# Cálculo I -A-

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 23

Versão 0.9

# Integrais indefinidas

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) =$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x)$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com $C$ uma constante real.

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = \cos(x)$?

Resposta: $F(x) = \operatorname{sen}(x) + C$, com $C$ uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) =$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com $C$ uma constante real.

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = e^x$?

Resposta: $F(x) = e^x + C$, com $C$ uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$.

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) =$

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com $C$ uma constante real.

# Exemplo

Qual é a função $y = F(x)$ cuja derivada é $y = f(x) = x$?

Resposta: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, com $C$ uma constante real.

Notação: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

# Mais geralmente . . .

Escrevemos $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se $\displaystyle\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

# Exemplo

Se $k \neq -1$, então $\displaystyle\int x^k \, dx =$

# Exemplo

Se $k \neq -1$, então $\displaystyle\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$

# Cuidado!

Se $k = -1$, então $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx =$

# Cuidado!

Se $k = -1$, então $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] =$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right]$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] =$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right]$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1)$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \dfrac{1}{x}$.

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{1}{x}$. Assim,

# Cuidado!

$$\text{Se } k = -1, \text{ então } \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

De fato! Para $x > 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x) + C\right] = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Para $x < 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(-x) + C\right] = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Em qualquer caso, $\frac{d}{dx}\left[\ln(|x|) + C\right] = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$

# Integrais indefinidas básicas

- $\int x^k \, dx =$ , para $k \neq -1$

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, para $k \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$.

# Integrais indefinidas básicas

- $\int \cos(x)\, dx =$
- 
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- 
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\int \operatorname{sen}(x)\,dx =$
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx =$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec(x)\,\operatorname{tg}(x)\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \sec(x)\,\operatorname{tg}(x)\,dx = \sec(x) + C.$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx =$

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\,\operatorname{cotg}(x)\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotg}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\,\operatorname{cotg}(x)\,dx = -\operatorname{cossec}(x) + C.$

# Integrais indefinidas básicas

- $\int \cosh(x)\, dx =$
- 
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
-
-
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx =$
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- 
- 

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx =$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\,\operatorname{tgh}(x)\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\,\operatorname{tgh}(x)\,dx = -\operatorname{sech}(x) + C.$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx =$

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\,\operatorname{cotgh}(x)\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C.$

- $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\,\operatorname{cotgh}(x)\,dx = -\operatorname{cossech}(x) + C.$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
-
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
-

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

# Integrais indefinidas básicas

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

# Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\int [f(x) + g(x)]\, dx =$
-

# Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

-

# Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$
- $\displaystyle\int [c \cdot f(x)]\, dx =$ , onde $c$ é uma constante.

# Duas propriedades de integrais indefinidas

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$
- $\displaystyle\int [c \cdot f(x)]\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$, onde $c$ é uma constante.

# Exercício

Calcule $\int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx$.

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução.

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx \quad =$$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \left( \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 - 2 \right) \, dx \quad = \quad \int \left( x^{2/3} - 2 \right) \, dx$$

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx \quad = \quad \int \left( x^{2/3} - 2 \right) \, dx \quad = \quad \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx$$

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx &= \int \left( x^{2/3} - 2 \right) \, dx = \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx \\ &= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C \end{aligned}$$

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx &= \int \left( x^{2/3} - 2 \right) \, dx = \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx \\ &= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \end{aligned}$$

# Exercício

$$\text{Calcule } \int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}
\int \left( \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 \right) \, dx &= \int \left( x^{2/3} - 2 \right) \, dx = \int x^{2/3} \, dx - \int 2 \, dx \\
&= \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - 2\,x + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\,x + C \\
&= \frac{3\,x^{5/3}}{5} - 2\,x + C.
\end{aligned}$$

# Exercício

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução.

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx \quad =$$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx \quad = \quad \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx$$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx$$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx\end{aligned}$$

# Exercício

$$\text{Calcule} \int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx.$$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+(\cosh^2(x)-1)}\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx \\ &= \int \operatorname{sech}^2(x)\,dx = \operatorname{tgh}(x)+C.\end{aligned}$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução.

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y =$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C$

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$.

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$.

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

# Exemplo

Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-3}\, dx.$$

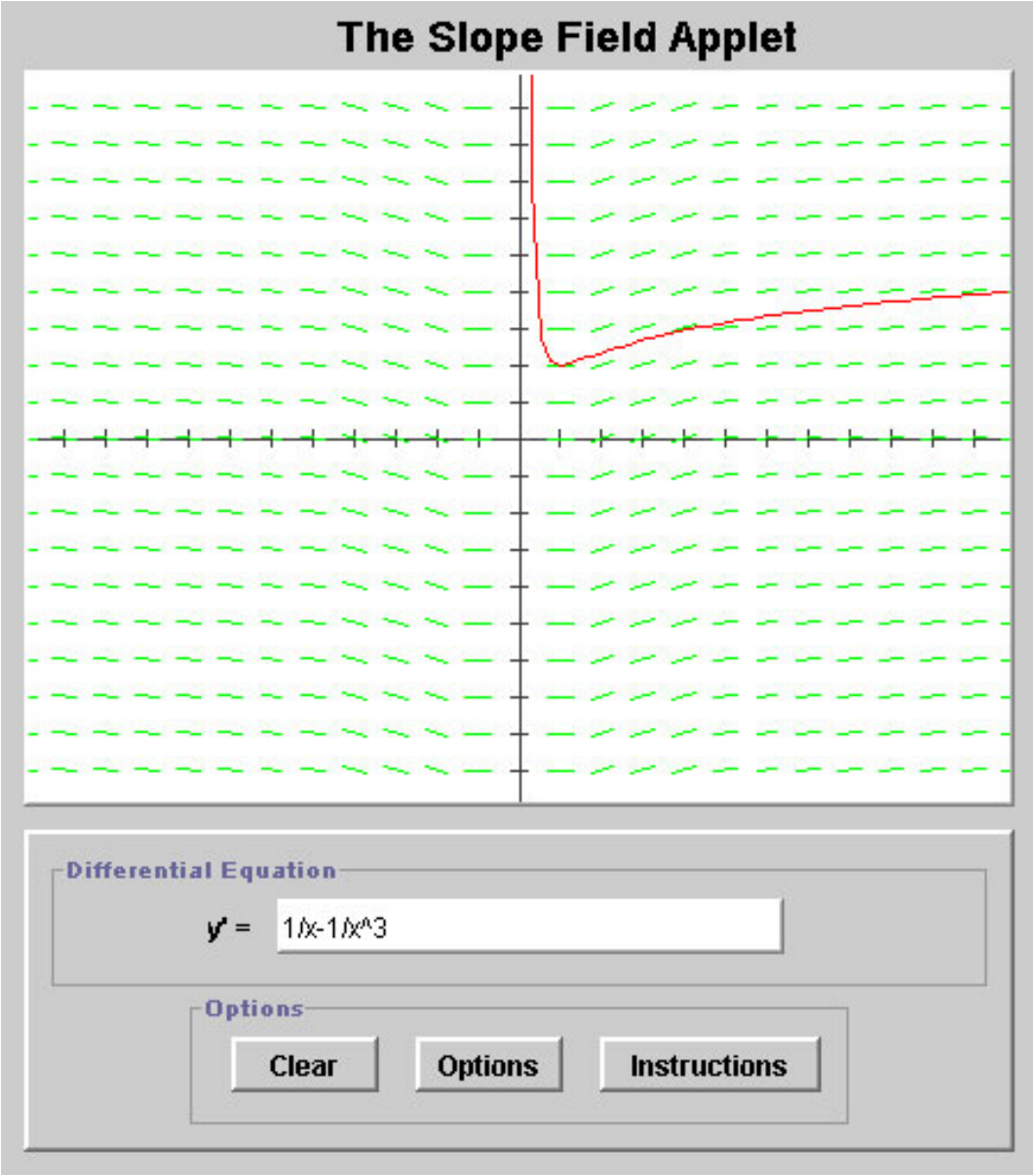
Assim,

$$y = \ln(|x|) - \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + C.$$

Como $y(1) = 2$, segue-se que $2 = \ln(|1|) + 1/(2\,(1)^2) + C = 0 + 1/2 + C = 1/2 + C$. Desta maneira, $C = 2 - 1/2 = 3/2$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \ln(|x|) + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{3}{2}.$$

# Interpretação geométrica



# Exercício

# Roteiro

(1) Domínio da função.

(2) Interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

(3) Simetrias: função par, função ímpar, função periódica.

(4) Assíntotas horizontais e verticais.

(5) Pontos onde a função não é derivável.

(6) Intervalos de crescimento e decrescimento.

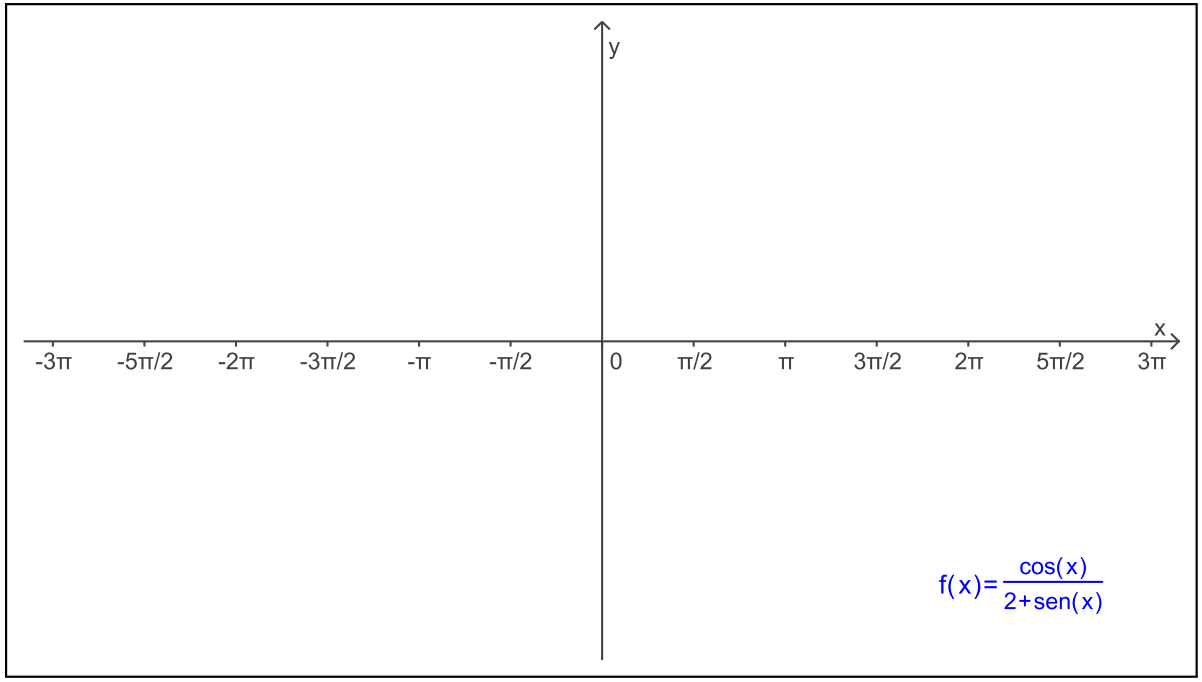
(7) Máximos e mínimos locais.

(8) Concavidade e pontos de inflexão.

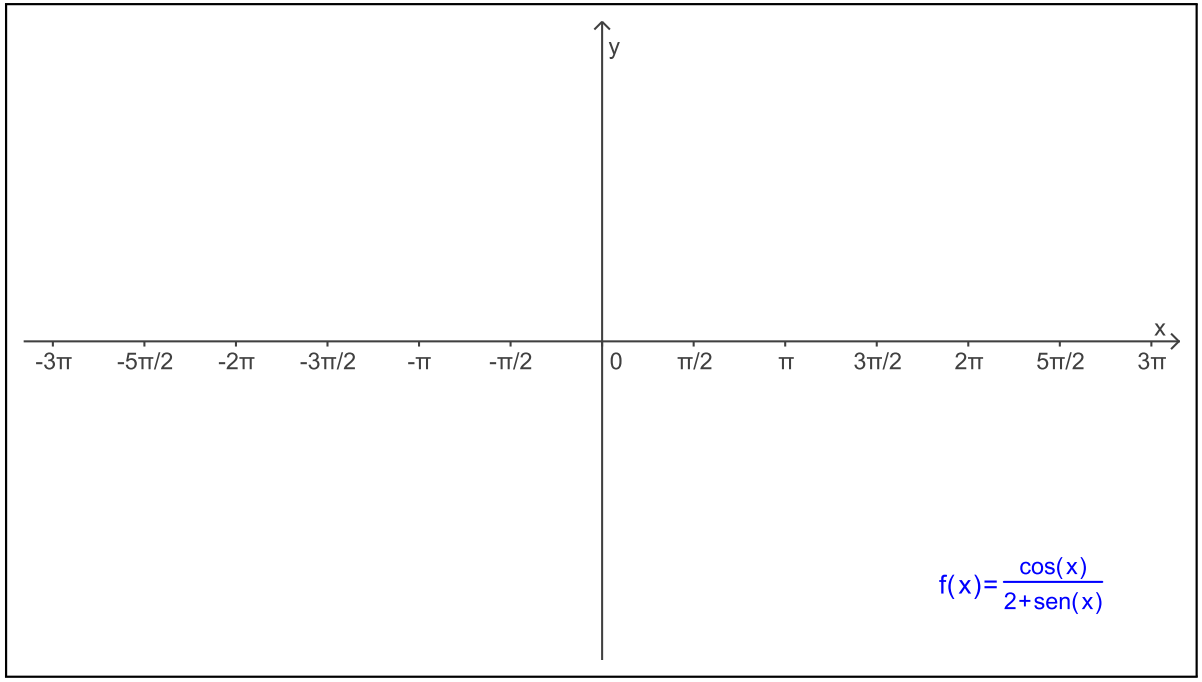
# Exemplo

$$y = f(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)}$$

# (1) Domínio da função

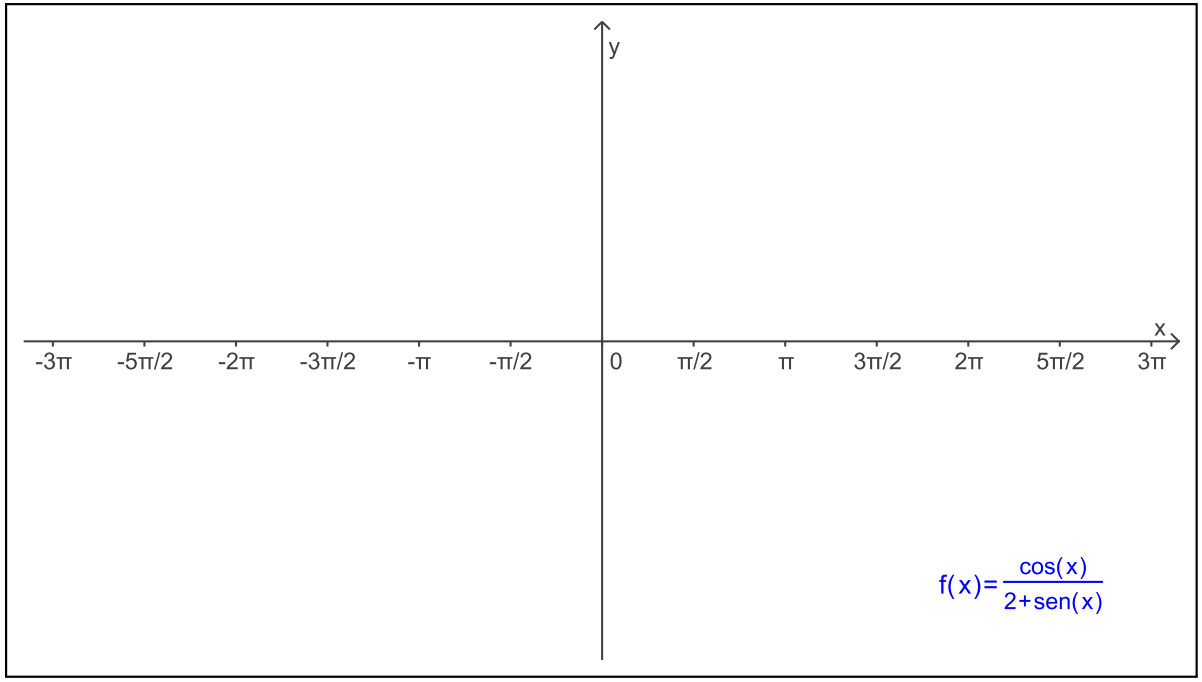


# (1) Domínio da função



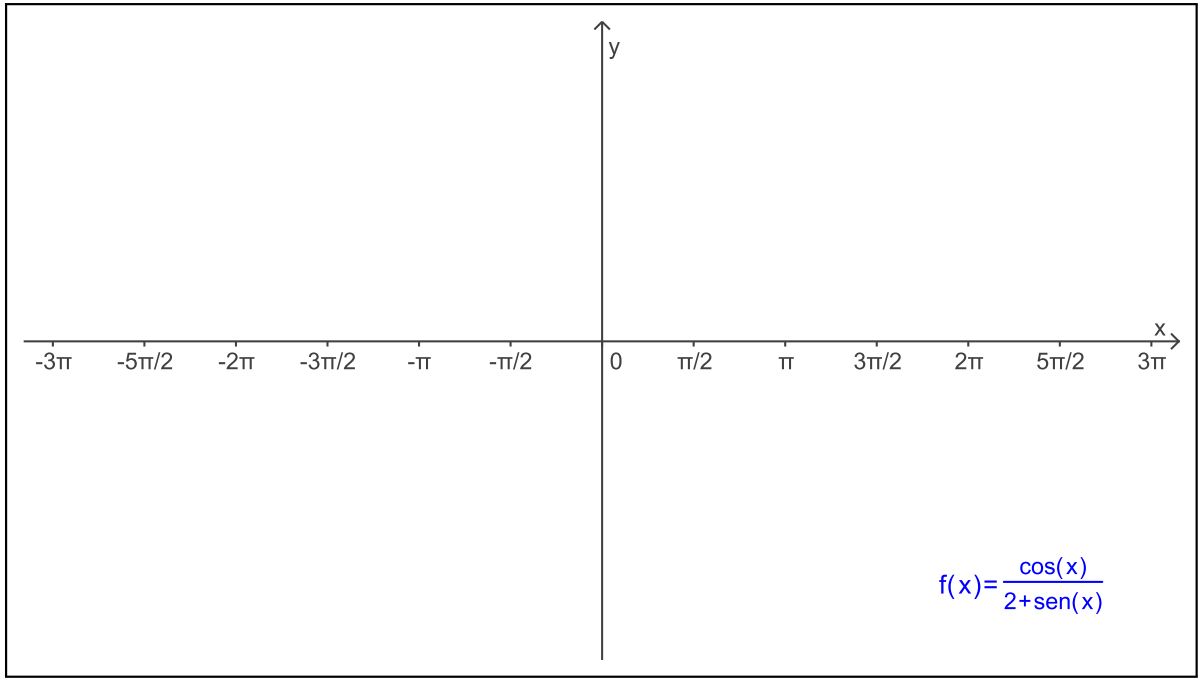

O domínio de $f$ é

# (1) Domínio da função

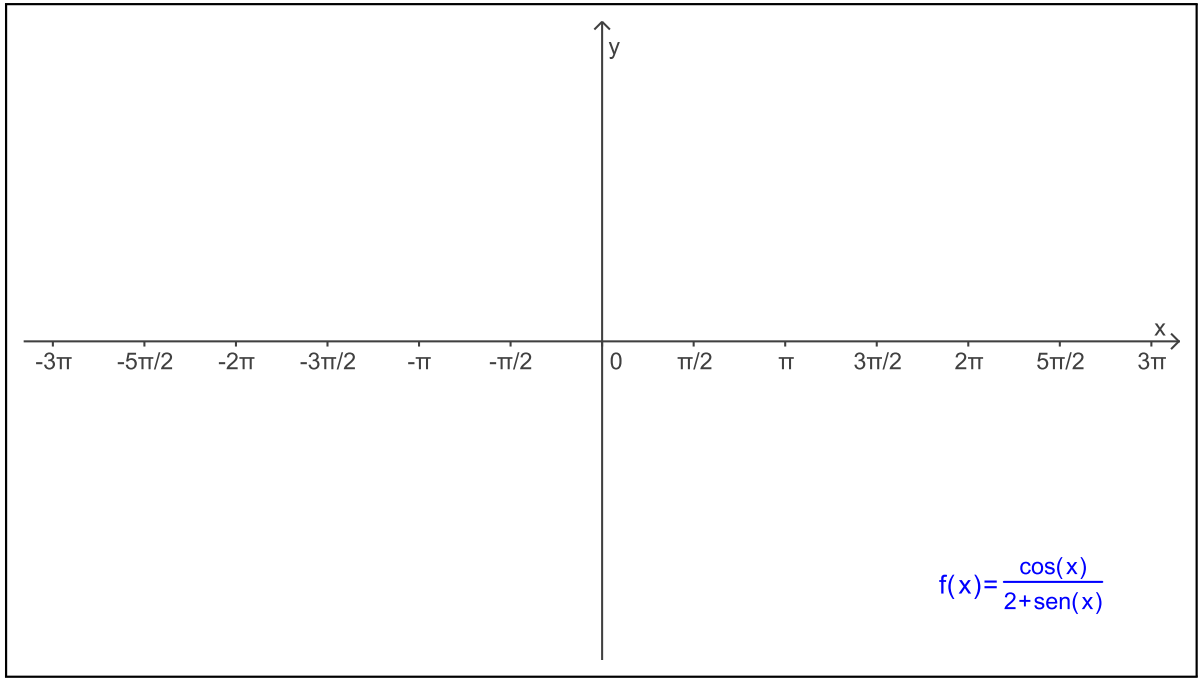



O domínio de $f$ é $D = \mathbb{R}$.

# (2) Interseção com os eixos coordenados

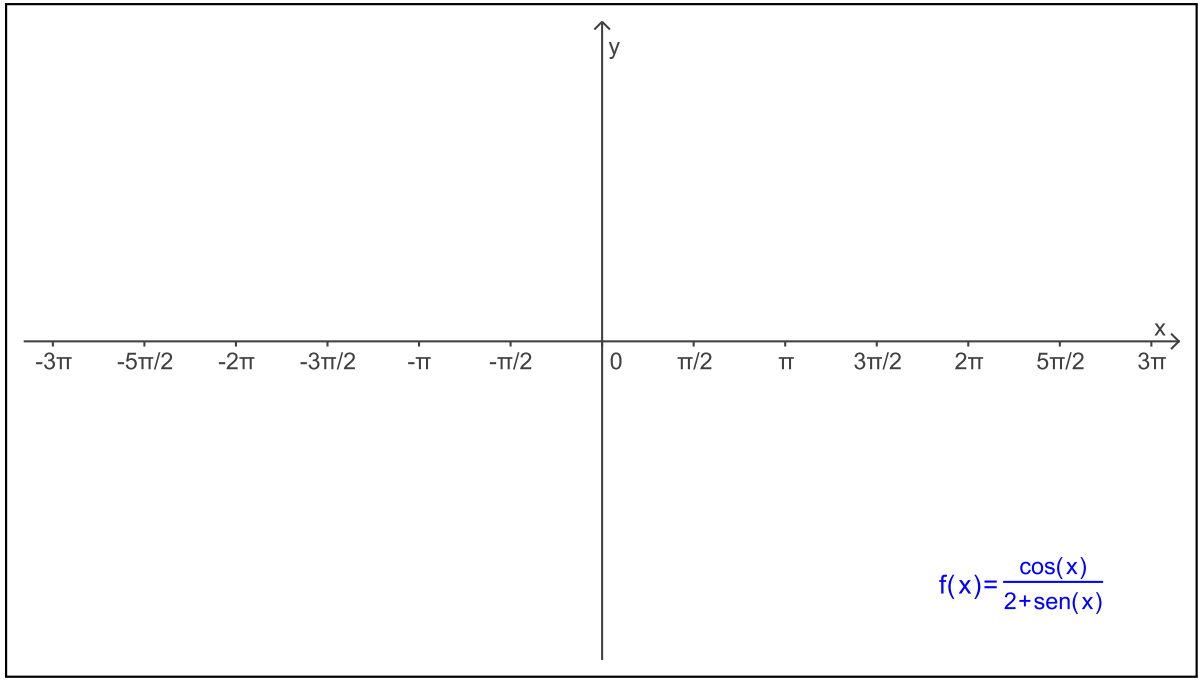


# (2) Interseção com os eixos coordenados



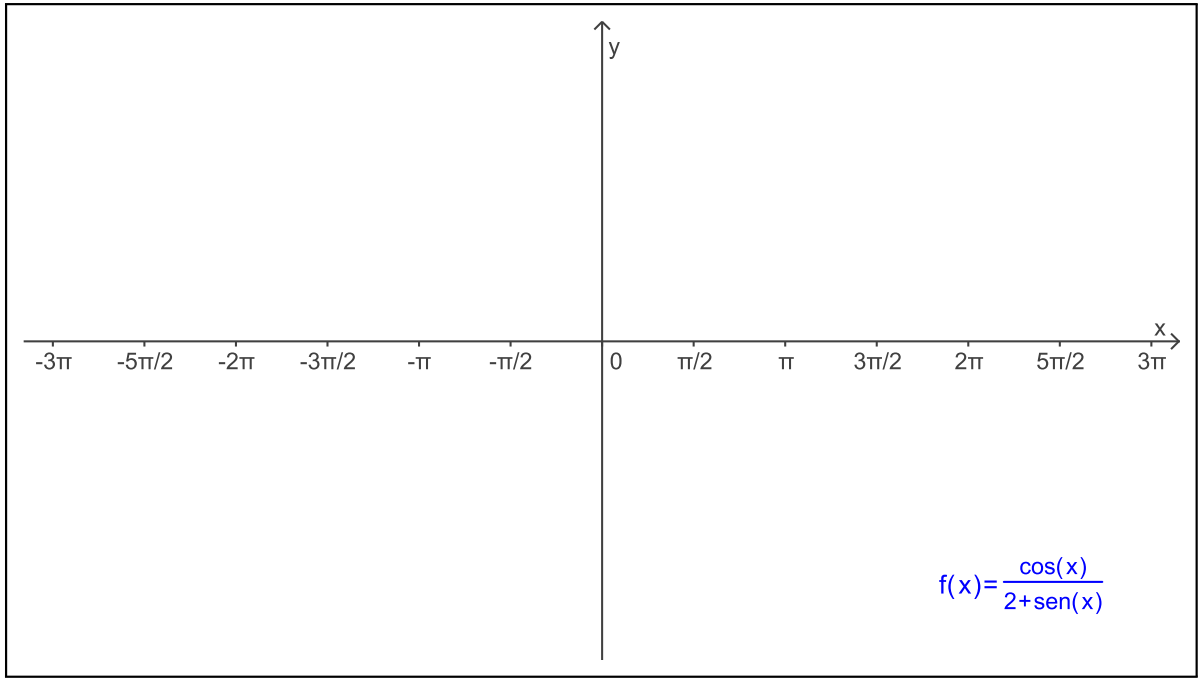

A interseção do gráfico com o eixo *y* é obtida fazendo-se

# (2) Interseção com os eixos coordenados



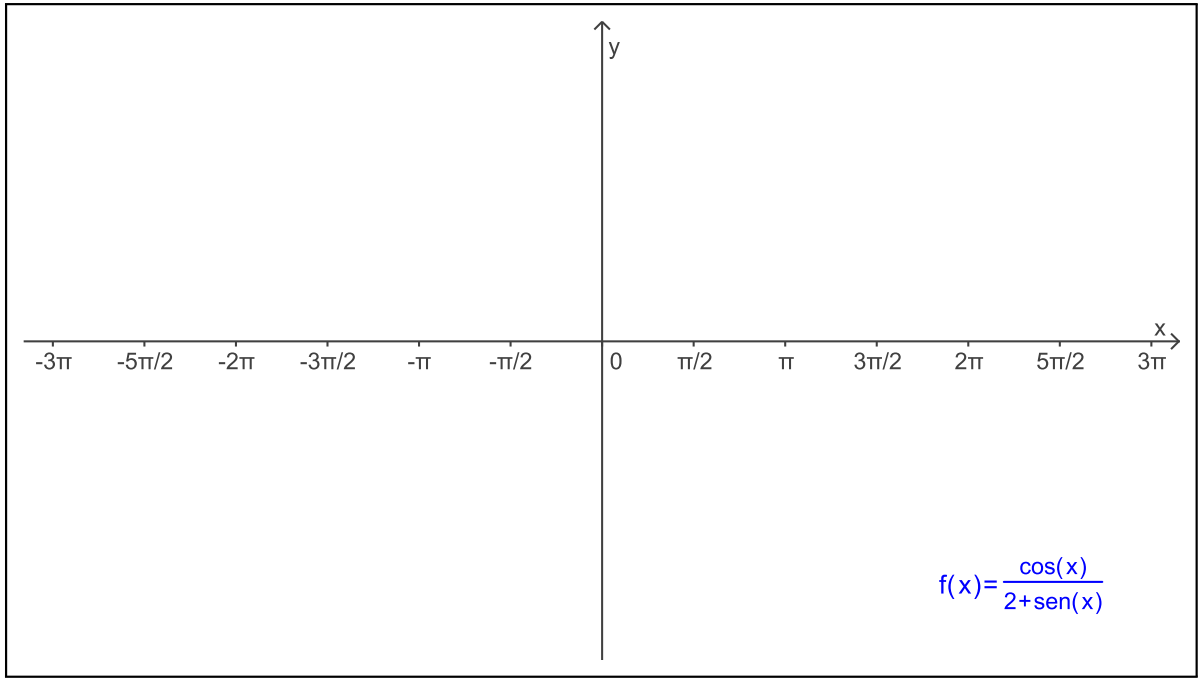

A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$.

# (2) Interseção com os eixos coordenados



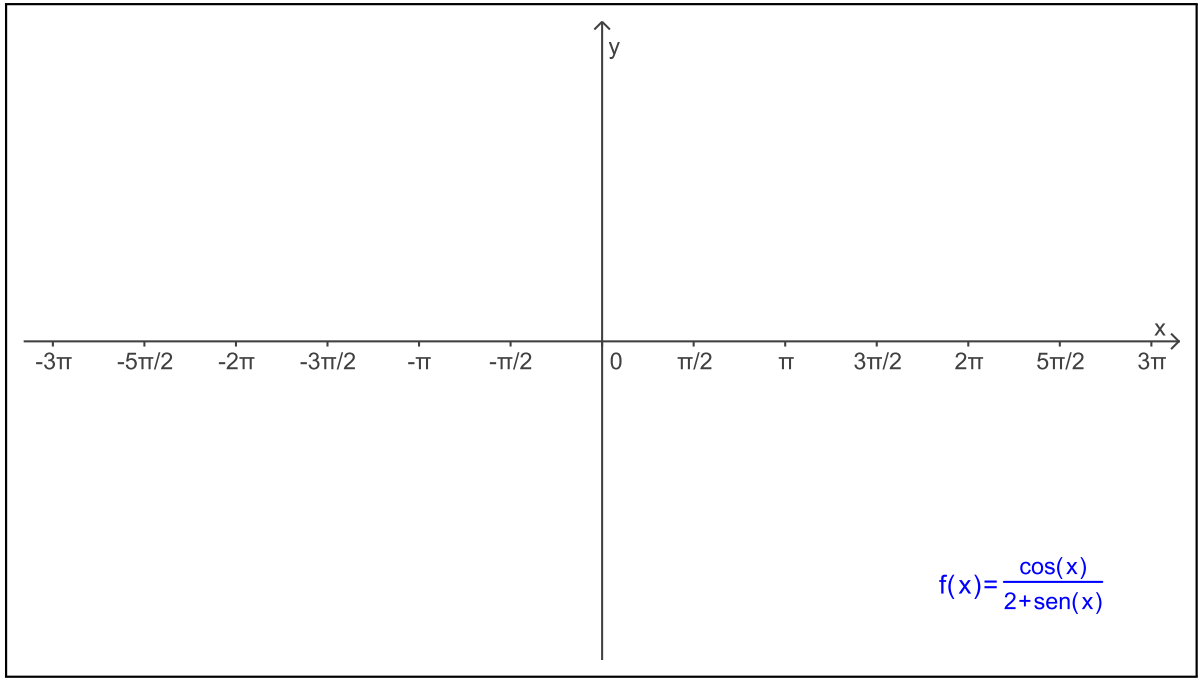

A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$

# (2) Interseção com os eixos coordenados



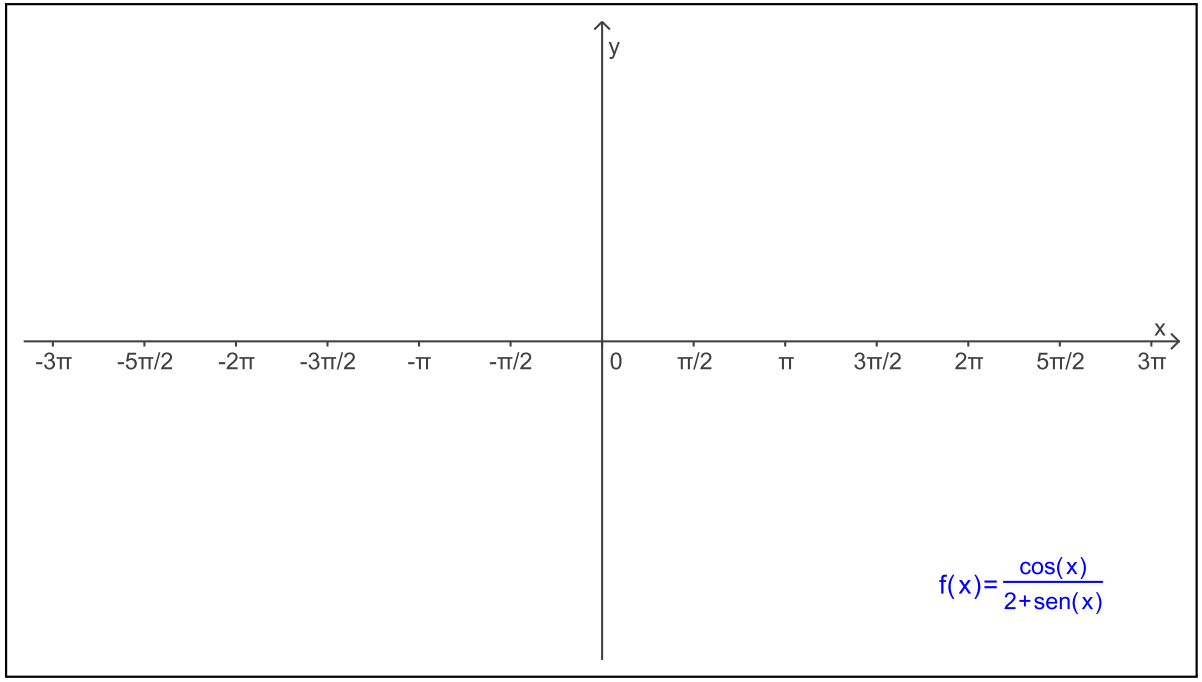

A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto

# (2) Interseção com os eixos coordenados



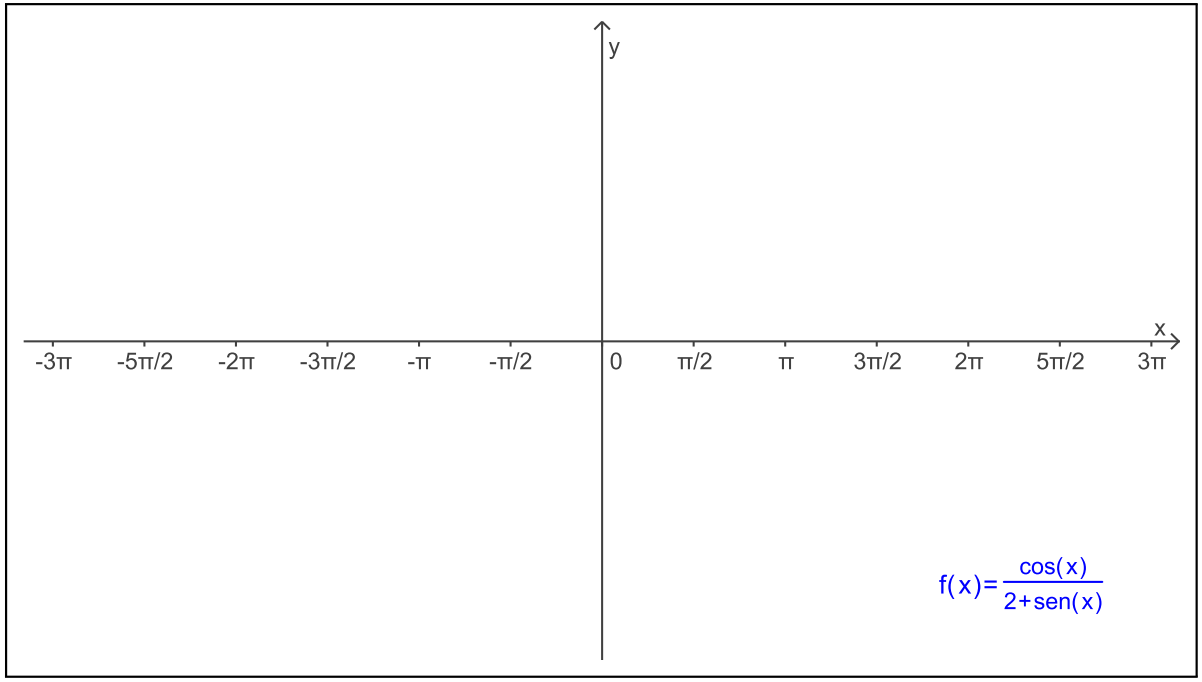

A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$.

# (2) Interseção com os eixos coordenados



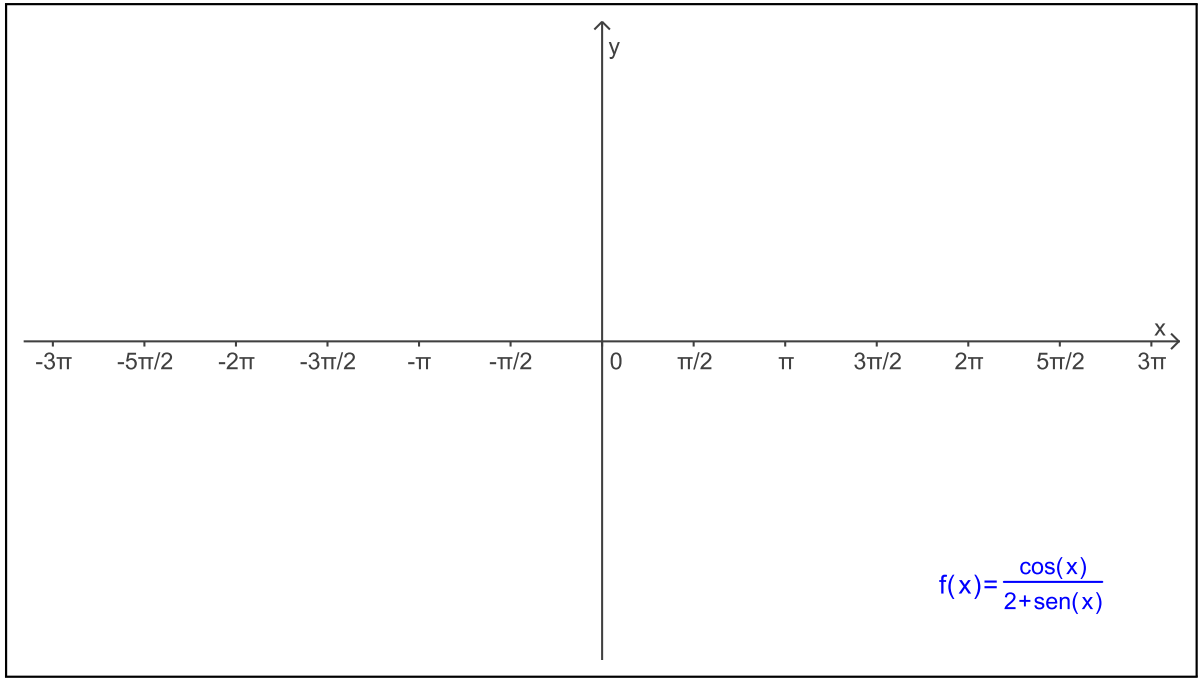

A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se

# (2) Interseção com os eixos coordenados




A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$.

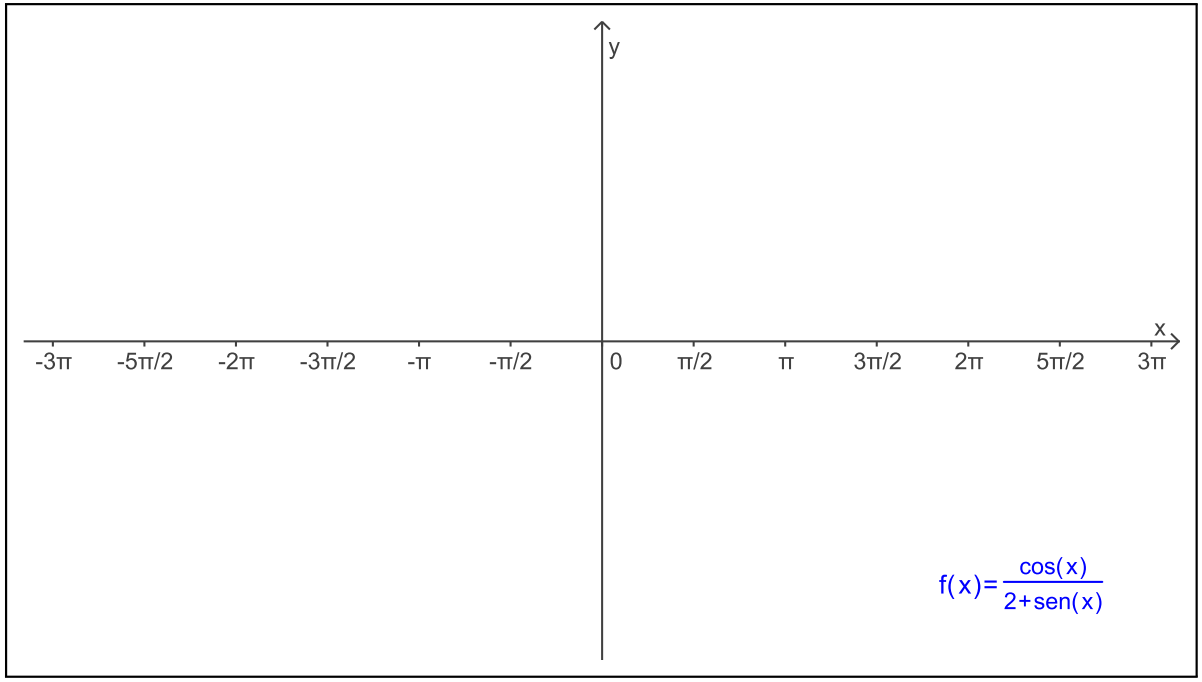
# (2) Interseção com os eixos coordenados




A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0$$

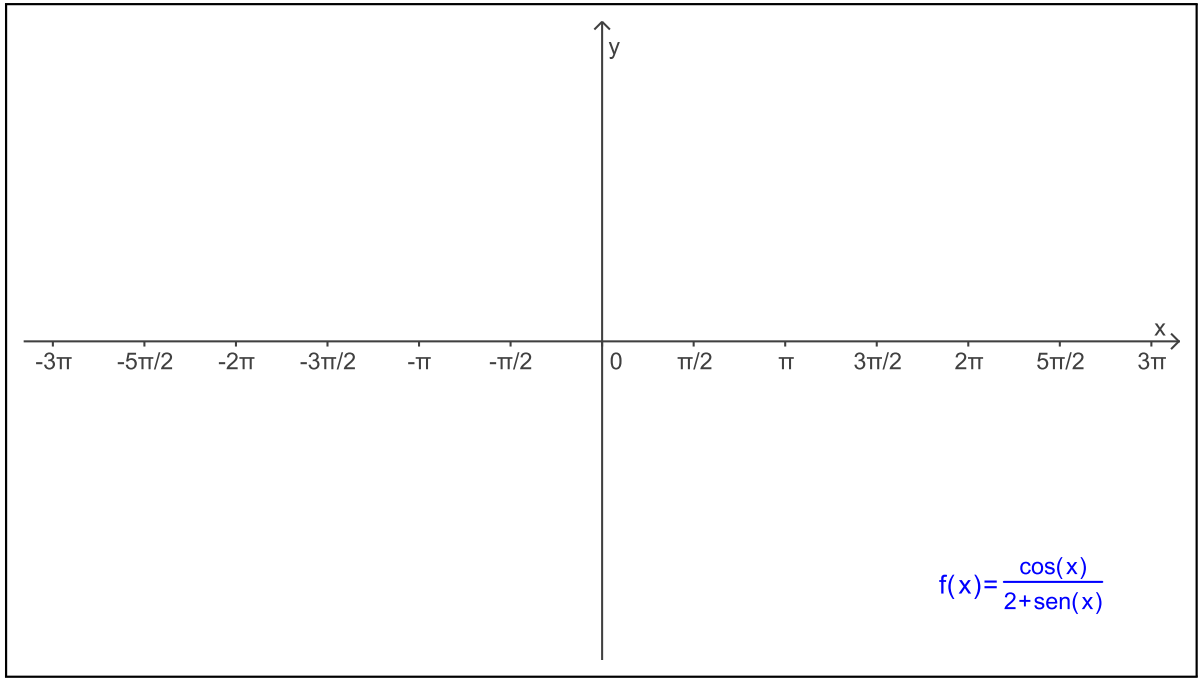
# (2) Interseção com os eixos coordenados




A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)} = 0$$

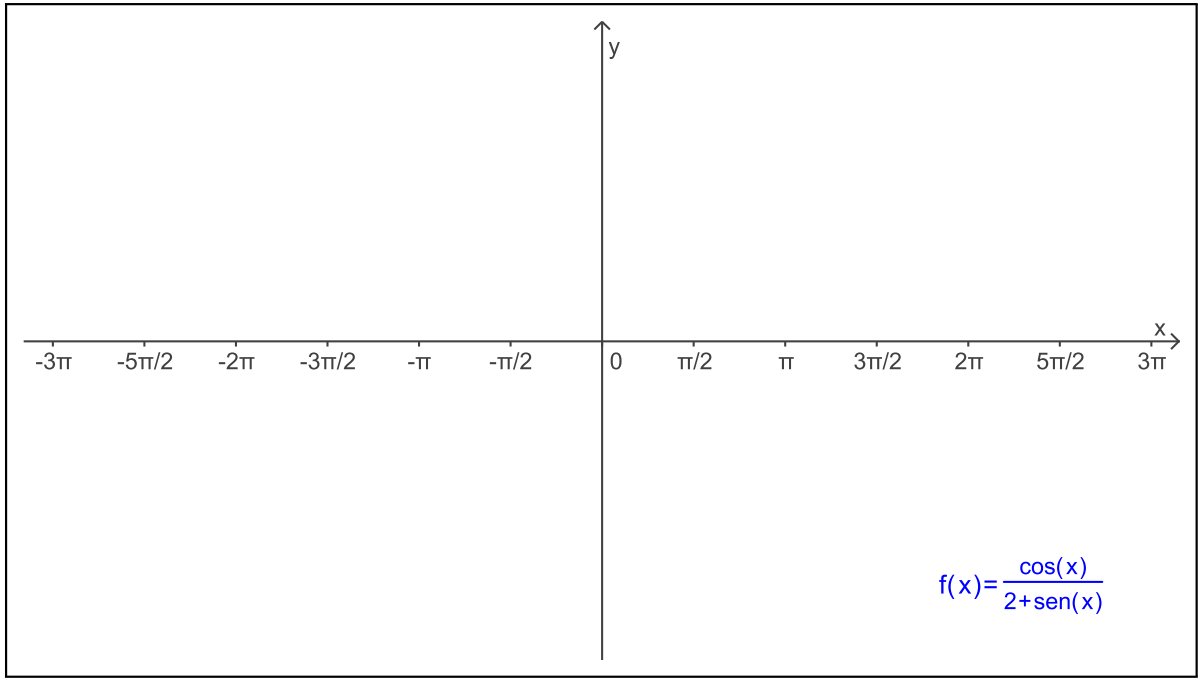
# (2) Interseção com os eixos coordenados




A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

# (2) Interseção com os eixos coordenados

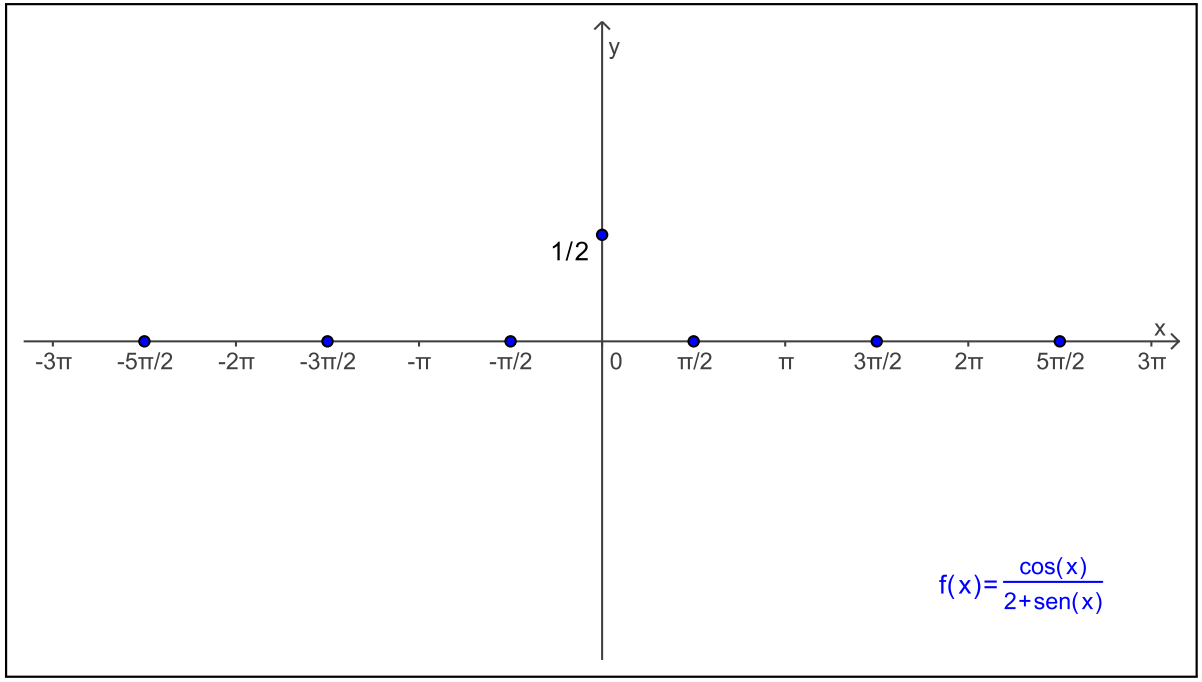



A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, o gráfico de $f$ intercepta o eixo $x$ também nos pontos $(\pi/2 + k \cdot \pi, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# (2) Interseção com os eixos coordenados

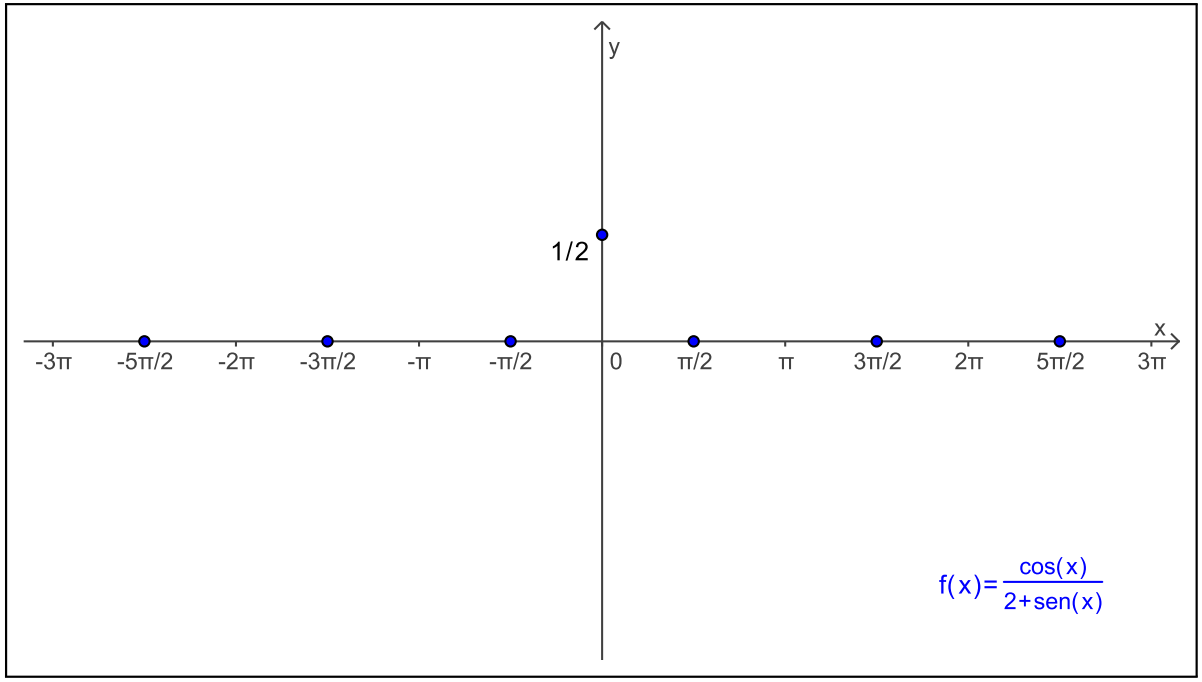



A interseção do gráfico com o eixo $y$ é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = \cos(0)/(1 + \text{sen}(0)) = 1/2$, segue-se que o gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 1/2)$. A interseção do gráfico com o eixo $x$ é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

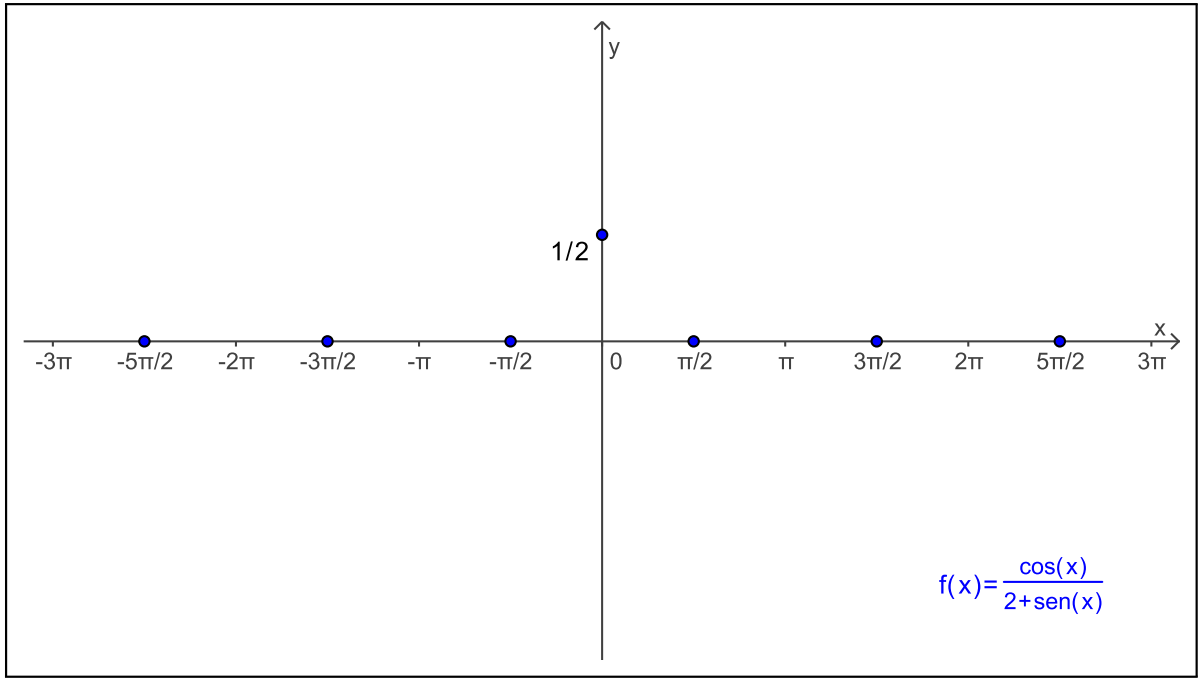
$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}..$$

Logo, o gráfico de $f$ intercepta o eixo $x$ também nos pontos $(\pi/2 + k \cdot \pi, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# (3) Simetrias

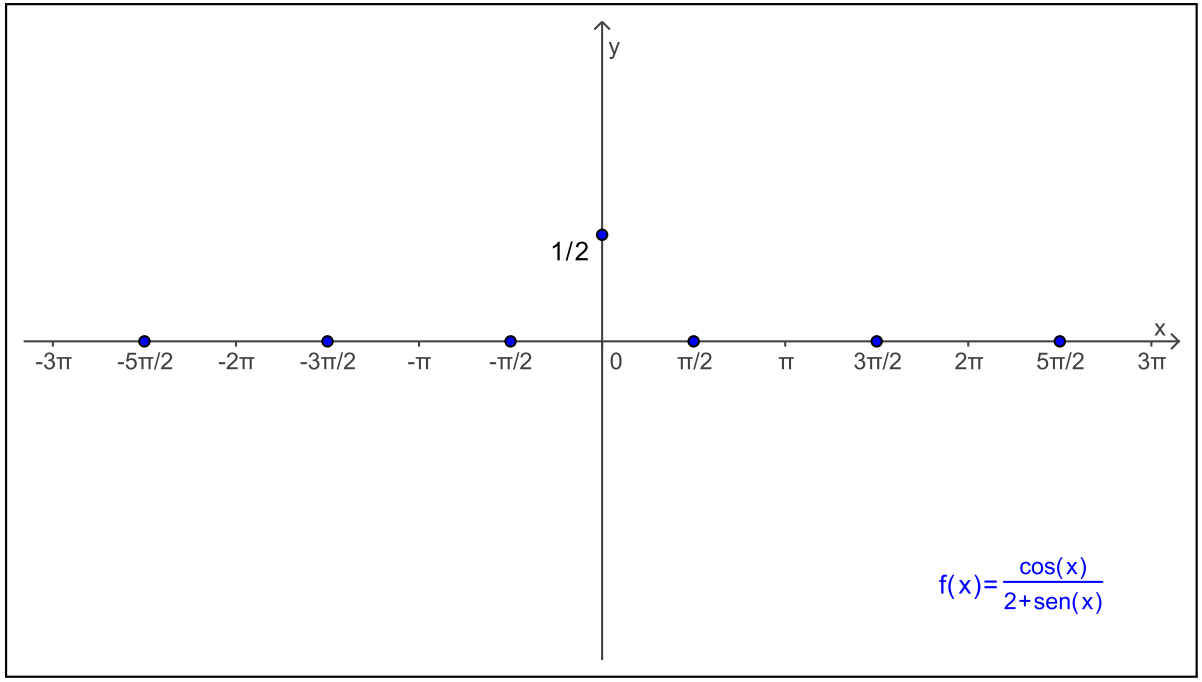


# (3) Simetrias



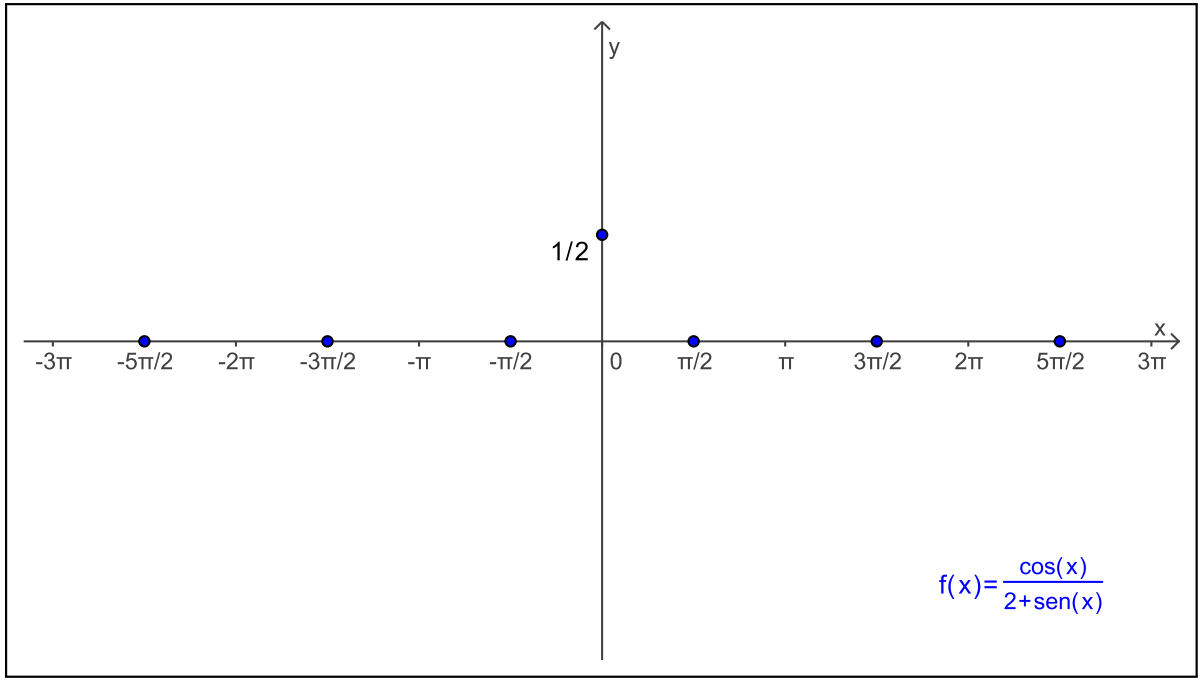

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$

# (3) Simetrias



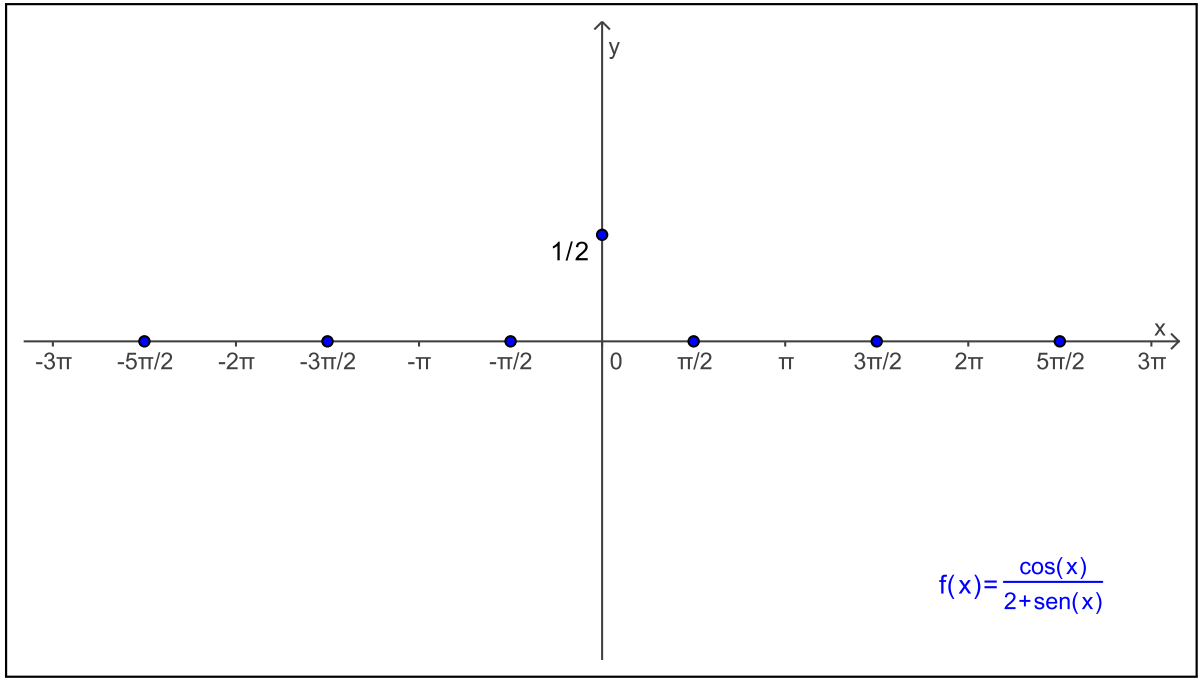

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$

# (3) Simetrias



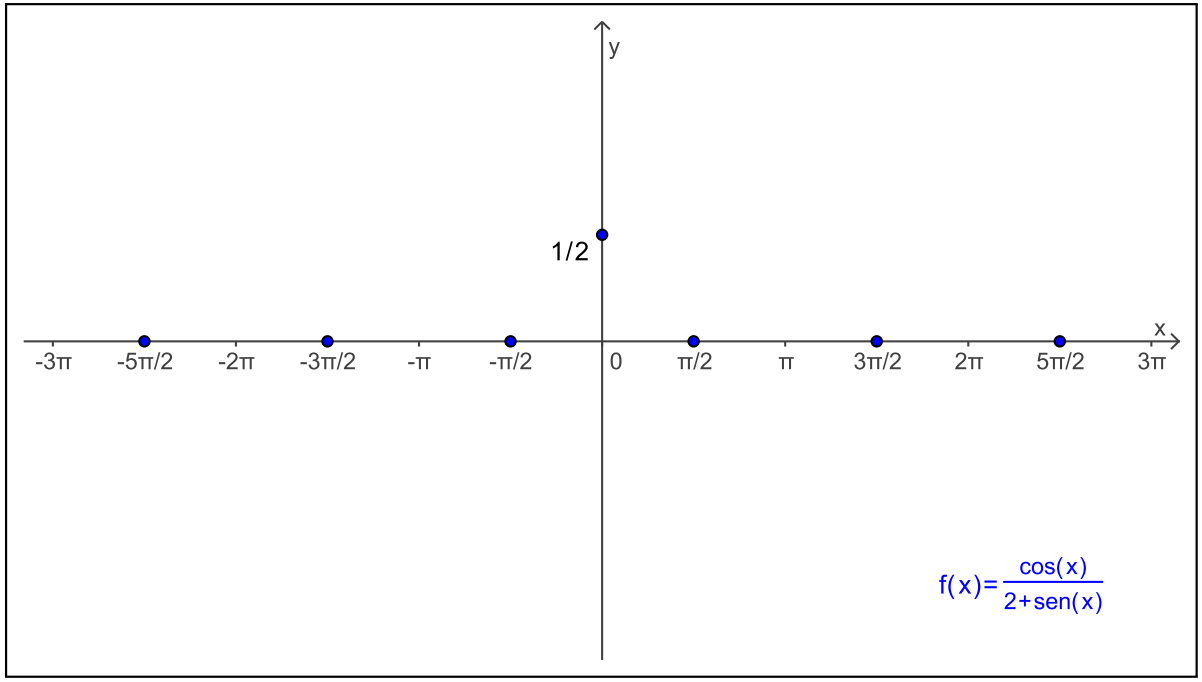

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par

# (3) Simetrias



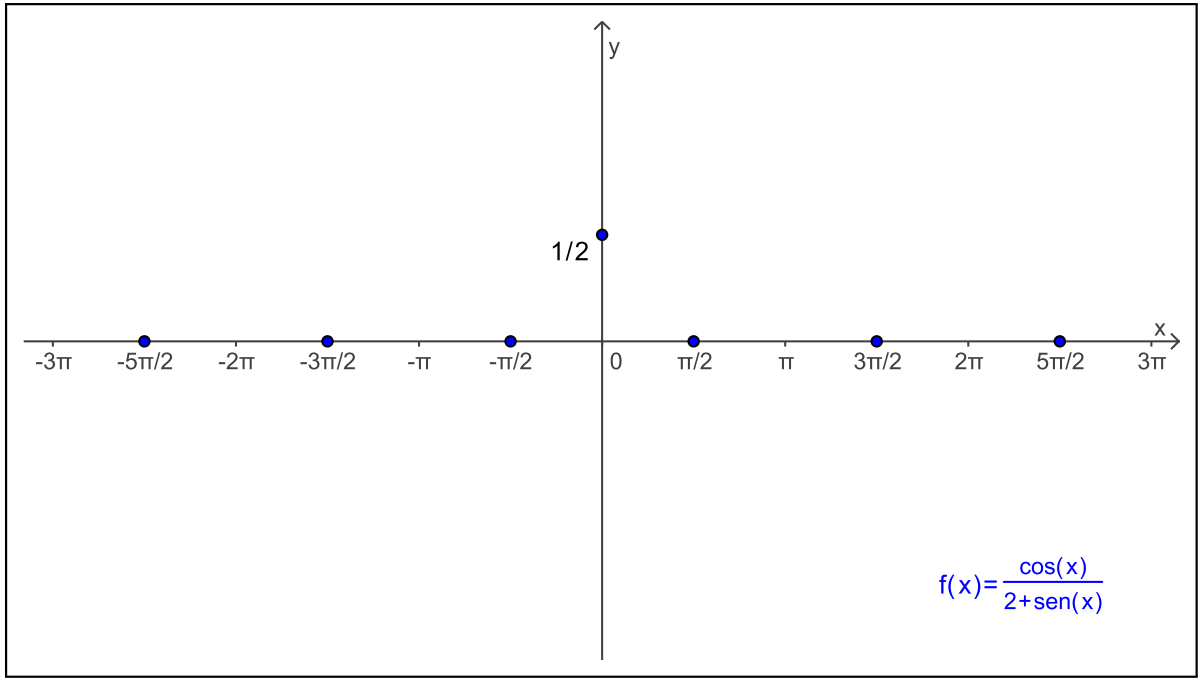

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$)

# (3) Simetrias



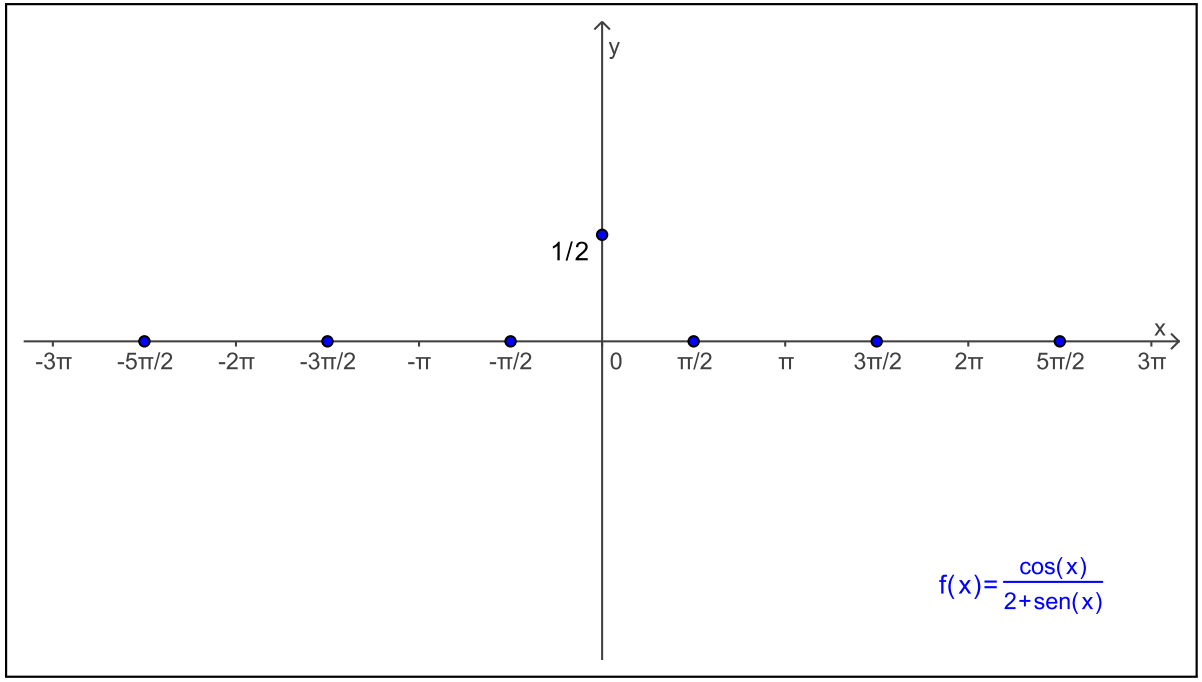

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar

# (3) Simetrias



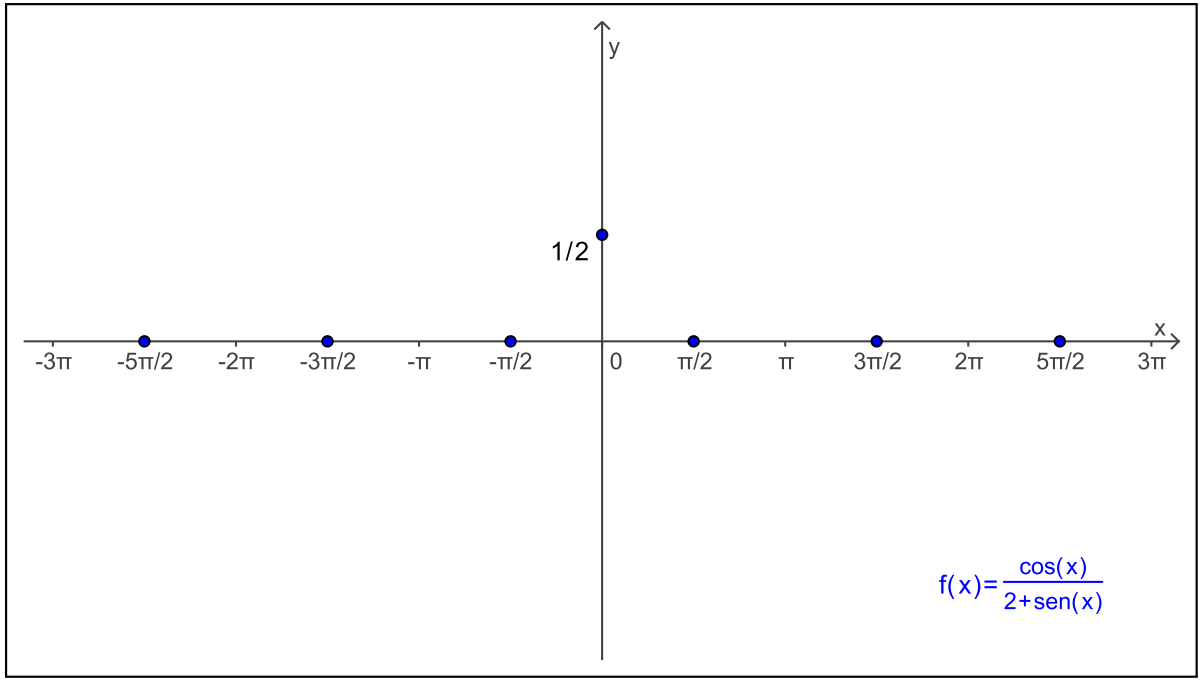

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$).

# (3) Simetrias




Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função $f$ é periódica

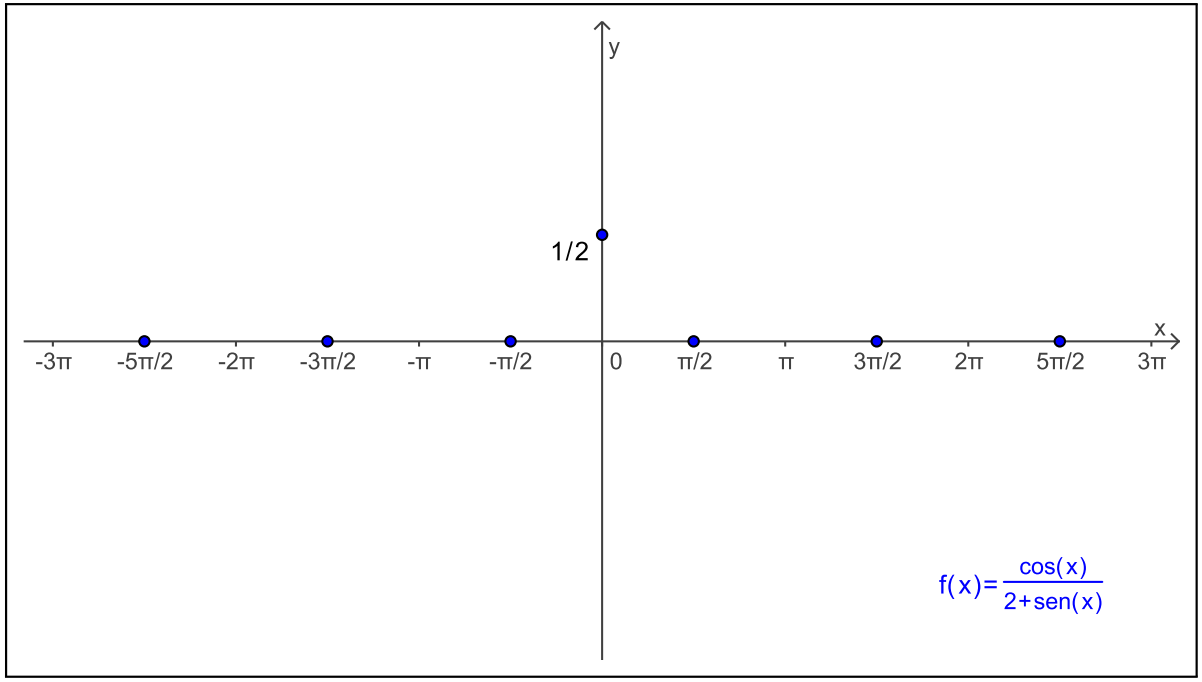
# (3) Simetrias




Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função $f$ é periódica, pois

$$f(x + 2\pi) =$$

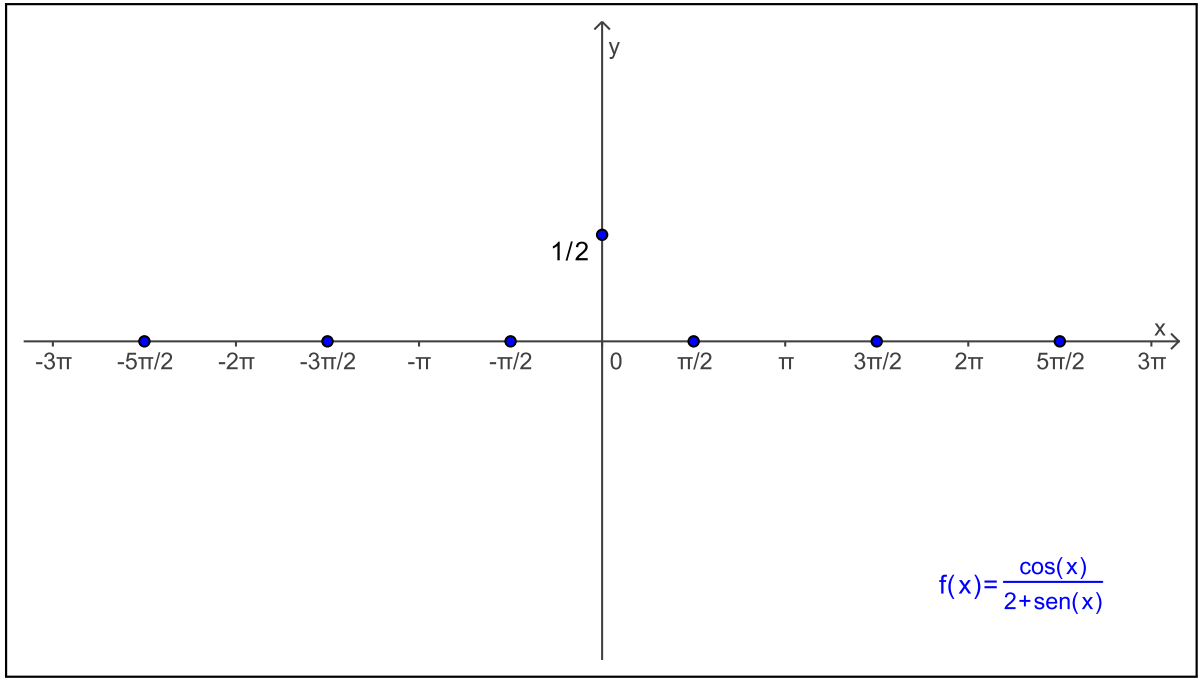
# (3) Simetrias




Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função $f$ é periódica, pois

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\,\pi)}{2 + \text{sen}(x + 2\,\pi)}$$

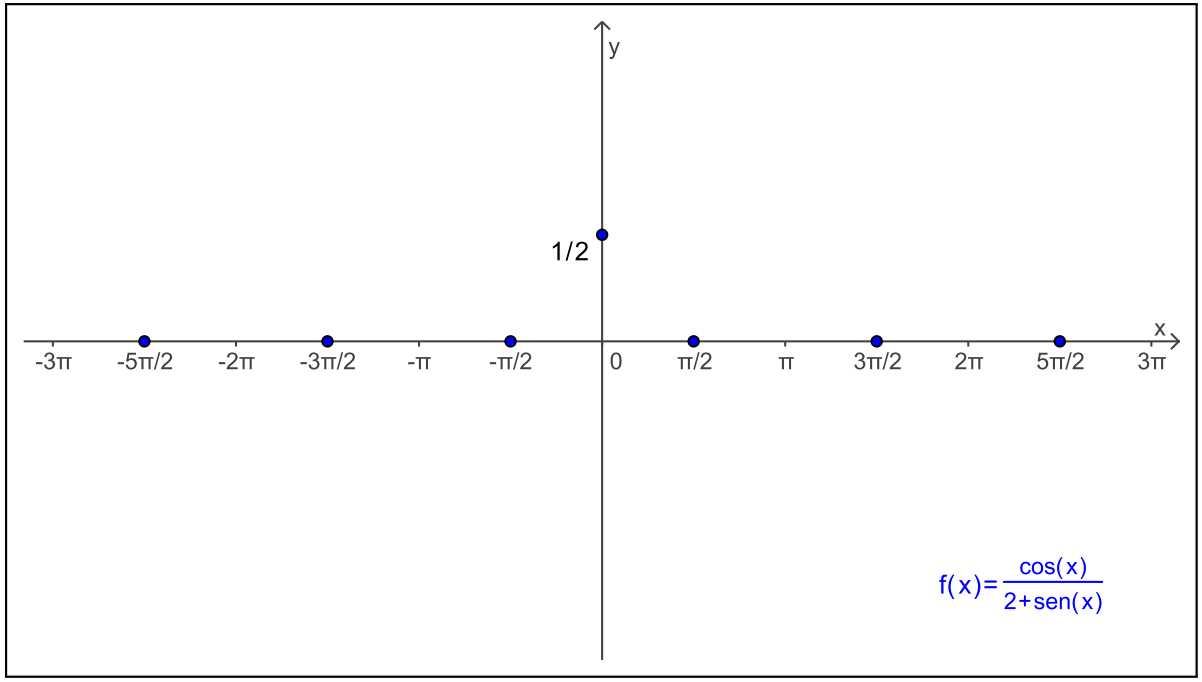
# (3) Simetrias




Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função $f$ é periódica, pois

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\,\pi)}{2 + \text{sen}(x + 2\,\pi)} = \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)}$$

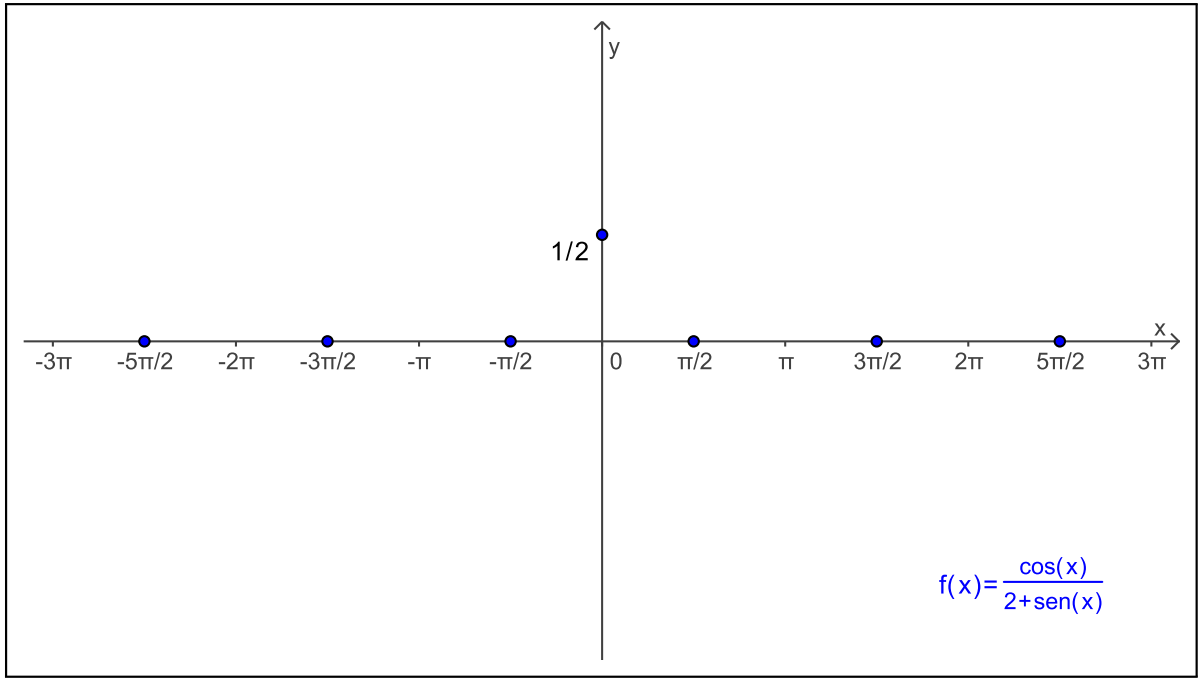
# (3) Simetrias



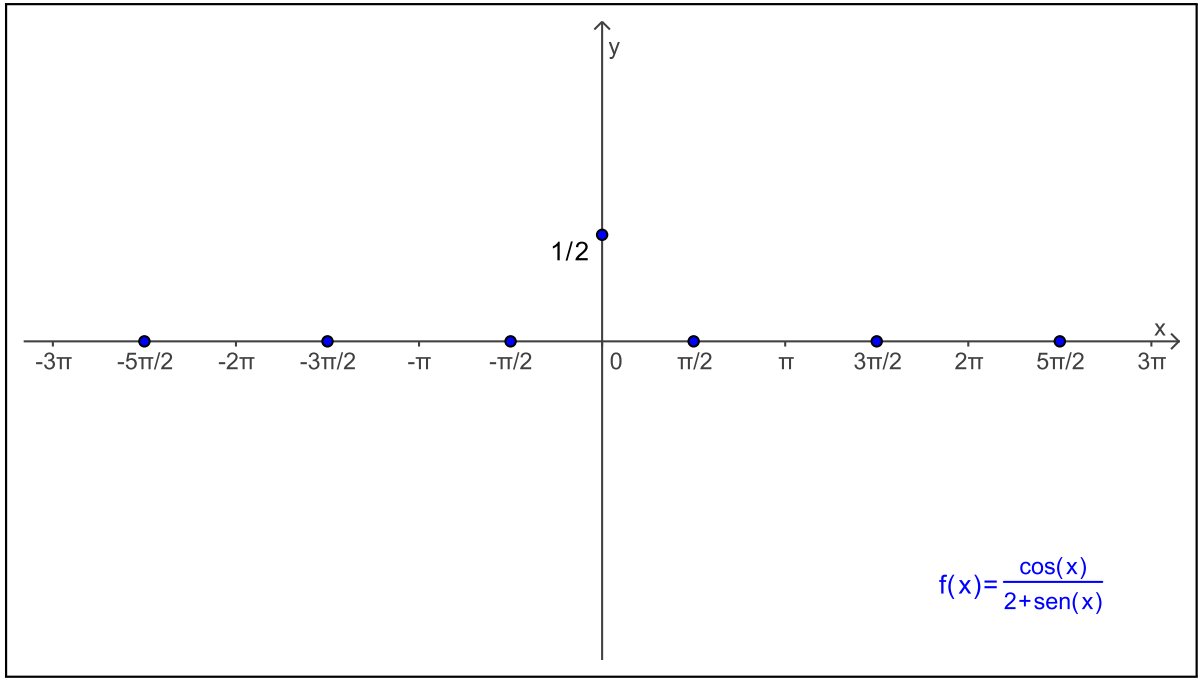

Como $f(-\pi/6) = \cos(-\pi/6)/(2 + \text{sen}(-\pi/6)) = \sqrt{3}/3$ e $f(\pi/6) = \cos(\pi/6)/(2 + \text{sen}(\pi/6)) = \sqrt{3}/5$, segue-se que $f$ não é uma função par (pois $f(-\pi/6) \neq f(\pi/6)$) e $f$ não é uma função ímpar (pois $f(-\pi/6) \neq -f(\pi/6)$). A função $f$ é periódica, pois

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\,\pi)}{2 + \text{sen}(x + 2\,\pi)} = \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)} = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

# (4) Assíntotas

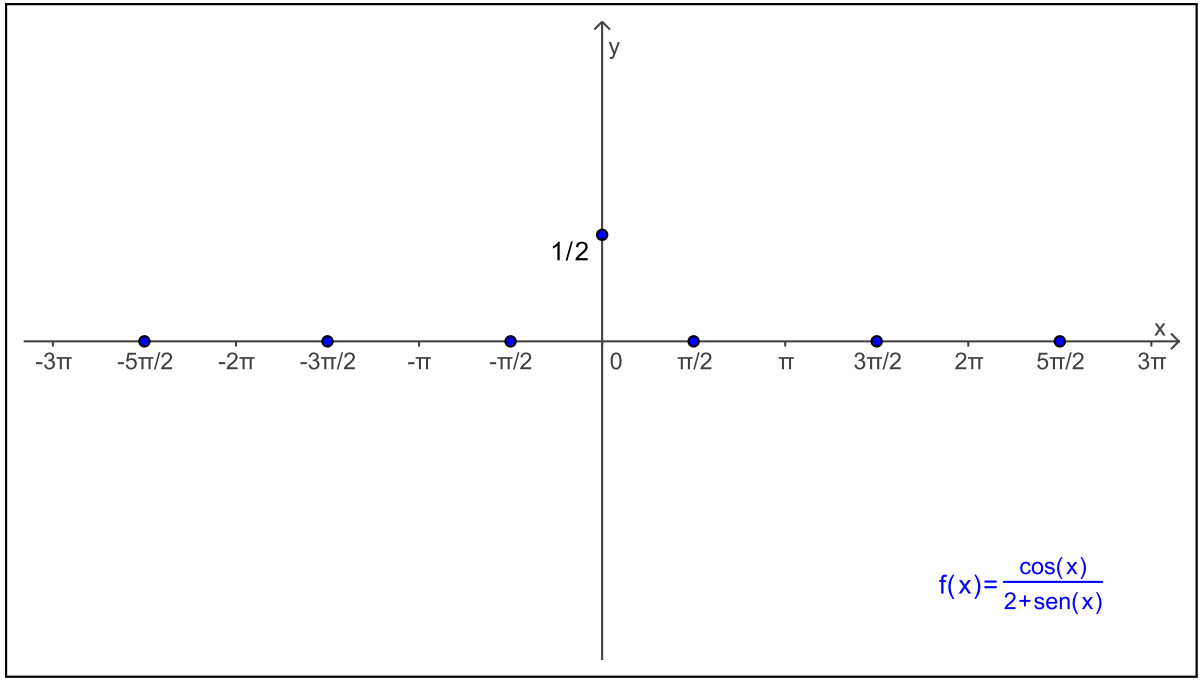


# (4) Assíntotas



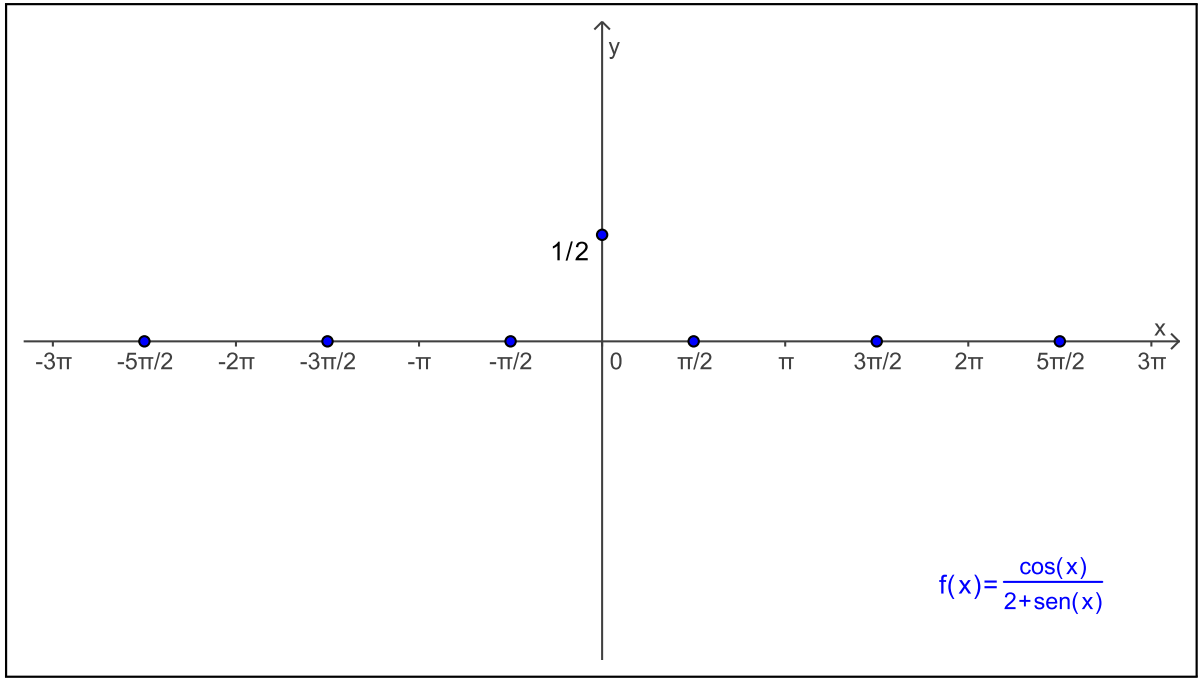

A função $f$ não possui assíntotas horizontais, pois $f$ é periódica e não constante.

# (4) Assíntotas

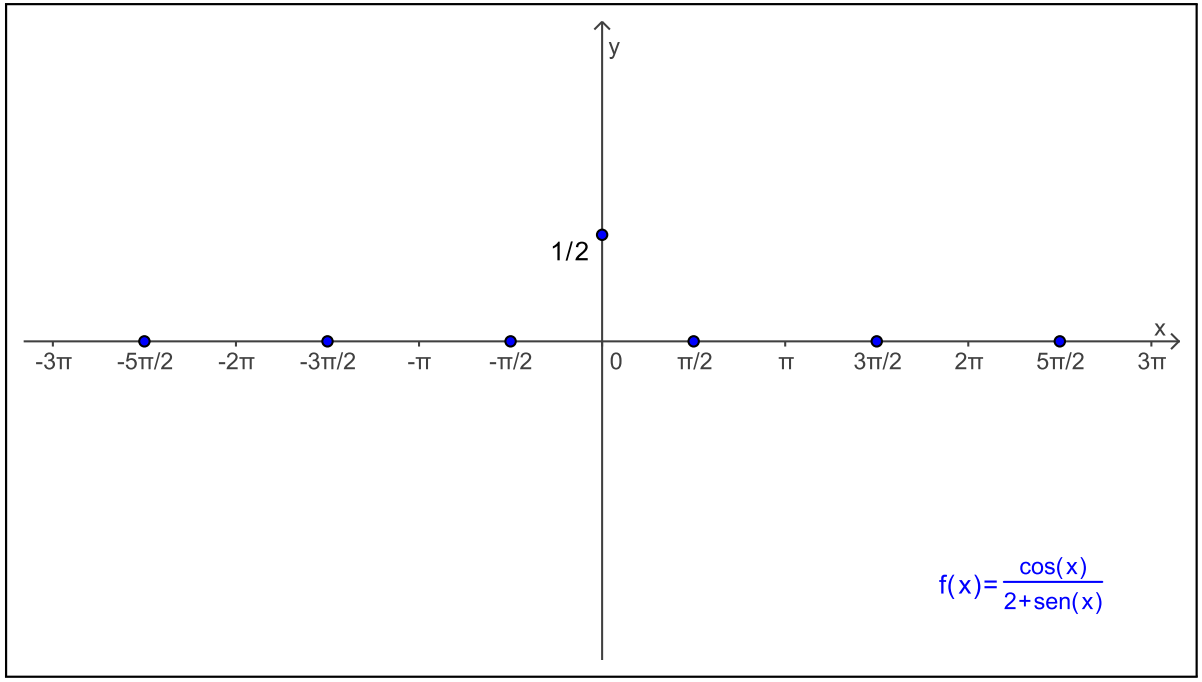



A função $f$ não possui assíntotas horizontais, pois $f$ é periódica e não constante. A função $f$ não possui assíntotas verticais, pois $f$ é contínua em $\mathbb{R}$.

# (5) Pontos onde a função não é derivável

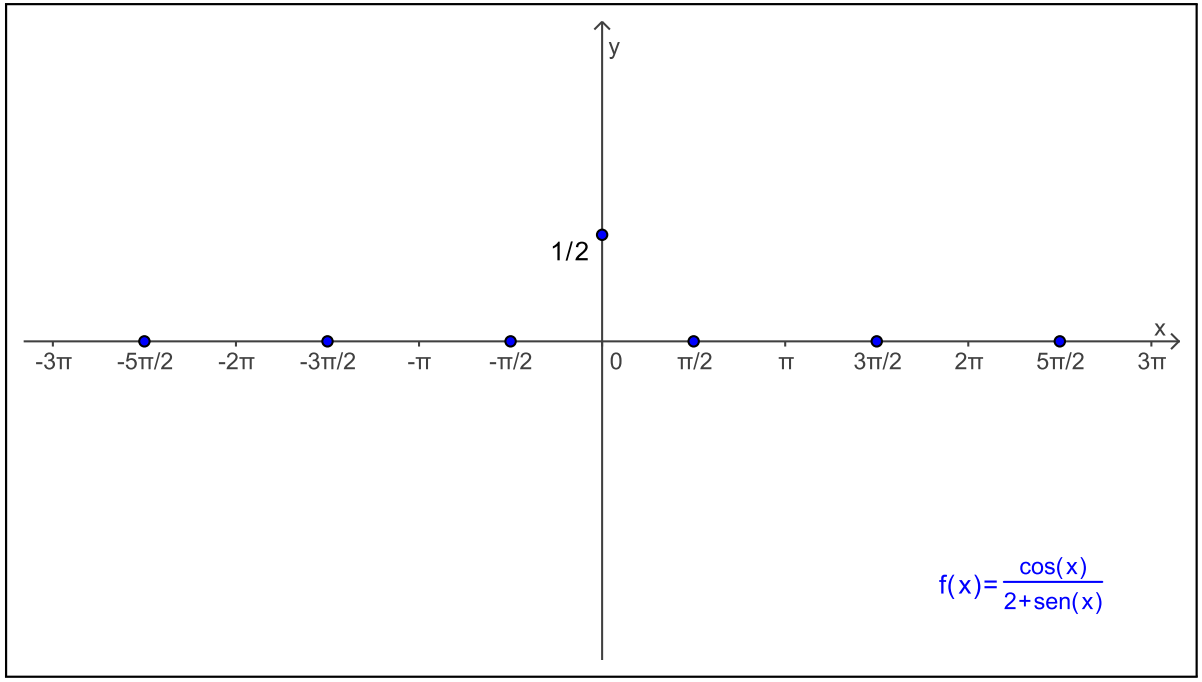


# (5) Pontos onde a função não é derivável



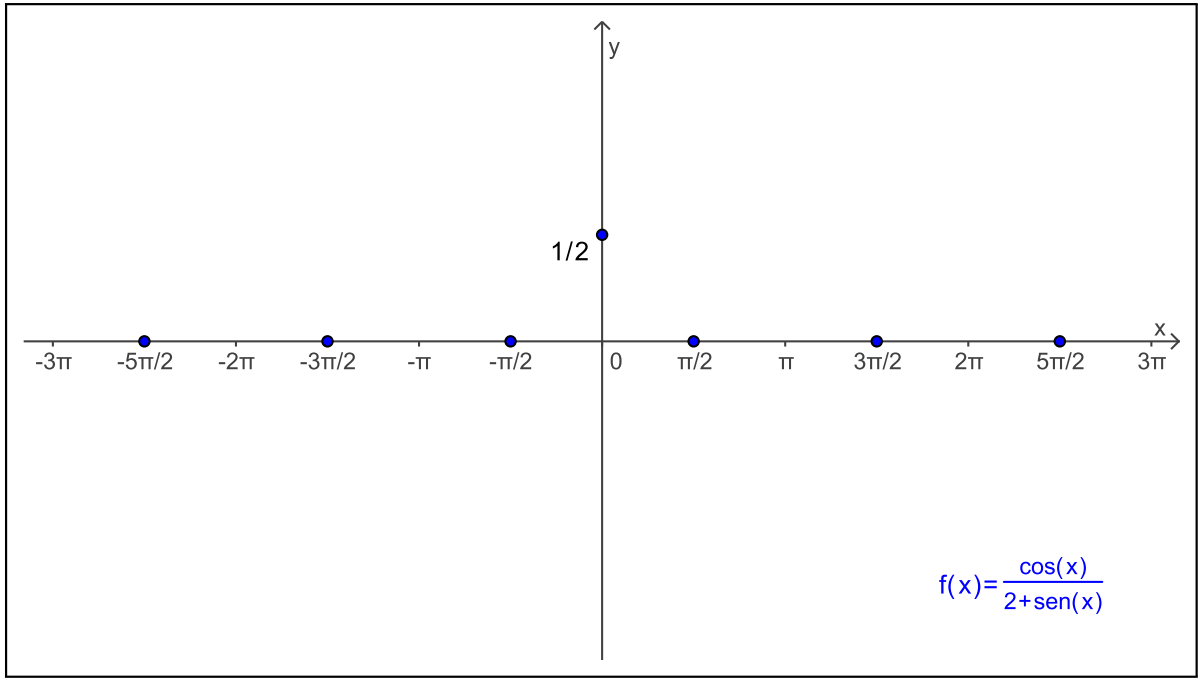

A função $f$ é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis.

# (5) Pontos onde a função não é derivável




A função $f$ é derivável como subtração, multiplicação e divisão de funções deriváveis. Logo, o gráfico de $f$ não possui "bicos" e nem pontos onde a reta tangente é vertical.

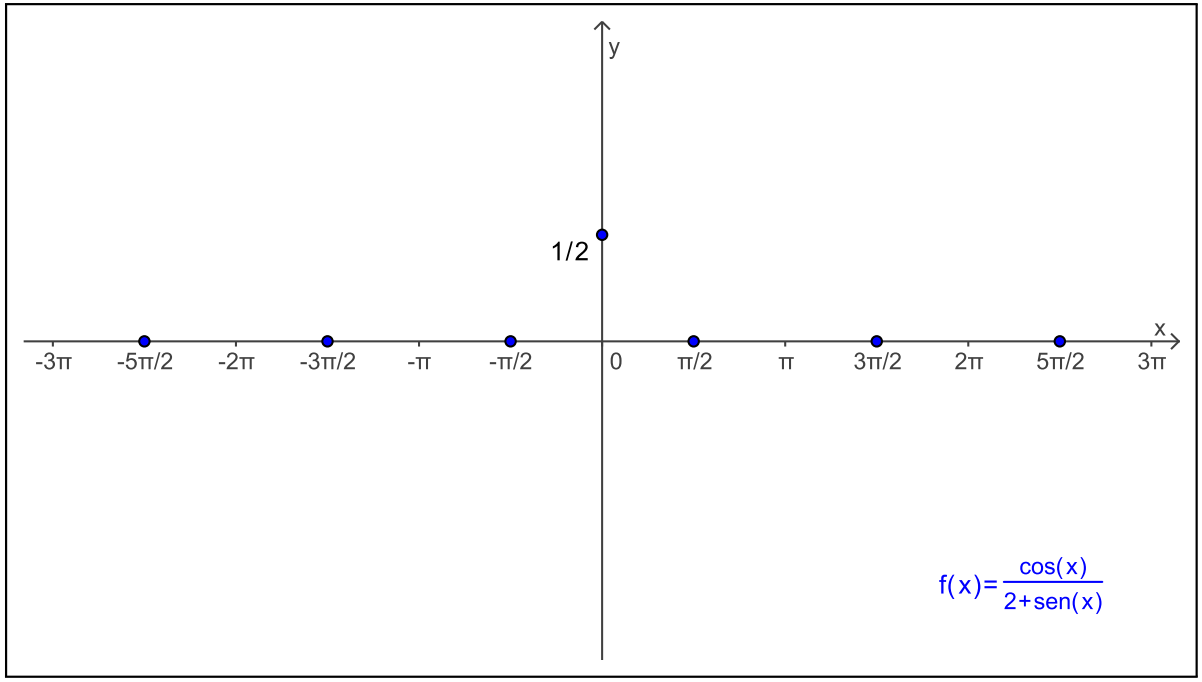
# (6) Crescimento e decrescimento




Temos que

$$f'(x) =$$

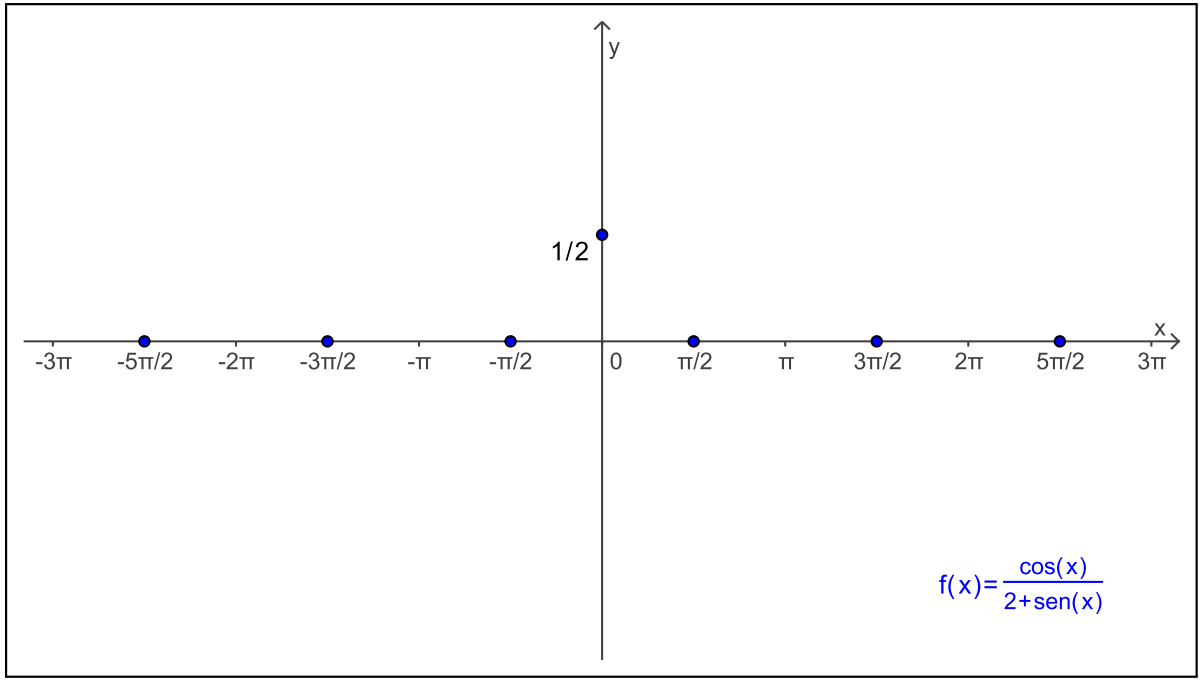
# (6) Crescimento e decrescimento




Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}$$

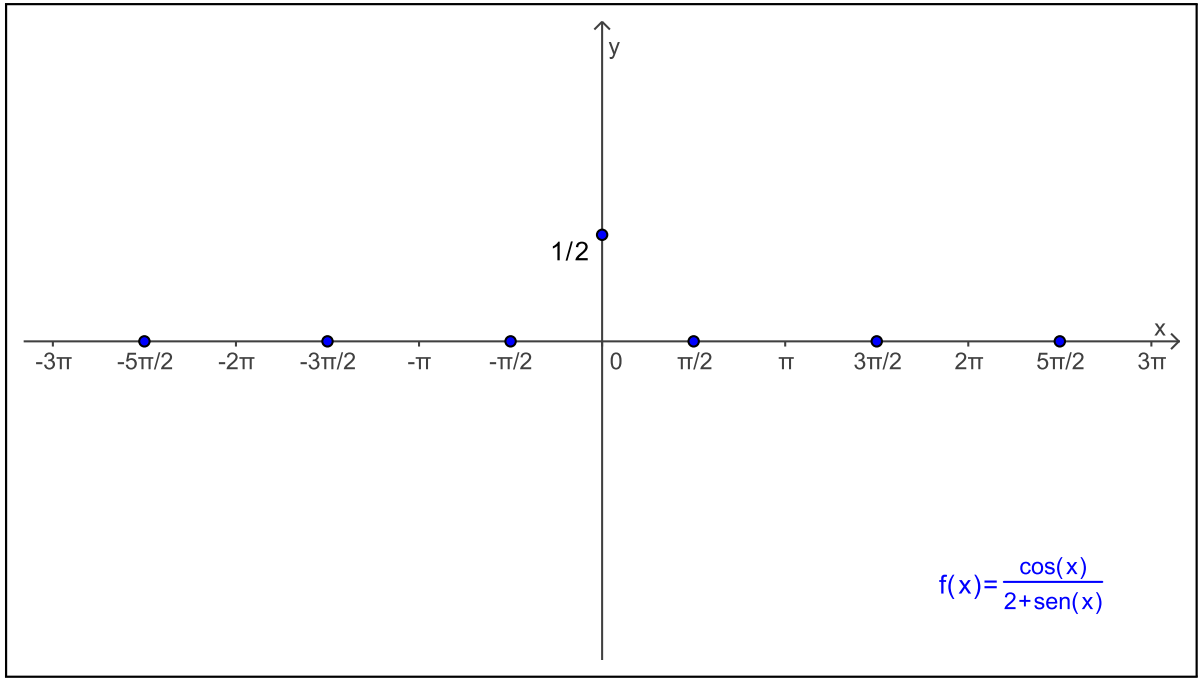
# (6) Crescimento e decrescimento




Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

# (6) Crescimento e decrescimento

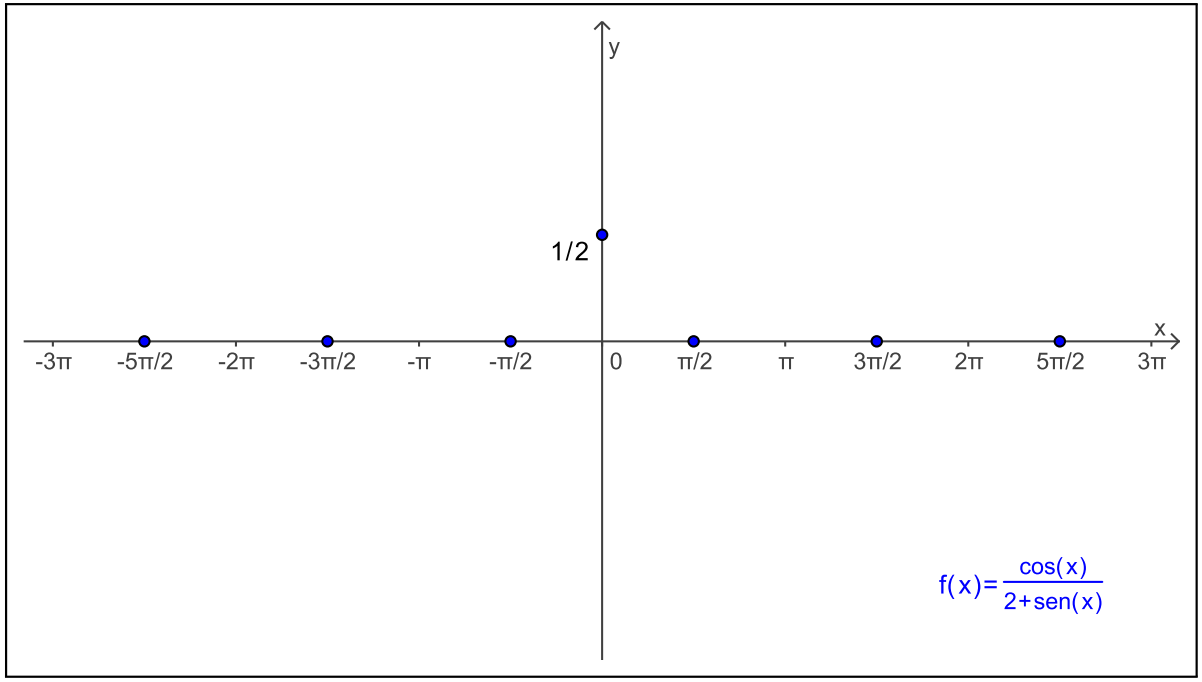



Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

Logo, $f'(x) > 0$

# (6) Crescimento e decrescimento

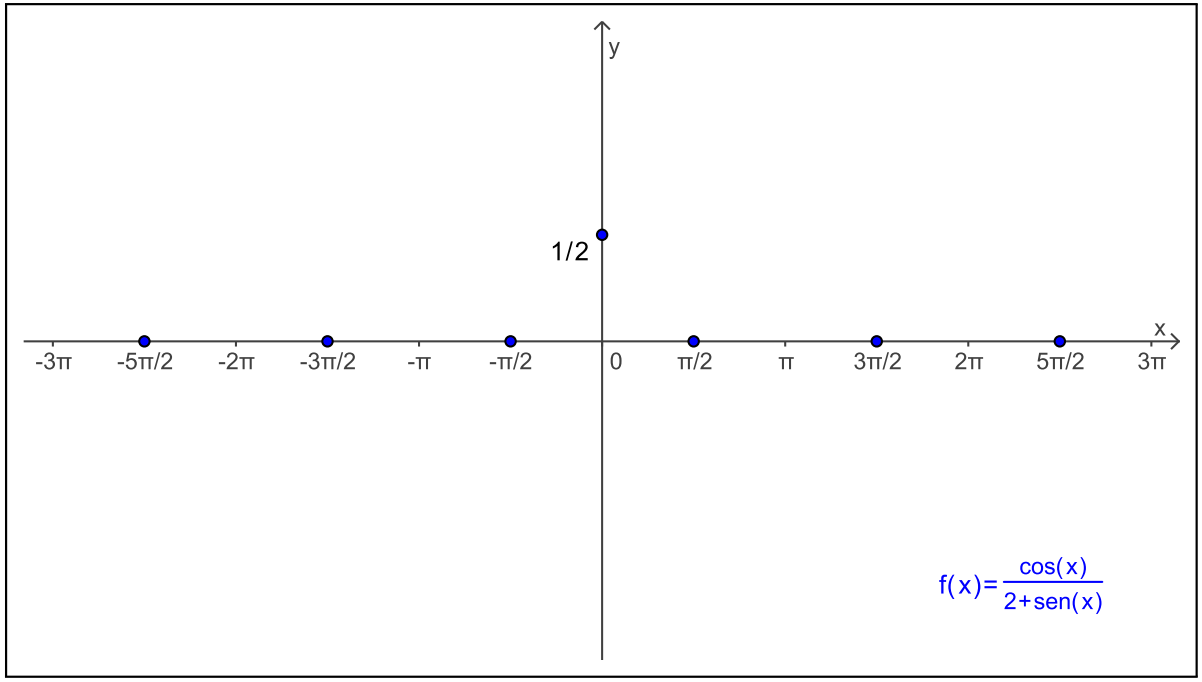



Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

Logo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(x) + 1 < 0$

# (6) Crescimento e decrescimento

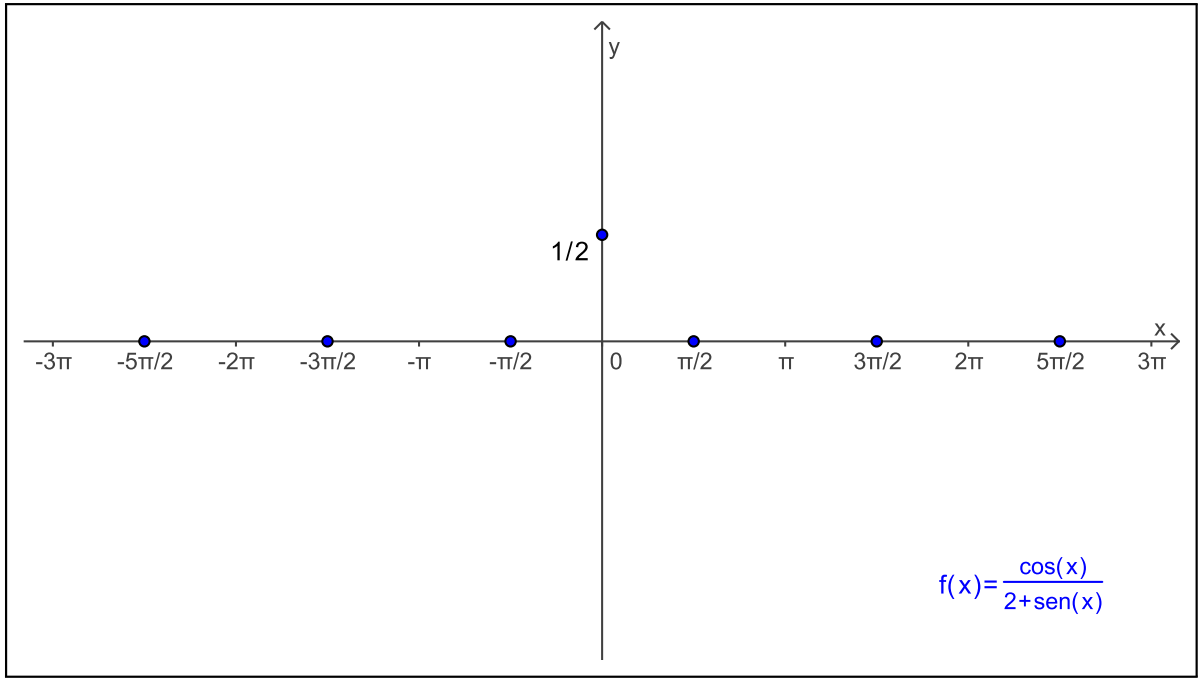



Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

Logo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(x)+1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) < -1/2$

# (6) Crescimento e decrescimento

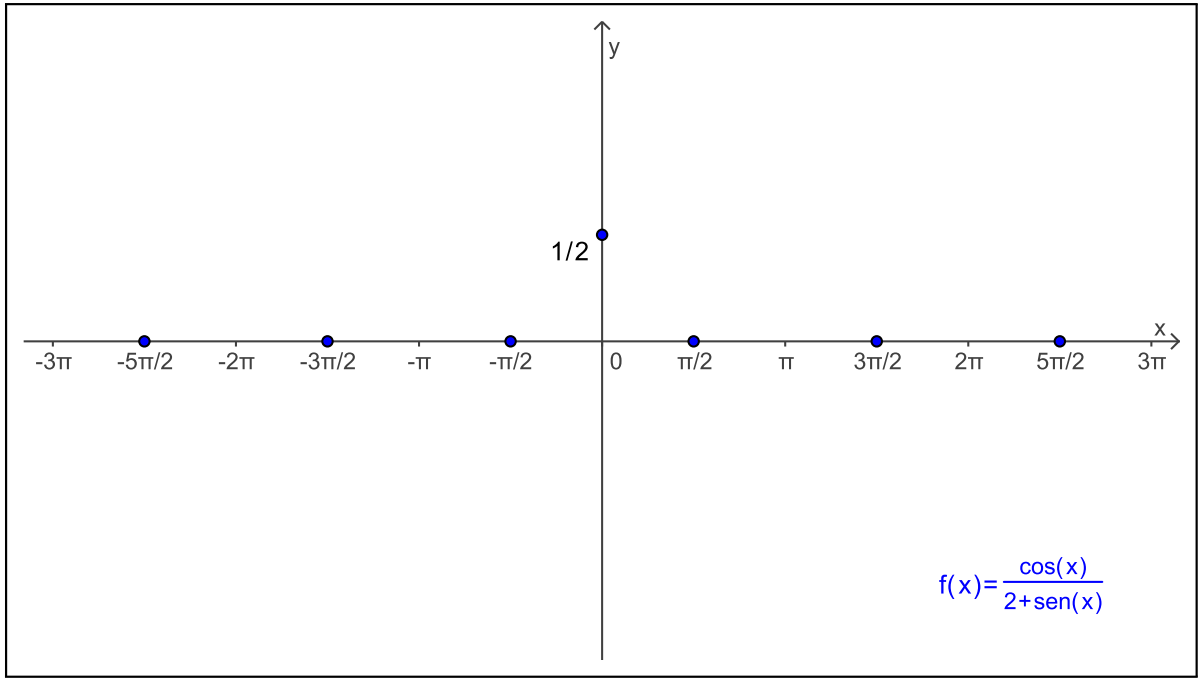



Temos que

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cdot(2+\operatorname{sen}(x)) - \cos(x)\cdot(0+\cos(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^2} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)+1}{(2+\operatorname{sen}(x))^2}.$$

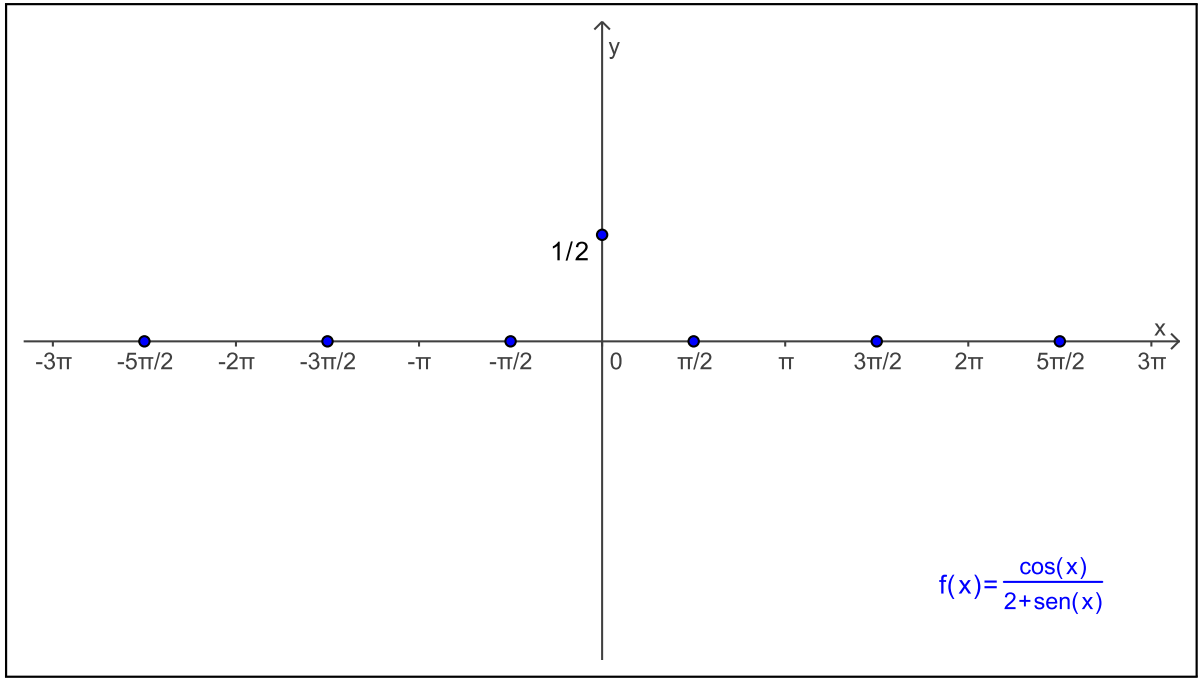
Logo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(x)+1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) < -1/2 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

# (6) Crescimento e decrescimento



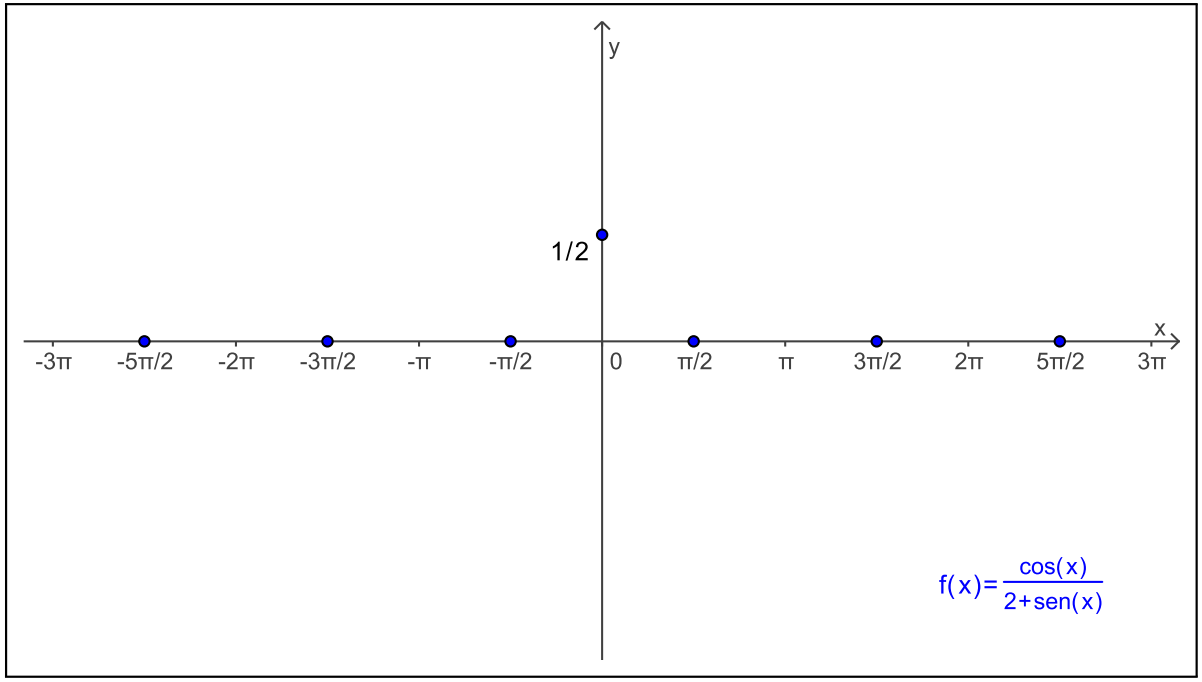

Logo, $f$ é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$

# (6) Crescimento e decrescimento



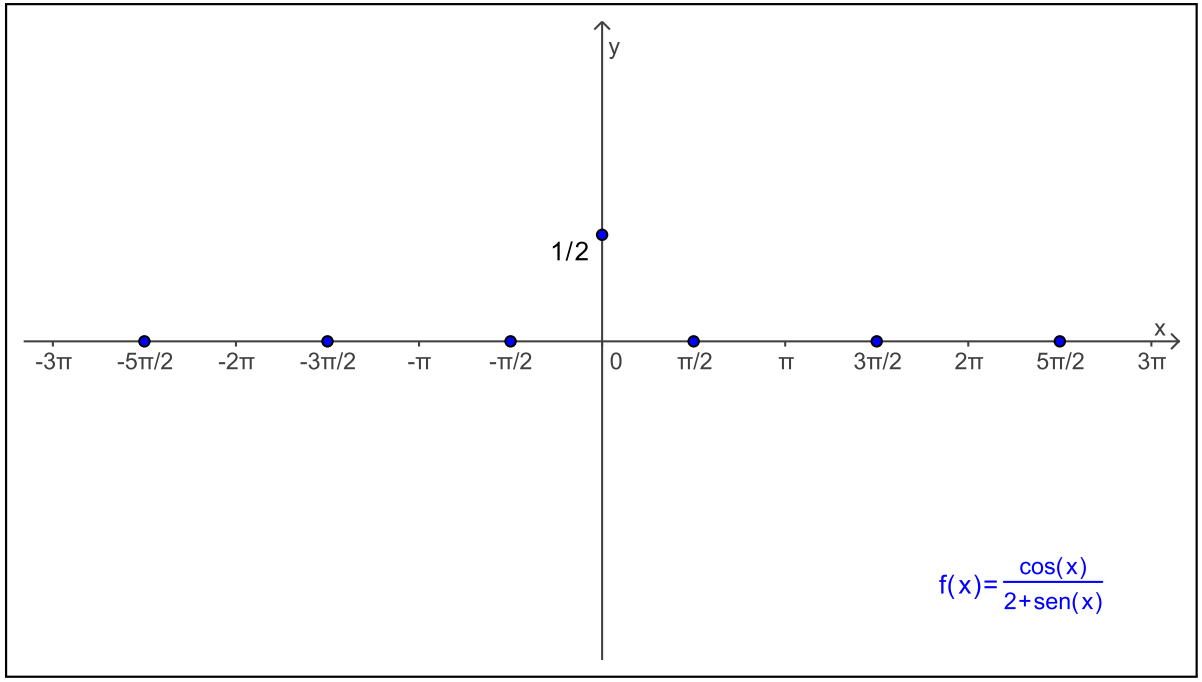

Logo, $f$ é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $f$ é decrescente nos intervalos $\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + (2k+1)\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# (6) Crescimento e decrescimento




Logo, $f$ é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $f$ é decrescente nos intervalos $\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + (2k+1)\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos críticos de $f$ são

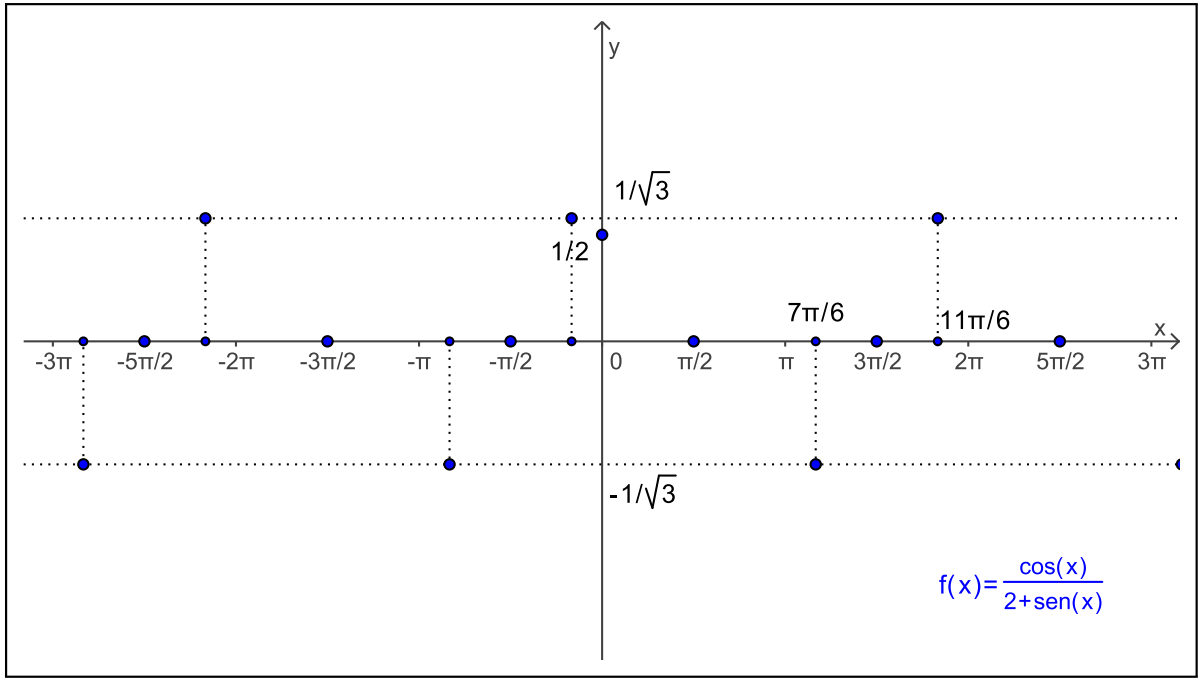
# (6) Crescimento e decrescimento




Logo, $f$ é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $f$ é decrescente nos intervalos $\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+(2k+1)\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos críticos de $f$ são

$$\frac{7\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

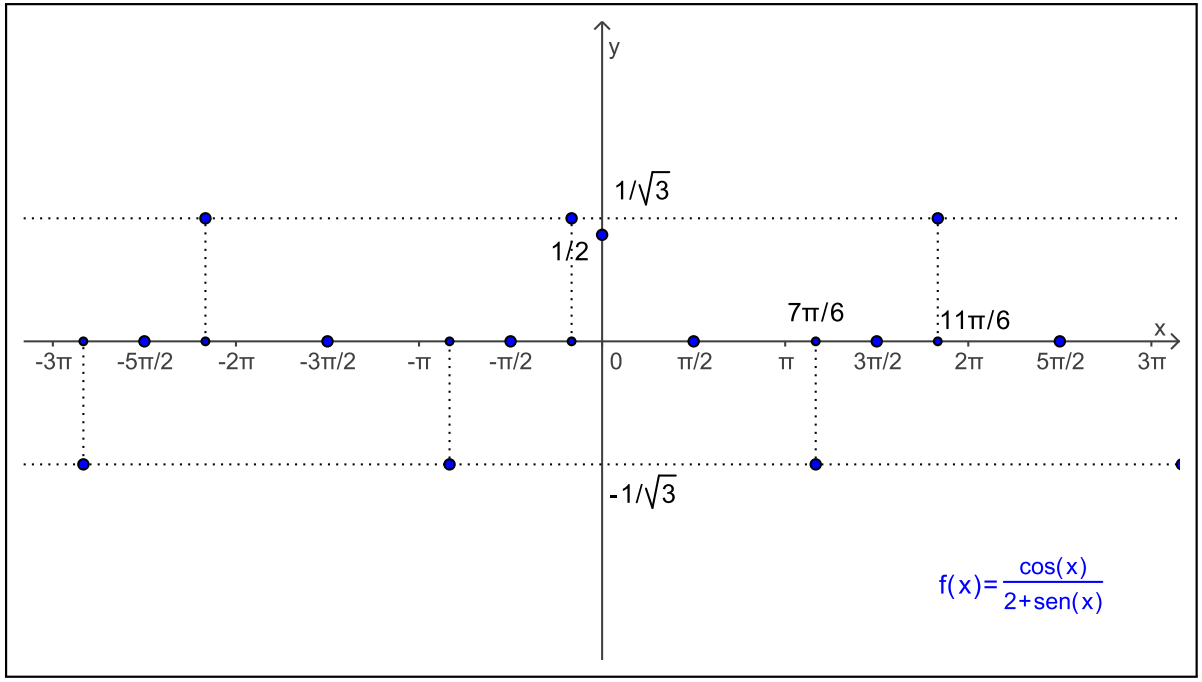
# (6) Crescimento e decrescimento




Logo, $f$ é crescente nos intervalos $\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $f$ é decrescente nos intervalos $\left(\frac{11\pi}{6}+(2k-1)\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos críticos de $f$ são

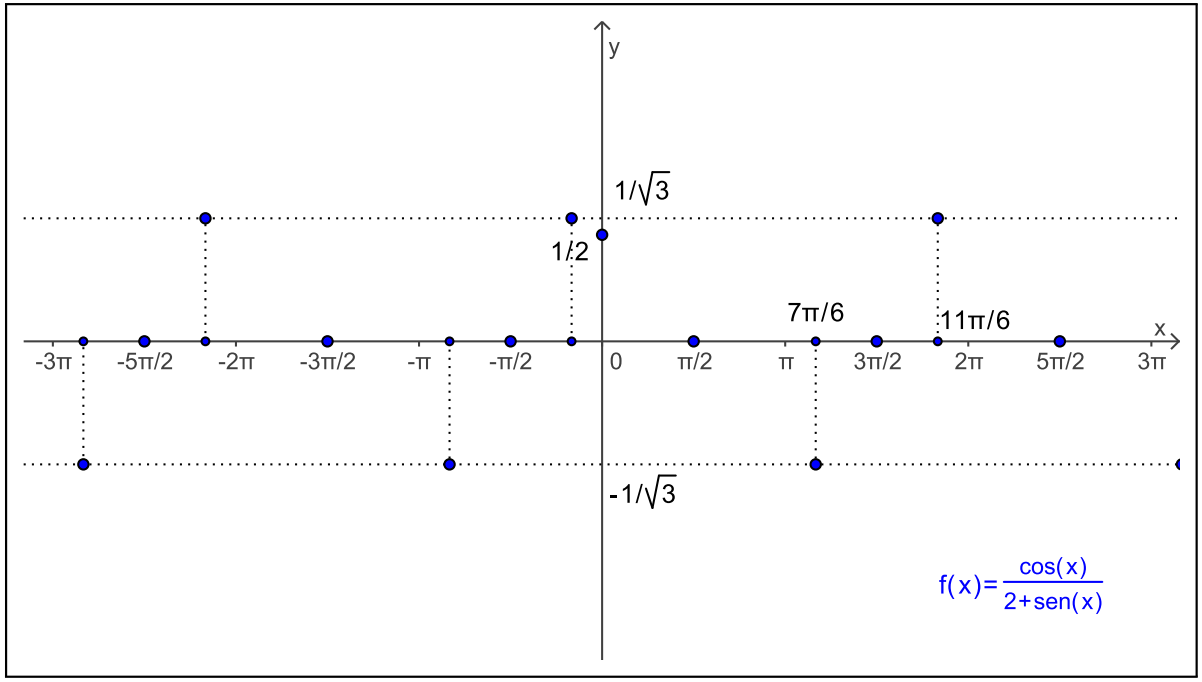
$$\frac{7\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{e} \qquad \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

# (7) Máximos e mínimos locais



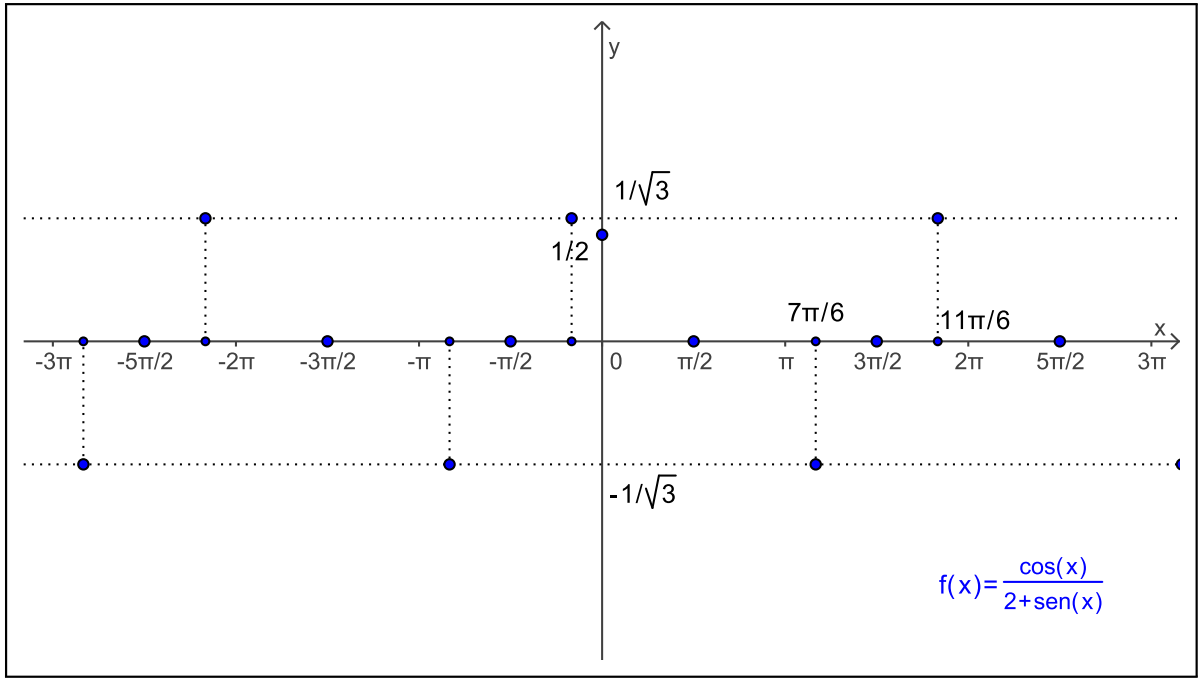

Pelo teste da derivada primeira, os pontos críticos $\dfrac{7\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$

# (7) Máximos e mínimos locais



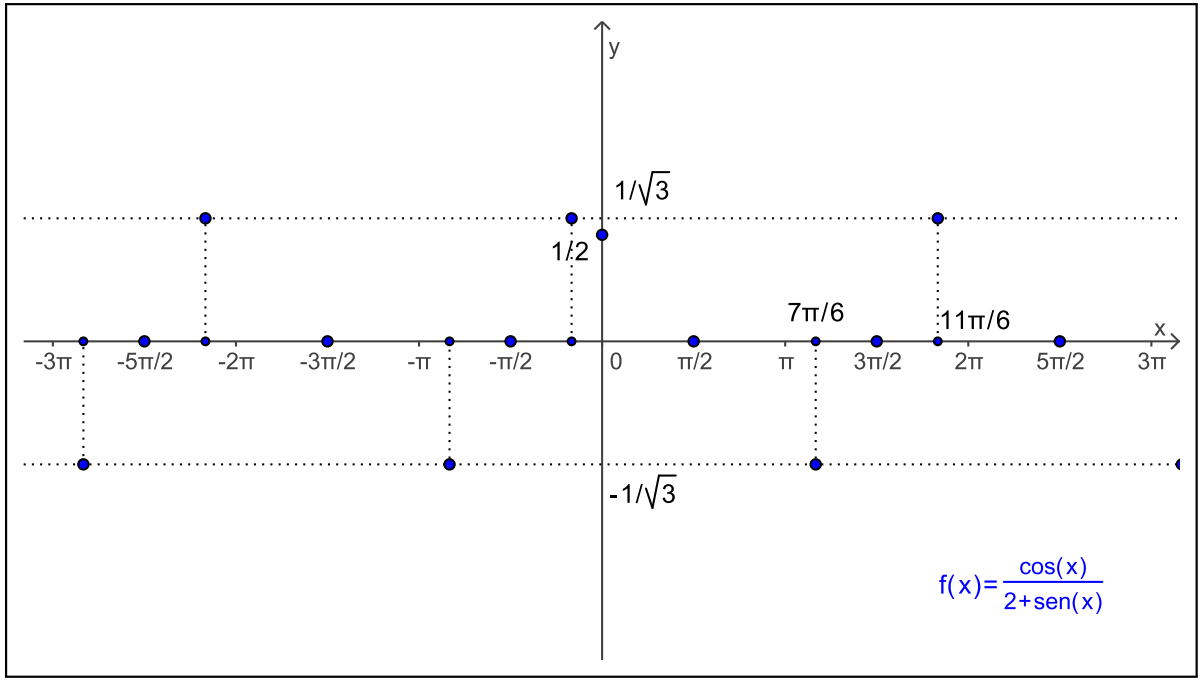

Pelo teste da derivada primeira, os pontos críticos $\dfrac{7\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de mínimo local

# (7) Máximos e mínimos locais



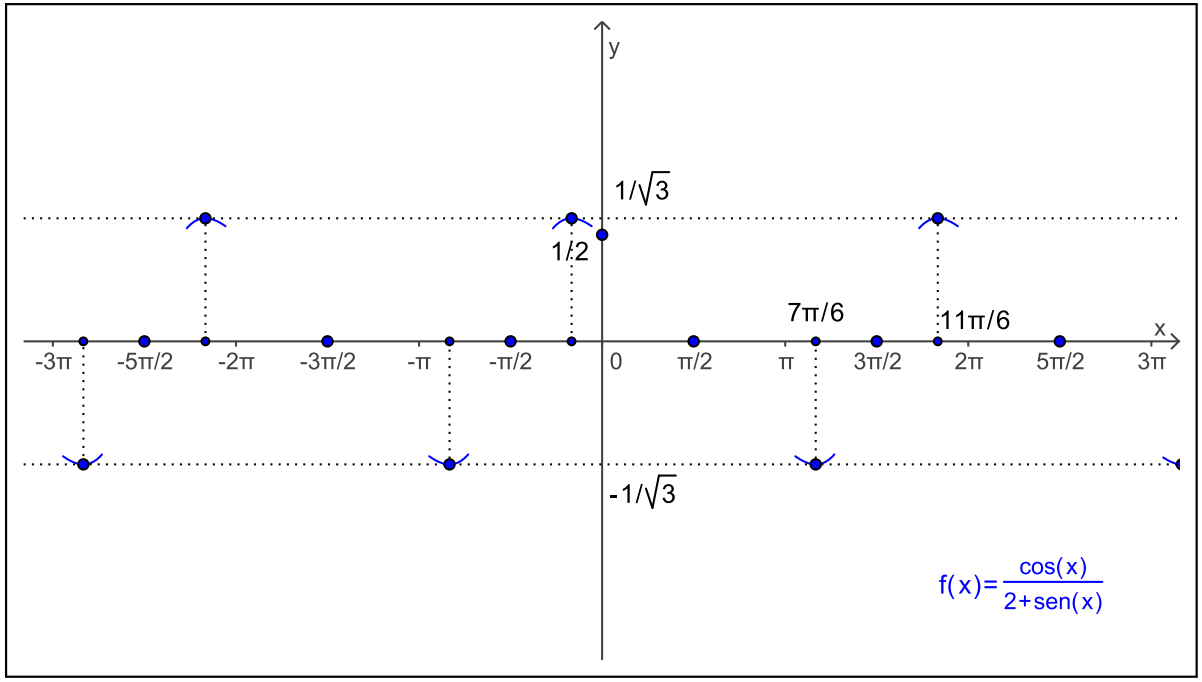

Pelo teste da derivada primeira, os pontos críticos $\dfrac{7\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de mínimo local e os pontos críticos $\dfrac{11\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$

# (7) Máximos e mínimos locais



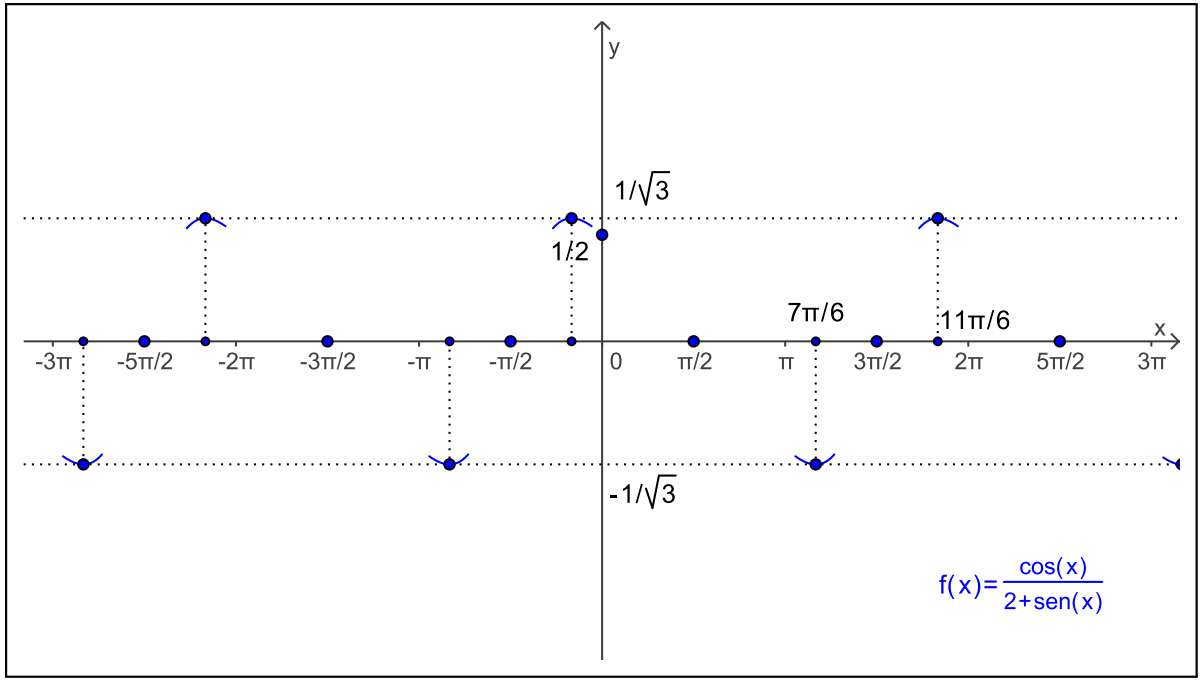

Pelo teste da derivada primeira, os pontos críticos $\dfrac{7\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de mínimo local e os pontos críticos $\dfrac{11\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de máximo local.

# (7) Máximos e mínimos locais

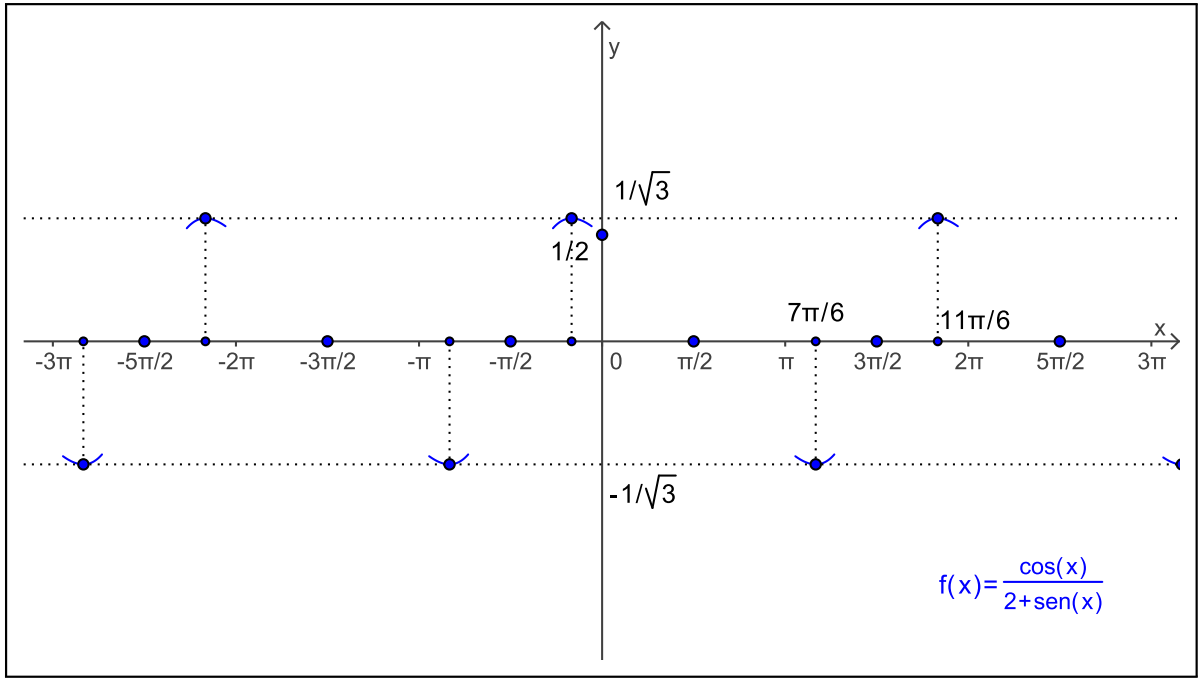



Pelo teste da derivada primeira, os pontos críticos $\dfrac{7\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de mínimo local e os pontos críticos $\dfrac{11\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ são pontos de máximo local.

# (8) Concavidade e pontos de inflexão



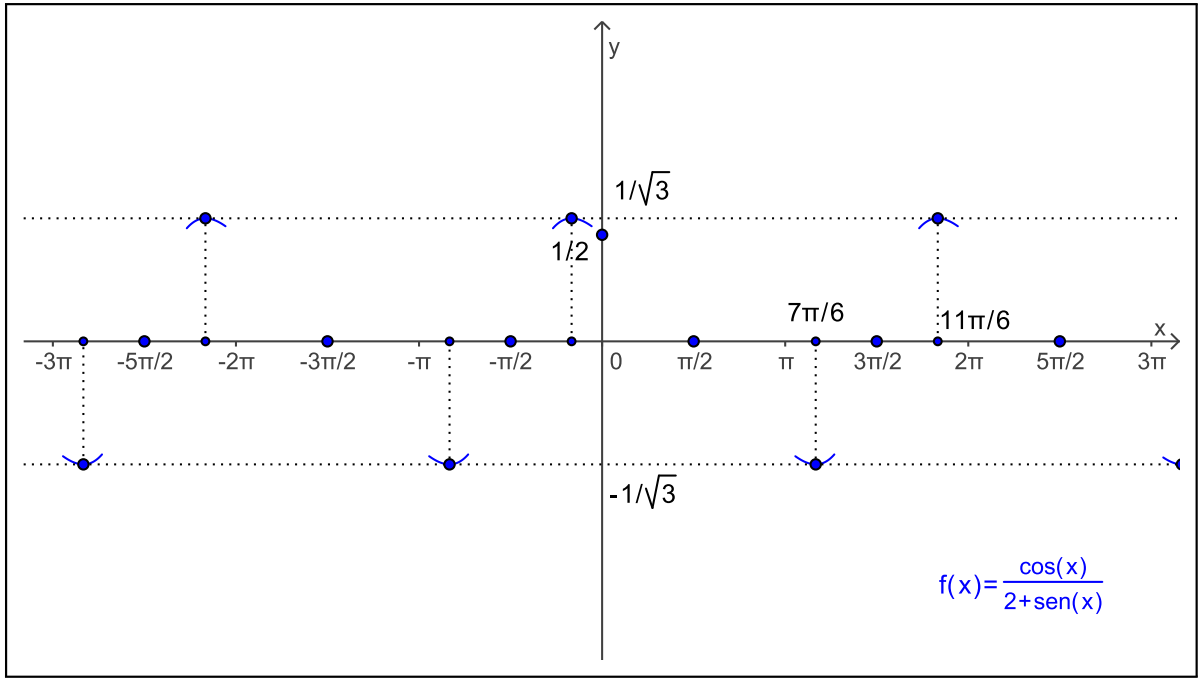
# (8) Concavidade e pontos de inflexão




Temos que

$$f''(x) =$$

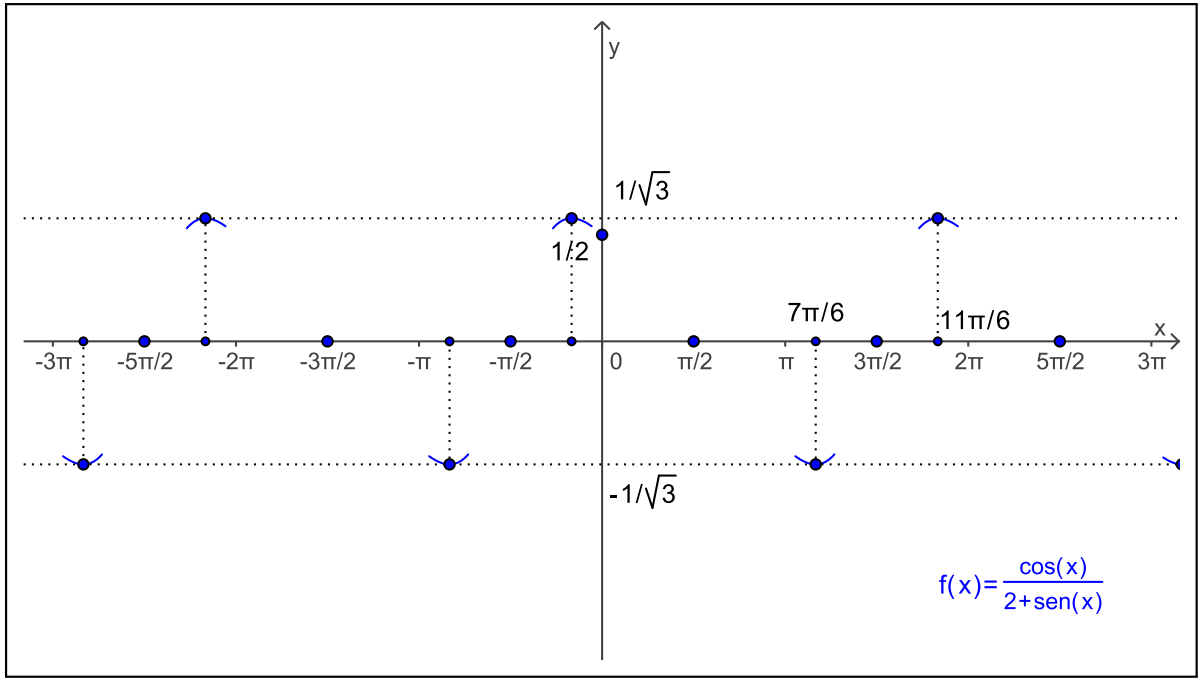
# (8) Concavidade e pontos de inflexão




Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

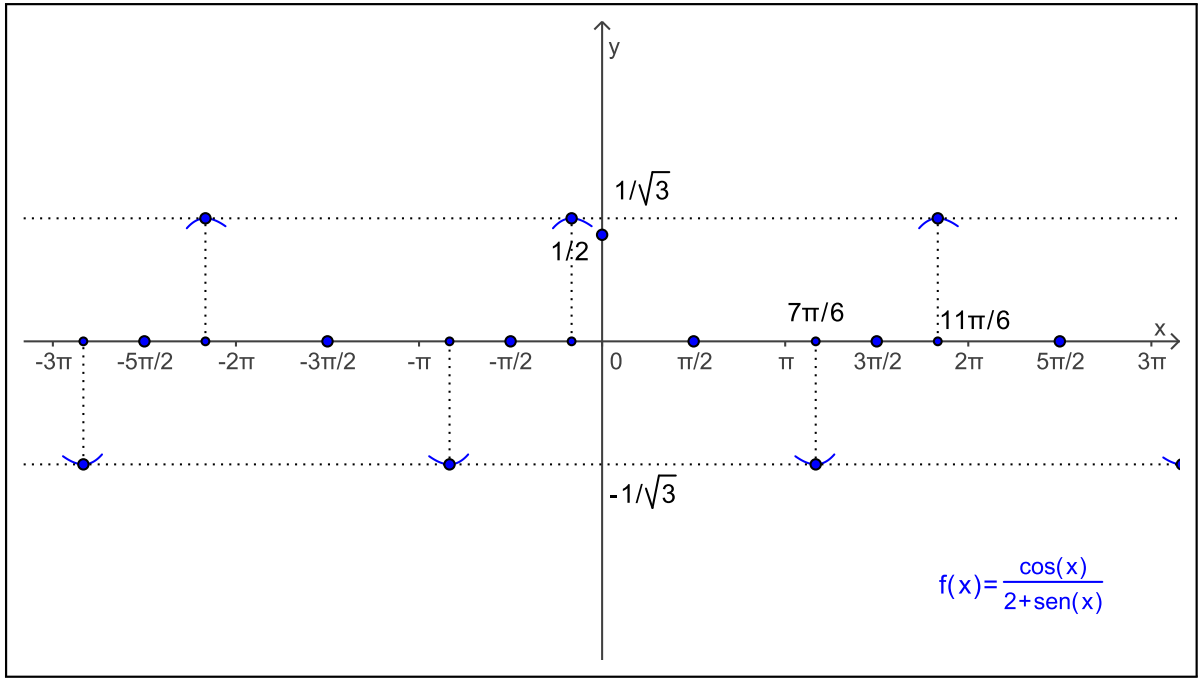



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

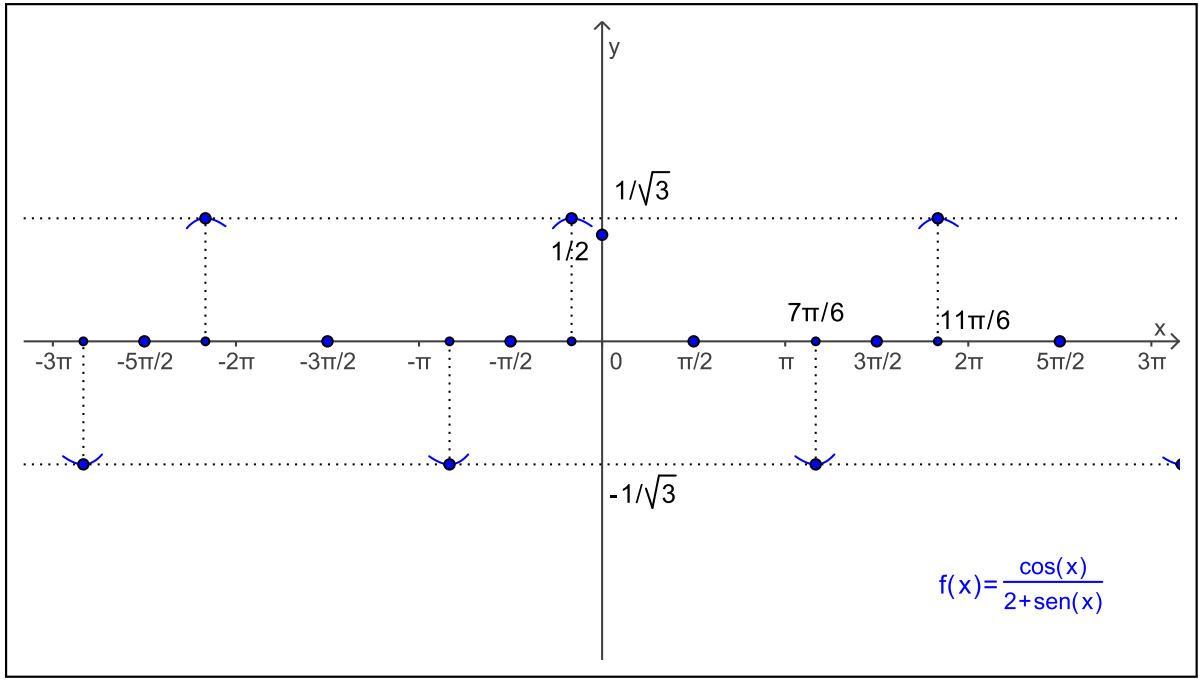



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$.

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

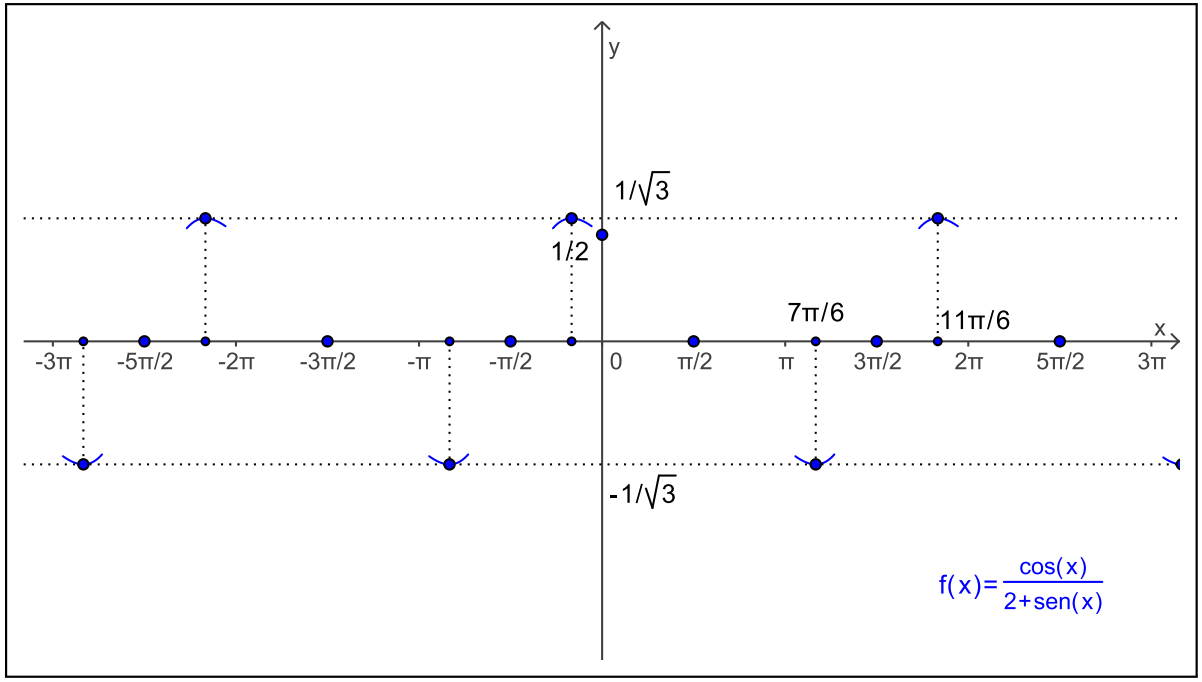



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0$

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

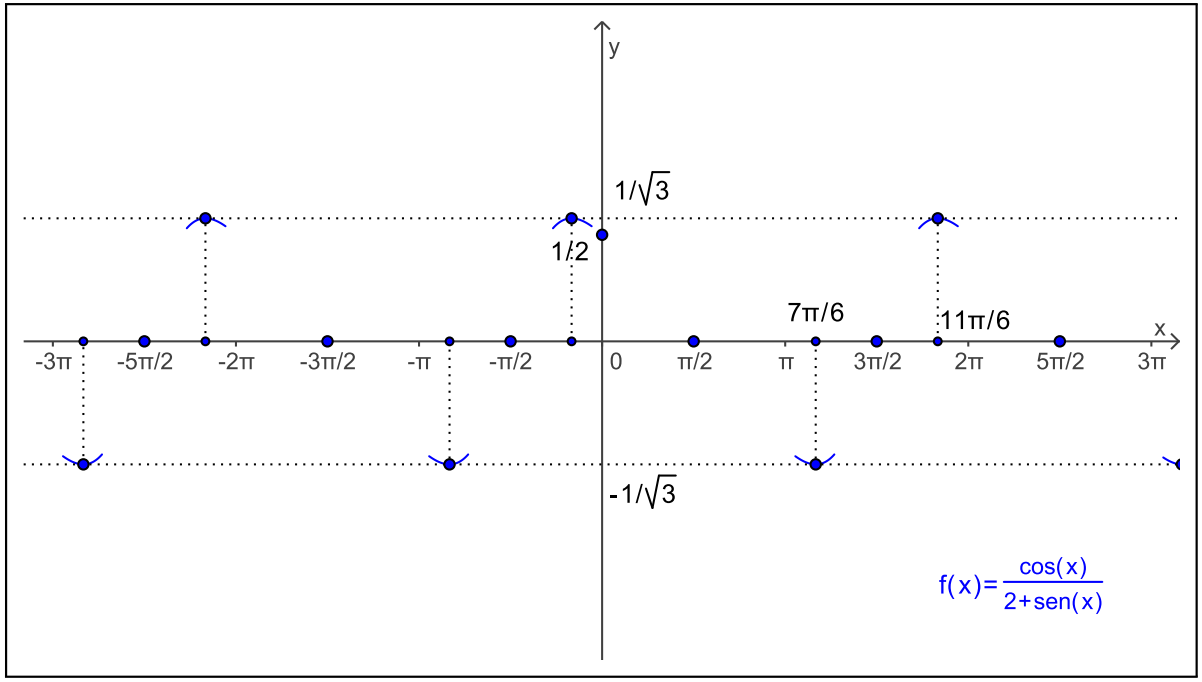



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0$

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

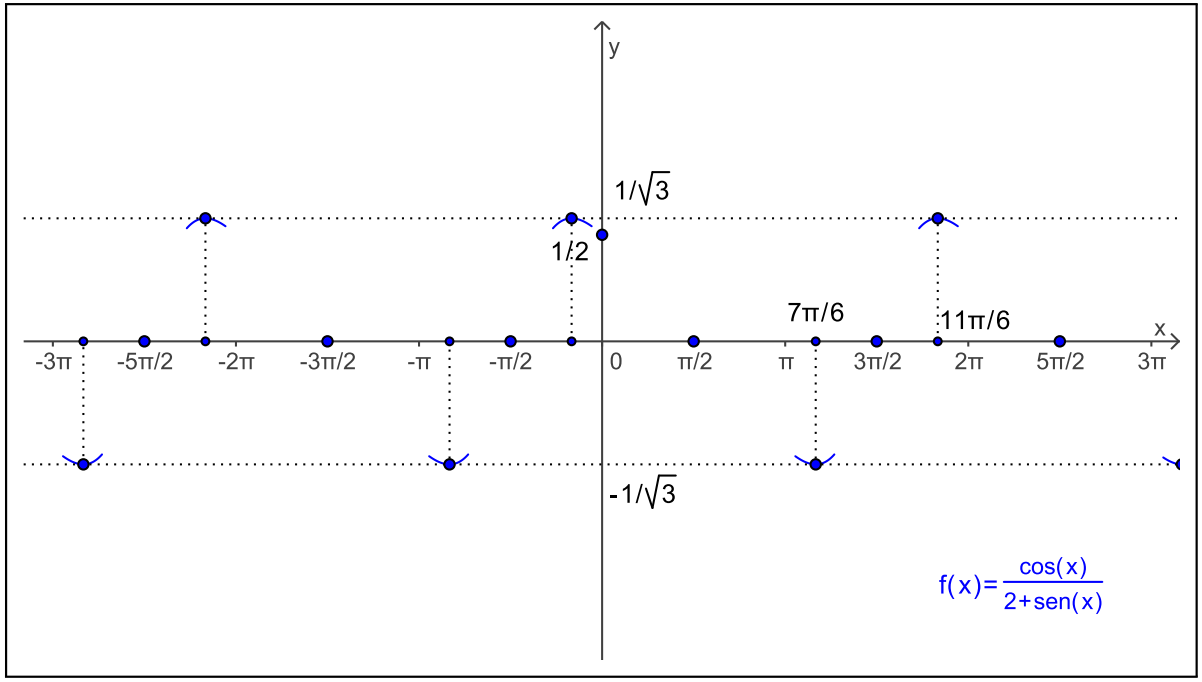



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

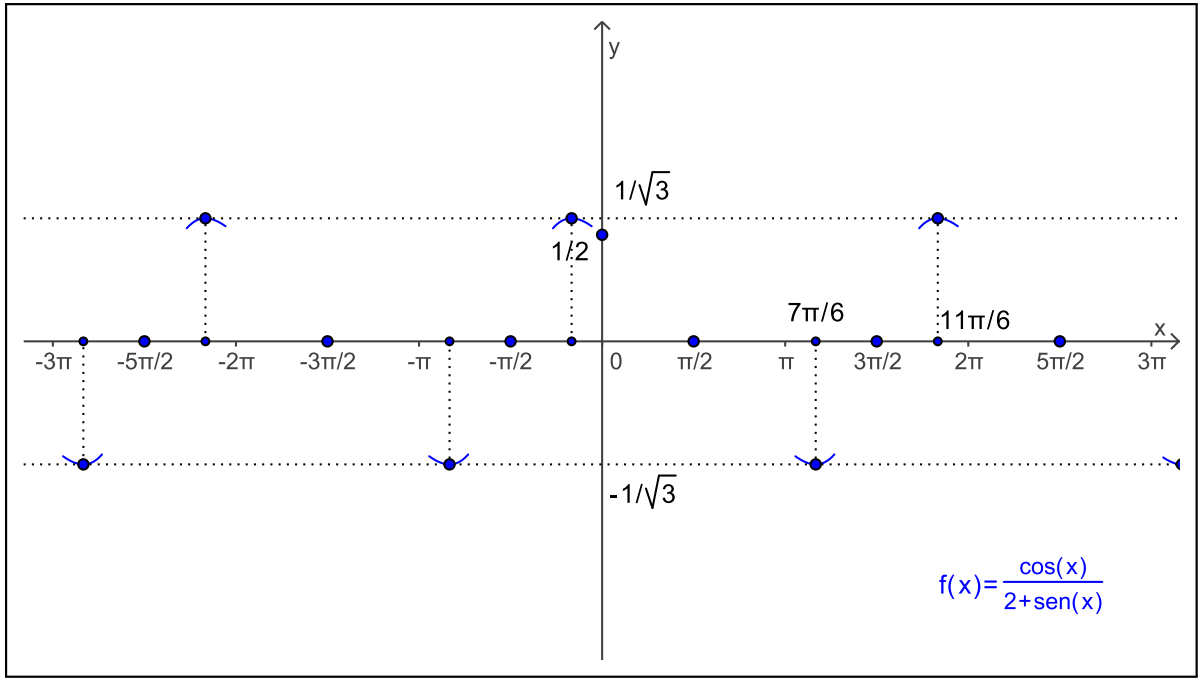



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então, o gráfico de $f$ é côncavo para cima nos intervalos $(\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

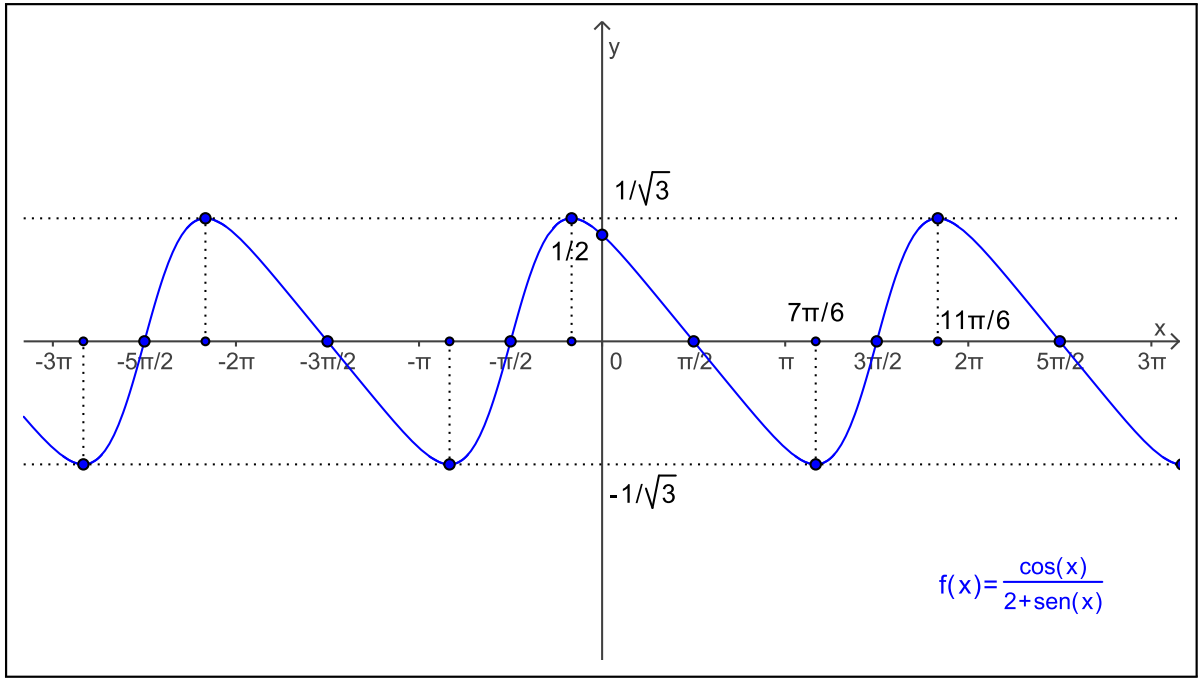



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então, o gráfico de $f$ é côncavo para cima nos intervalos $(\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$ e côncavo para baixo nos intervalos $(3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi, 5\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# (8) Concavidade e pontos de inflexão

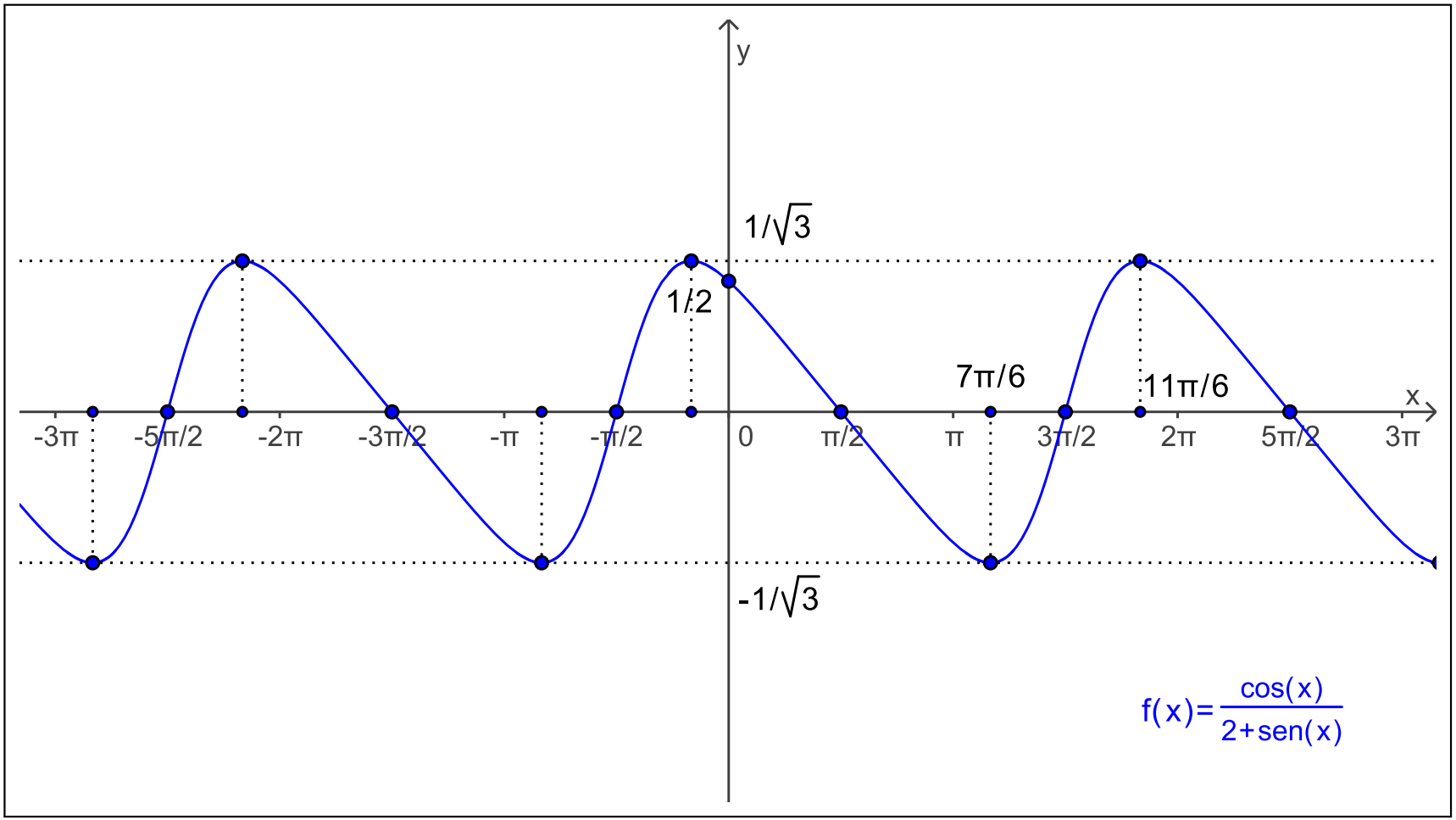



Temos que

$$f''(x) = -\frac{2\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x))}{(2+\operatorname{sen}(x))^3}.$$

Como $(2+\operatorname{sen}(x))^3 \geq 0$ e $1-\operatorname{sen}(x) \geq 0$, segue-se que o sinal da derivada segunda é dado pelo sinal de $-\cos(x)$. Assim, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então, o gráfico de $f$ é côncavo para cima nos intervalos $(\pi/2 + 2\,k\,\pi, 3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$ e côncavo para baixo nos intervalos $(3\,\pi/2 + 2\,k\,\pi, 5\,\pi/2 + 2\,k\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

# Pronto!


y
x
1/√3
1/2
7π/6
11π/6
-1/√3
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
f(x)= cos(x) / 2+sen(x)