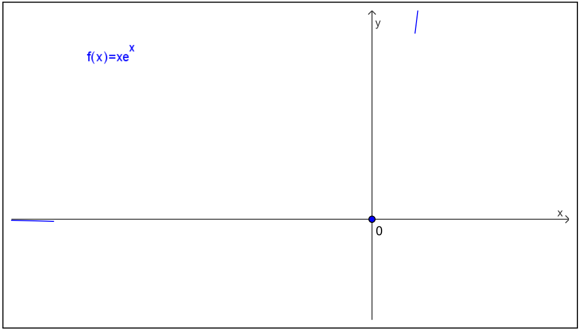


(5) Pontos onde a função não é derivável



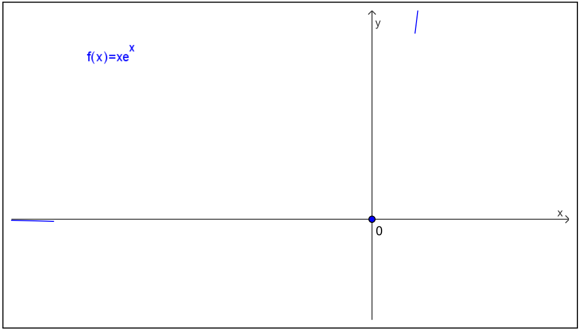
A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis.

(5) Pontos onde a função não é derivável

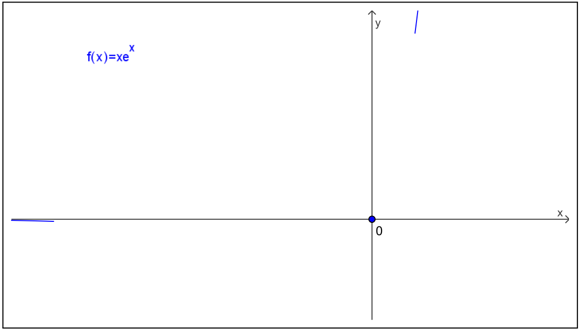


A função f é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de f não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

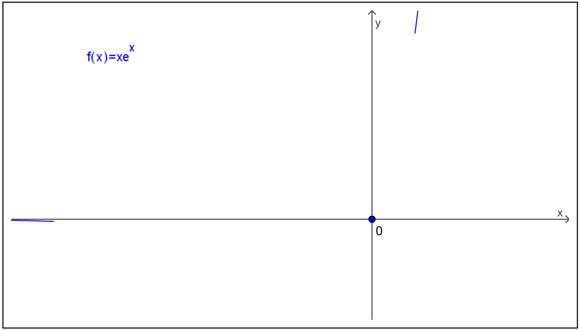
(6) Crescimento e decrescimento



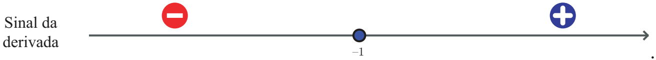
(6) Crescimento e decrescimento

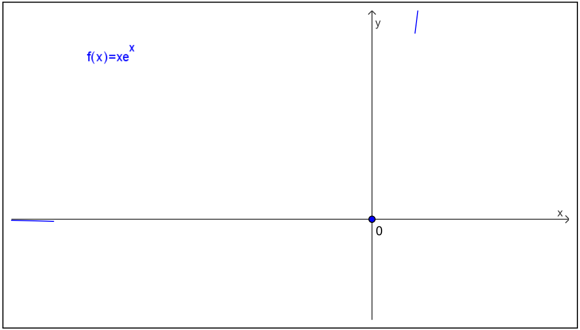


Na aula passada vimos que $f'(x) = (x + 1)\, e^x$

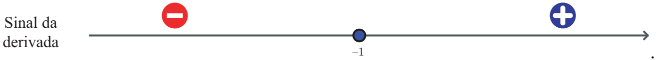


Na aula passada vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada de f:

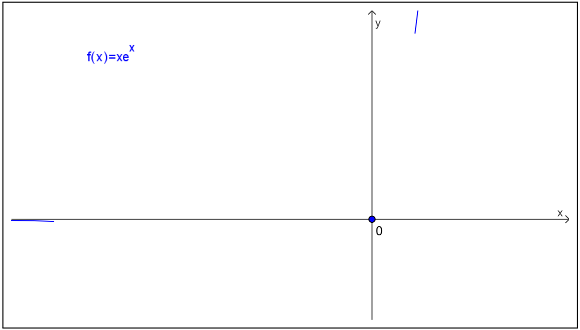




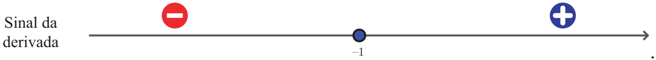
Na aula passada vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada de f:



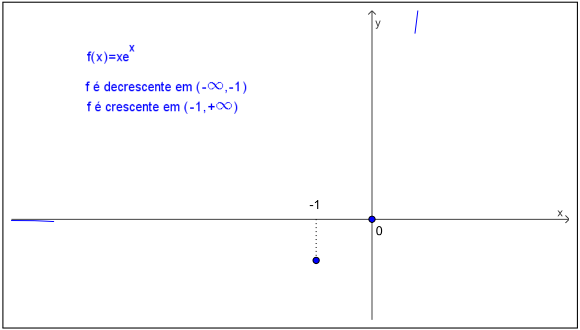
Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$.



Na aula passada vimos que $f'(x) = (x + 1)\, e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada de f:

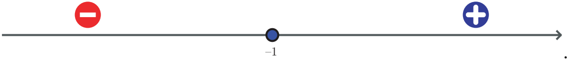


Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

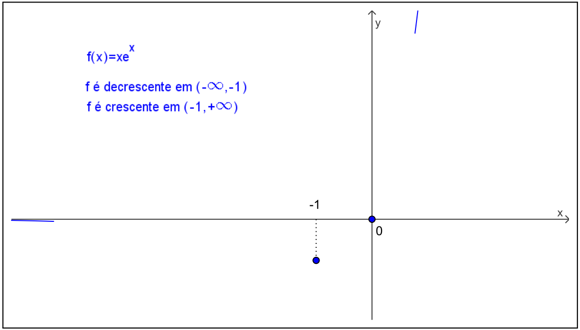


Na aula passada vimos que $f'(x) = (x+1)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada de f:

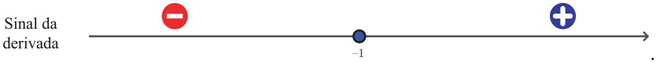
Sinal da derivada



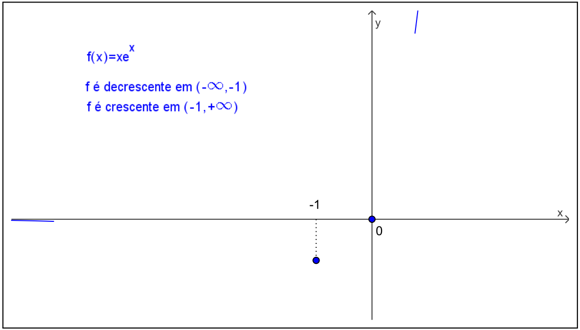
Como $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -1)$, vemos que f é decrescente em $(-\infty, -1)$. Como $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$, vemos que f é crescente em $(-1, +\infty)$.

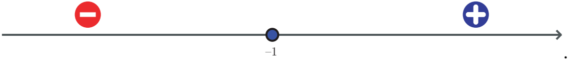


f(x)=xe^x
f é decrescente em (-∞,-1)
f é crescente em (-1,+∞)
y
x
-1
0

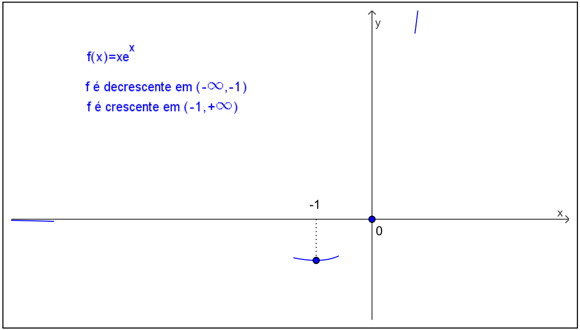


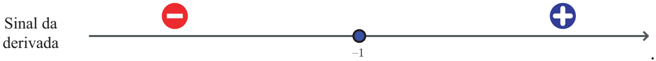
Sinal da derivada
−1





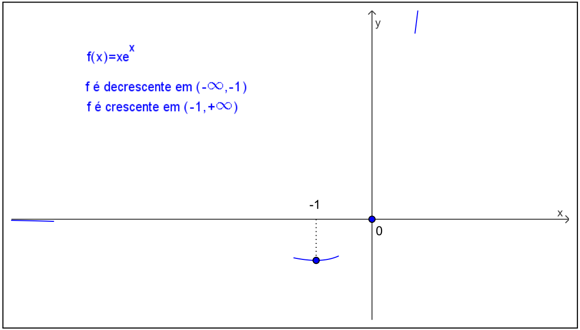
Na última aula vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f e que, pelo teste da derivada primeira, $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

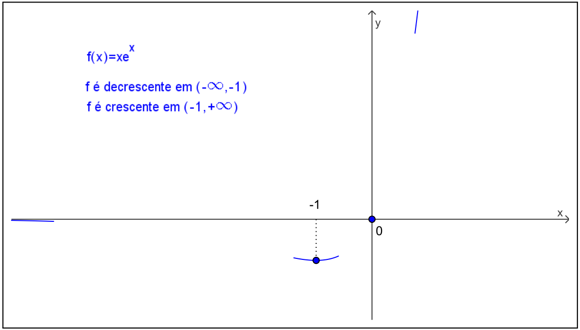




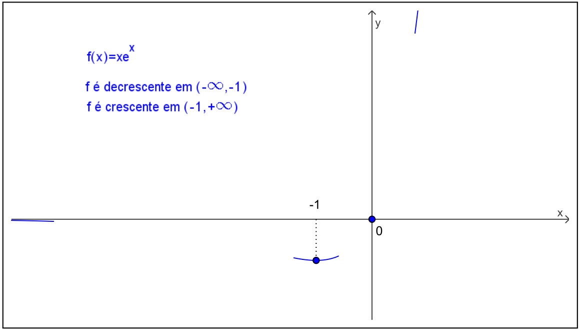
Na última aula vimos que $p = -1$ é o único ponto crítico de f e que, pelo teste da derivada primeira, $p = -1$ é ponto de mínimo local de f em $\mathbb{R}$.

(8) Concavidade e pontos de inflexão

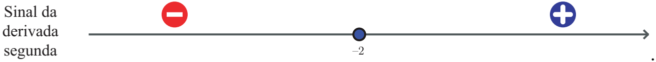


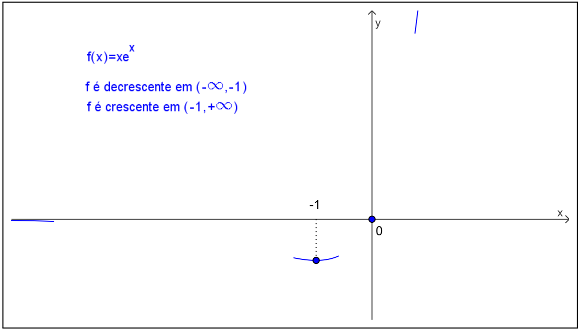


Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$

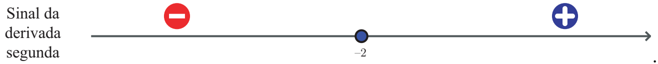


Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:

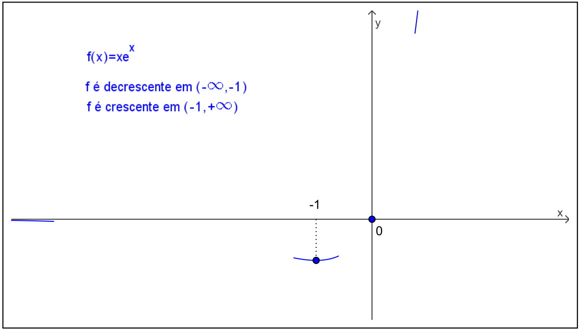




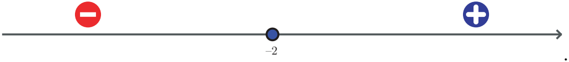
Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:



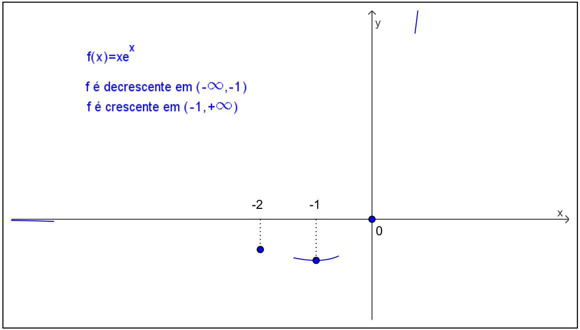
Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$.



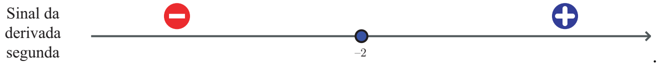
Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:



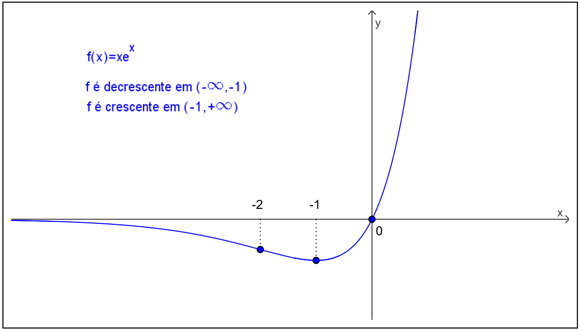
Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Consequentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.



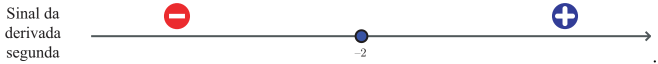
Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Consequentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.



Na aula passada vimos que $f''(x) = (x+2)\,e^x$ e já fizemos o estudo do sinal da derivada segunda de f:



Assim, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e f é côncava para cima no intervalo $(-2, +\infty)$. Consequentemente, $p = -2$ é o único ponto de inflexão de f.

Pronto!